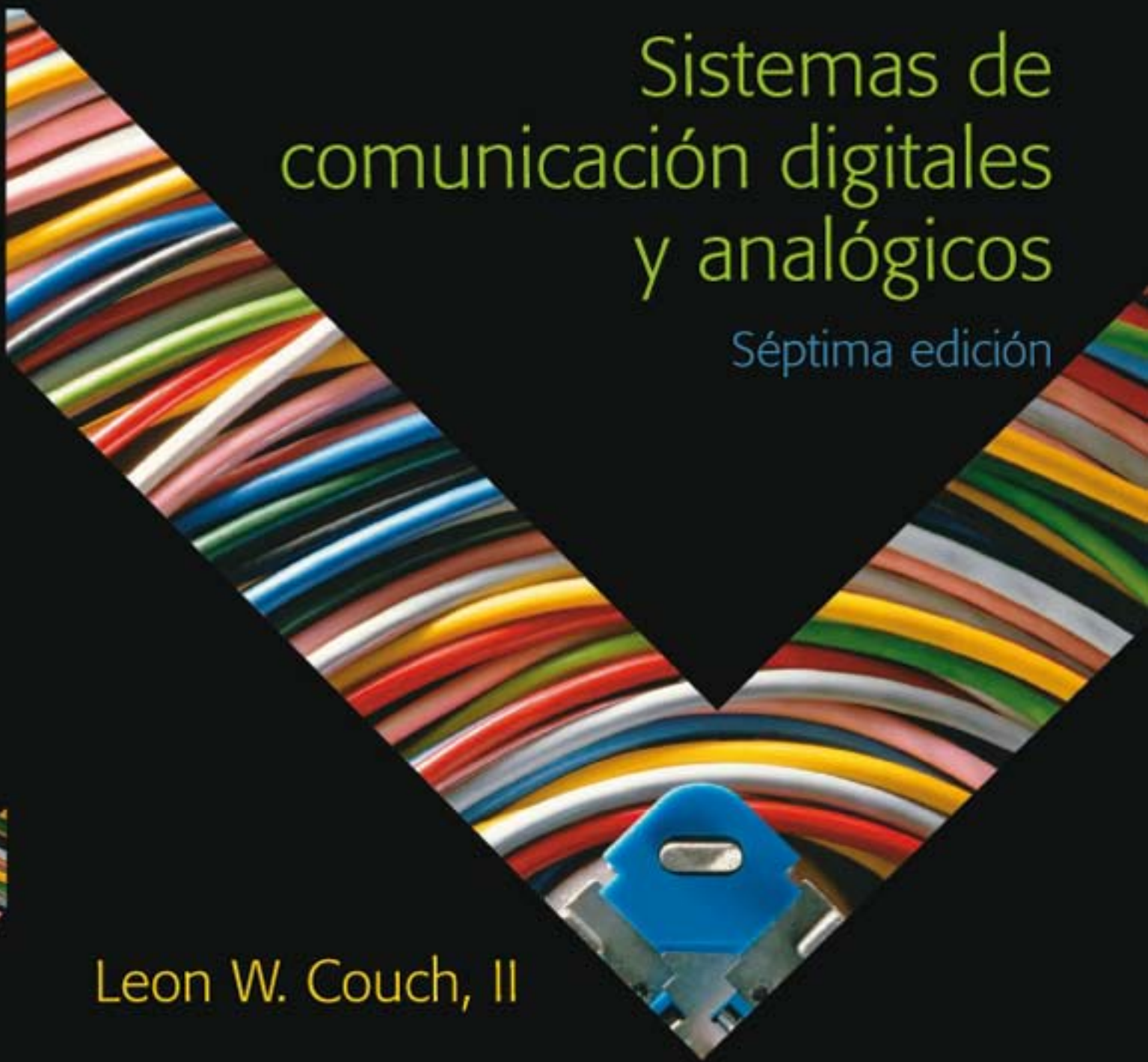
Sistemas de comunicación digitales y analógicos

Séptima edición



Leon W. Couch, II

PEARSON
Prentice Hall

Sistemas de comunicación digitales y analógicos

SISTEMAS DE COMUNICACIÓN DIGITALES Y ANALÓGICOS

Séptima edición

LEON W. COUCH, II

Profesor Emérito
Electrical and Computer Engineering
University of Florida, Gainesville

TRADUCCIÓN:
Ricardo Javier Romero Elizondo
REVISIÓN TÉCNICA:
José Luis Cuevas Ruiz
Departamento de Electrónica
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey, Campus Estado de México

PEARSON Educación ®

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

COUCH, W. LEON, II

Sistemas de comunicación digitales y analógicos. Séptima edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2008

ISBN: 978-970-26-1216-2
Área: Ingeniería

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 784

Authorized translation from the English language edition, entitled *Digital and analog communication systems, 7th* edition by *Leon W. Couch,* published by Pearson Education, Inc., as Prentice Hall, Copyright □ 2007. All rights reserved.
ISBN 0131424920

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés titulada *Digital and analog communication systems, 7a* edición por *Leon W. Couch,* publicada por Pearson Education, Inc., como Prentice Hall, Copyright □ 2007. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en español
Editor: Luis Miguel Cruz Castillo
e-mail: luis.cruz@pearsoned.com
Editora de desarrollo: Claudia Celia Martínez Amigón
Supervisor de producción: Gustavo Rivas Romero

Edición en inglés
Editorial Director, ECS: *Marcia J. Horton*
Acquisitions Editor: *Michael McDonald*
Executive Managing Editor: *Vince O'Brien*
Managing Editor: *David A. George*
Production Editor: *Kevin Bradley*
Director of Creative Services: *Paul Belfanti*
Art Director: *Jayne Conte*
Cover Designer: *Bruce Kenselaar*
Art Editor: *Greg Dulles*
Manufacturing Manager: *Alexis Heydt-Long*
Manufacturing Buyer: *Lisa McDowell*

SÉPTIMA EDICIÓN, 2008

D.R. @ 2008 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5o. piso
Col. Industrial Atoto
53519, Naucalpan de □árez, Estado de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031.

Prentice Hall es una marca registrada de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN: 978-970-26-1216-2

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 11 10 09 08

A mi esposa,
Margaret Wheland Couch,
y a nuestros hijos,
Leon III, Jonathan y Rebecca

CONTENIDO

PREFACIO **xix**

LISTA DE SÍMBOLOS **xxiii**

1 INTRODUCCIÓN **1**

1–1 Una perspectiva histórica 2

1–2 Fuentes y sistemas digitales y analógicos 5

1–3 Formas de onda determinísticas y aleatorias 6

1–4 Organización de este libro 6

1–5 Uso de una computadora personal y MATLAB 7

1–6 Diagrama de bloques de un sistema de comunicación 8

1–7 Asignaciones de frecuencias 10

1–8 Propagación de ondas electromagnéticas 12

1–9 Medición de información 16

1–10 Capacidad de canal y sistemas de comunicación ideales 18

1–11 Codificación 19
Códigos de bloque, 20
Códigos convolucionales, 22
Entrelazado de código, 25
Rendimiento de código, 25
Modulación por codificación convolucional, 28

1–12 Avance 29

1–13 Ejemplos de estudio 29

Problemas 30

2 PROPIEDADES DE SEÑALES Y RUIDO 33

2–1 Señales y espectros 33
Formas de onda físicamente realizables 34
Operador de promedio de tiempo 35
Valor de DC 36
Potencia 37
Valor RMS y potencia normalizada 39
Formas de onda de energía y de potencia 40
Decibel 40
Fasores 42

2–2 Transformada y espectros de Fourier 43
Definición 43
Propiedades de las transformadas de Fourier 46
Teorema de Parseval y densidad espectral de energía 48
Función delta de Dirac y función escalón unitario 51
Pulsos rectangulares y triangulares 54
Convolución 58

2–3 Densidad espectral de potencia y función de autocorrelación 61
Densidad espectral de potencia 61
Función de autocorrelación 63

2–4 Representación de señales y ruido por medio de series ortogonales 65
Funciones ortogonales 65
Series ortogonales 67

2–5 Series de Fourier 68
Series complejas de Fourier 68

Series de Fourier en cuadratura 70
Series polares de Fourier 71
Espectros de línea para formas de onda periódicas 73
Densidad espectral de potencia para formas de onda periódicas 77

2–6 Repaso de sistemas lineales 79
Sistemas lineales invariables con el tiempo 79
Respuesta de impulso 79
Función de transferencia 80
Transmisión sin distorsión 83
Distorsión de señales de audio, de video y de datos 84

2–7 Señales limitadas por banda y ruido 86
Formas de onda limitadas por banda 86
Teorema de muestreo 87
Muestreo de impulso y procesamiento digital de señales (DSP) 90
Teorema de dimensionalidad 93

2–8 Transformada discreta de Fourier 94
Utilizando la DFT para calcular la transformada continua de Fourier 95
Utilizando la DFT para calcular las series de Fourier 100

2–9 Ancho de banda de señales 101

2–10 Resumen 110

2–11 Ejemplos de estudio 110

Problemas 115

3 PULSO DE BANDA BASE Y SEÑALIZACIÓN DIGITAL 128

3–1 Introducción 128

3–2 Modulación de amplitud de pulsos 129
Muestreo natural (por compuerta) 129
Muestreo instantáneo (PAM plana) 133

3–3 Modulación por codificación de pulsos 137
Muestreo, cuantización y codificación 138
Circuitos prácticos de PCM 138
Ancho de banda de señales PCM 142
Efectos del ruido 143
Cuantificación no uniforme: compresión y modulación M-Law y A-Law 147
Módem V.90 de PCM a 56 kb/s para computadora 151

3–4 Señalización digital 152
Representación vectorial 153
Estimación de ancho de banda 155
Señalización binaria 156
Señalización multinivel 158

3–5 Codificación y espectros de línea 160
Codificación binaria de línea 160
Espectro de potencia para códigos de línea binarios 163
Codificación diferencial 169
Diagramas de ojo 170
Repetidores regenerativos 171
Sincronización de bit 173
Espectros de potencia para señales multinivel polares NRZ 176
Eficiencia espectral 179

3–6 Interferencia intersimbólica 180
Primer método de Nyquist (cero ISI) 182
Filtro de coseno elevado de Nyquist 183
Segundo y tercer métodos para el control de ISI de Nyquist 188

3–7 Modulación por codificación de pulsos diferencial 188

3–8 Modulación delta 192
Ruido granular y ruido de sobrecarga de pendiente 194
Modulación delta adaptable y modulación delta de pendiente continuamente variable 197
Codificación de voz 199

3–9 Multiplexión por división de tiempo 199
Sincronización de trama 200
Líneas síncronas y asíncronas 202
Jerarquía de TDM 206
El sistema T1 de PCM 211

3–10 Sistema de transmisión de paquetes 213

3–11 Modulación por tiempo de pulsos: modulación por ancho de pulso y modulación por posición de pulso 213

3–12 Resumen 215

3–13 Ejemplos de estudio 218

Problemas 221

4 PRINCIPIOS Y CIRCUITOS DE SEÑALIZACIÓN PASABANDA 230

4–1 Representación de envolventes complejas de formas de onda pasabanda 230
Definiciones: banda base, pasabanda y modulación 231
Representación de la envolvente compleja 231

4–2 Representación de señales moduladas 233

4–3 Espectro de señales pasabanda 234

4–4 Evaluación de potencia 237

4–5 Filtrado pasabanda y distorsión lineal 240
Filtro pasabajas equivalente 240
Distorsión lineal 242

4–6 Teorema de muestreo pasabanda 244

4–7 Señal recibida con ruido añadido 245

4–8 Clasificación de filtros y amplificadores 246
Filtros 246
Amplificadores 250

4–9 Distorsión no lineal 251

4–10 Limitadores 256

4–11 Mezcladores y convertidores elevadores y reductores 257

4–12 Multiplicadores de frecuencia 263

4–13 Circuitos detectores 265
Detector de envolvente 265
Detector de producto 266
Detector de modulación en frecuencia 268

4–14 Lazos enganchados por fase y sintetizadores de frecuencia 273

4–15 Síntesis digital directa 281

4–16 Transmisores y receptores 281
Transmisores generalizados 281
Receptor generalizado: el receptor superheterodino 283
Receptores de IF en cero 287
Interferencia 288

4–17 Software radio 288

4–18 Resumen 289

4–19 Problemas de estudio 289

Problemas 295

5 SISTEMAS MODULADOS DE AM, FM Y DIGITALES 302

5–1 Modulación en amplitud 303

5–2 Estándares técnicos de difusión por AM y difusión digital por AM 308
Difusión digital por AM 309

5–3 Doble banda lateral con portadora suprimida 310

5–4 Lazo de costas y lazo cuadrático 310

5–5 Señales asimétricas de banda lateral 312
Banda lateral única 312
Banda lateral vestigial 316

5–6 Modulación en fase y modulación en frecuencia 318
Representación de señales PM y FM 318
Espectros de señales moduladas por ángulo 323
Modulación por ángulo de banda estrecha 328
Modulación en frecuencia de banda ancha 329
Preénfasis y deénfasis en sistemas modulados por ángulo 333

5–7 Multiplexión por división de frecuencias y FM en estéreo 333

5–8 Estándares técnicos de difusión por FM y difusión digital por FM 337
Difusión digital por FM 337

5–9 Señalización pasabanda modulada binaria 339
Modulación de encendido-apagado (OOK) 339
Modulación por corrimiento de fase binaria (BPSK) 343
Modulación por corrimiento de fase diferencial (DPSK) 345
Modulación por corrimiento de frecuencia (FSK) 345

5–10 Señalización pasabanda multinivel modulada 352
Modulación por corrimiento de fase en cuadratura (QPSK) y modulación por corrimiento de fase M-aria (MPSK) 352
Modulación en amplitud en cuadratura (QAM) 355
OQPSK y π/4 QPSK 358
PSD para MPSK, QAM, QPSK, OQPSK y π/4 QPSK 359
Eficiencia espectral para MPSK, QAM, QPSK, OQPSK y π/4 QPSK con filtrado de coseno realzado 361

5–11 Modulación por corrimiento mínimo (MSK) □ GMSK 362

5–12 Multiplexión por división de frecuencias ortogonales (OFDM) 367

5–13 Sistemas de espectro ensanchado 372
Secuencia directa 373
Salto de frecuencias 379
Bandas de frecuencia de SS 379

5–14 Resumen 379

5–15 Ejemplos de estudio 381

Problemas 384

6 PROCESOS ALEATORIOS Y ANÁLISIS ESPECTRAL 397

6–1 Algunas definiciones básicas 398
Procesos aleatorios 398
Estacionalidad y ergodicidad 399
Funciones de correlación y estacionalidad en sentido amplio 403
Procesos aleatorios complejos 405

6–2 Densidad espectral de potencia 407
Definición 407
Teorema de Wiener-Khintchine 408
Propiedades de la PSD 411
Fórmula general para la PSD de señales digitales 415
Procesos de ruido blanco 418
Medición de la PSD 419

6–3 Valores de DC y RMS para procesos ergódicos aleatorios 420

6–4 Sistemas lineales 422
Relaciones de entrada a salida 422

6–5 Mediciones para el ancho de banda 427
Ancho de banda equivalente 427
Ancho de banda de RMS 427

6–6 El proceso aleatorio gaussiano 429
Propiedades de los procesos gaussianos 430

6–7 Procesos pasabanda 434
Representaciones pasabanda 434
Propiedades de procesos WSS pasabanda 437
Demostraciones de algunas propiedades 442

6–8 Filtros acoplados 447
Resultados generales 447
Resultados para el ruido blanco 449
Procesamiento de correlación 454
Filtro transversal acoplado 455

6–9 Resumen 458

6–10 Apéndice: demostración de la desigualdad de Schwarz 460

6–11 Ejemplos de estudio 462

Problemas 465

7 RENDIMIENTO DE SISTEMAS DE COMUNICACIONES DISTORSIONADOS POR RUIDO 476

7–1 Probabilidades de error para señalización binaria 477
Resultados generales 477
Resultados para el ruido gaussiano 479
Resultados para el ruido blanco gaussiano y recepción por filtro acoplado 481
Resultados para el ruido coloreado gaussiano y recepción por filtro acoplado 482

7–2 Rendimiento de sistemas binarios en banda base 483
Señalización unipolar 483
Señalización polar 486
Señalización bipolar 486

7–3 Detección coherente de señales binarias pasabanda 488
Modulación de encendido-apagado 488
Modulación por corrimiento de fase binaria 490
Modulación por corrimiento de frecuencia 491

7–4 Detección no coherente de señales binarias pasabanda 494
Modulación de encendido-apagado 494
Modulación por corrimiento de frecuencia 498
Modulación por corrimiento de fase diferencial 500

7–5 Modulación por corrimiento de fase en cuadratura y modulación por corrimiento mínimo 502

7–6 Comparación de sistemas de señalización digital 504
Tasa de error en el bit y ancho de banda 504
Error en el símbolo y error en el bit para señalización multinivel 506
Sincronización 507

7–7 Razón señal a ruido de salida para sistemas PCM 508

7–8 Razones señal a ruido de salida para sistemas analógicos 514
Comparación con los sistemas en banda base 514
Sistemas de AM con detección de producto 515
Sistemas de AM con detección de envolvente 517
Sistemas de DSB-SC 518
Sistemas de SSB 519
Sistemas de PM 519
Sistemas de FM 523
Sistemas de FM con extensión de umbral 526
Sistemas de FM con deénfasis 528

7–9 Comparación de sistemas de señalización analógica 531
Rendimiento de un sistema ideal 531

7–10 Resumen 534

7–11 Ejemplos de estudio 534

Problemas 543

8 SISTEMAS DE COMUNICACIONES ALÁMBRICOS E INALÁMBRICOS 551

8–1 El desarrollo explosivo de las telecomunicaciones 551

8–2 Sistemas telefónicos 552
Base histórica 552
Sistemas telefónicos modernos y terminales remotas 553

8–3 Líneas de suscriptor digital (DSL) 559
Líneas de suscriptor digital G.DMT y G.Lite 560
Video sobre demanda (VOD) 562
Red digital de servicios integrados (ISDN) 562

8–4 Capacidades de las redes públicas telefónicas conmutadas 565

8–5 Sistemas de comunicaciones vía satélite 565
Transmisión de televisión digital y analógica 570
Acceso múltiple de datos y de señal telefónica 572
Radiodifusión vía satélite 577

8–6 Análisis de balance de enlace 579
Potencia de señal recibida 580
Fuentes de ruido térmico 582
Caracterización de fuentes de ruido 583
Caracterización del ruido de dispositivos lineales 584
Caracterización del ruido de dispositivos lineales en cascada 590
Evaluación del balance de enlace 592
Balance de enlace de E_b/N_0 para sistemas digitales 594
Pérdida en trayectoria para ambientes urbanos inalámbricos 595

8–7 Sistemas de fibra óptica 599

8–8 Sistemas de telefonía celular 603
Primera generación (1G), el sistema analógico amps 604
Segunda generación (2G), los sistemas digitales 607
Los sistemas PCS en la banda de 1,900 MHz 610
Estado de las redes de 2G 611
Sistemas de tercera generación (3G) 611

8–9 Televisión 612
Televisión en blanco y negro 612
Sonido MTS en estéreo 619
Televisión a color 619
Estándares para sistemas de TV y CATV 624
TV digital (DTV) 632

8–10 Módems para datos por cable 636

8–11 Redes inalámbricas de datos 637
Wi-Fi 637
Wi-Max 639

8–12 Resumen 640

8–13 Ejemplos de estudio 640

Problemas 645

APÉNDICE A TÉCNICAS, IDENTIDADES Y TABLAS MATEMÁTICAS 653

A–1 Trigonometría y números complejos 653
Definiciones 653
Identidades trigonométricas y números complejos 653

A–2 Cálculo diferencial 654
Definición 654
Reglas de diferenciación 654
Tabla de derivadas 654

A–3 Formas indeterminadas 655

A–4 Cálculo de integrales 655
Definición 655
Técnicas de integración 656

A–5 Tablas de integrales 656
Integrales indefinidas 656
Integrales definidas 657

A–6 Expansiones de series 658
Series finitas 658
Series infinitas 658

A–7 Pares de transformada de Hilbert 659

A–8 La función delta de Dirac 659
Propiedades de las funciones delta de Dirac 660

A–9 Tabulación de $Sa(x) = (\text{sen}\, x)/x$ 661

A–10 Tabulación de $Q(z)$ 662

APÉNDICE B PROBABILIDAD Y VARIABLES ALEATORIAS 664

B–1 Introducción 664

B–2 Conjuntos 665

B–3 Probabilidad y frecuencia relativa 666
Probabilidad simple 666
Probabilidad conjunta 667
Probabilidades condicionales 668

B–4 Variables aleatorias 669

B–5 Funciones de distribución acumulativa y funciones de densidad de probabilidad 669
Propiedades de CDF y PDF 672
Distribuciones discretas y continuas 672

B–6 Promedio conjunto y momentos 676
Promedio conjunto 676
Momentos 677

B–7 Ejemplos de distribuciones importantes 679
Distribución binomial 679
Distribución de Poisson 682
Distribución uniforme 682
Distribución gaussiana 682
Distribución senoidal 687

B–8 Transformaciones de funciones de variables aleatorias 687

B–9 Estadísticas multivariantes 692
CDF y PDFa multivariantes 692
Estadísticas bivariantes 694
Distribución gaussiana bivariante 695
Transformación de función multivariante 696
Teorema del límite central 698
Problemas 700

APÉNDICE C EMPLEO DE MATLAB 706

C–1 Guía rápida para ejecutar archivos M 707

C–2 Programación en MATLAB 708

REFERENCIAS 710

RESPUESTAS A PROBLEMAS SELECTOS 723

ÍNDICE 729

PREFACIO

Esta nueva publicación del libro *Sistemas de comunicación digitales y analógicos* continúa la tradición de la primera a la sexta ediciones del mismo: presentar los avances más recientes en los sistemas de comunicación digitales. El texto incluye numerosas actualizaciones y nuevas secciones acerca de los sistemas de radiodifusión vía satélite, módems para datos por cable y redes inalámbricas de datos, como los sistemas de Wi-Fi (IEEE 802.11) y Wi-Max (IEEE 802.16). Está redactado como libro de texto para estudiantes de ingeniería en su tercer o cuarto año de carrera, pero también es adecuado como curso introductorio para graduados o como una moderna referencia técnica para ingenieros electricistas profesionales. Por primera vez está disponible como descarga en Internet un manual de soluciones para el estudiante. Visite el sitio *www.pearsoneducacion.net/couch*.

Para aprender acerca de los sistemas de comunicaciones es esencial entender primero *cómo trabajan los sistemas de comunicaciones*. Con los principios de comunicación abordados en los primeros cinco capítulos de este texto (potencia, espectros de frecuencia y el análisis de Fourier), se motiva dicha comprensión mediante el uso de bastantes ejemplos, problemas para facilitar su estudio y la inclusión de estándares adoptados. Es de especial interés el material sobre los sistemas de comunicaciones alámbricos e inalámbricos. El efecto del ruido sobre dichos sistemas (que se describe

mediante procesos aleatorios y de probabilidad) es también de gran importancia, ya que sin su existencia sería posible establecer comunicación a lo largo de los límites del universo con una potencia transmitida despreciable. En resumen, este libro cubre los componentes esenciales para la comprensión de los sistemas de comunicaciones alámbricos e inalámbricos e incluye los estándares adoptados. Estos componentes esenciales son:

- Cómo funcionan los sistemas de comunicación: capítulos 1 al 5.
- El efecto del ruido: capítulos 6 y 7.
- Sistemas de comunicaciones alámbricos e inalámbricos: capítulo 8.

Este libro es ideal para un curso de uno o dos semestres. En el caso de un curso de un semestre se pueden utilizar los primeros cinco capítulos (además de algunas lecturas selectas del capítulo 8) para enseñar lo básico acerca de cómo funcionan los sistemas de comunicaciones. Para un curso de dos semestres se emplea el texto completo.

Esta obra abarca los *aspectos prácticos* de los sistemas de comunicaciones desarrollados en una sólida *base teórica*.

LA BASE TEÓRICA

- Señales digitales y analógicas
- Magnitud y fase de espectros
- Análisis de Fourier
- Teoría de función ortogonal
- Densidad espectral de potencia
- Sistemas lineales
- Sistemas no lineales
- Interferencia intersimbólica
- Envolventes complejas
- Teoría de modulación
- Procesos aleatorios y de probabilidad
- Filtros acoplados
- Cálculo de la SNR
- Cálculo de la BER
- Sistemas óptimos
- Códigos de bloque y convolucionales

LAS APLICACIONES PRÁCTICAS

- Señalización de banda base por PAM, PCM, DPCM, DM, PWM y PPM
- Señalización digital pasabanda por OOK, BPSK, QPSK, MPSK, MSK, OFDM y QAM
- Señalización analógica pasabanda por AM, DSB-SC, SSB, VSB, PM y FM
- Multiplexión por división de tiempo y los estándares ocupados
- Códigos y espectros digitales de línea
- Circuitos usados en los sistemas de comunicaciones
- Sincronizadores de bit, de trama y de portadoras
- Software radio
- Multiplexión por división de frecuencia y los estándares manejados
- Sistemas de telecomunicaciones
- Sistemas de telefonía

- Sistemas de comunicaciones vía satélite
- Sistemas de radiodifusión vía satélite
- Temperatura efectiva de ruido de entrada y figura de ruido
- Análisis del balance de enlace
- SNR a la salida de los sistemas de comunicaciones analógicos
- BER para los sistemas de comunicaciones digitales
- Sistemas de fibra óptica
- Sistemas de espectro ensanchado
- Sistemas PCS y de telefonía celular por AMPS, GSM, iDEN, TDMA y CDMA
- Sistemas de televisión digitales y analógicos
- Estándares técnicos para AM, FM, TV, DTV y CATV
- Módems para datos por cable
- Redes inalámbricas Wi-Fi y Wi-Max
- Archivos MathCad en la Web (el sitio aparece más adelante)
- Archivos M de MATLAB en la Web (el sitio aparece más adelante)
- Tablas matemáticas
- Ejemplos de estudio
- Más de 550 problemas de tarea con respuestas selectas
- Más de 60 problemas de tarea con solución por computadora
- Amplias referencias
- □nfasis sobre el diseño de sistemas de comunicaciones
- *Manual de soluciones para el estudiante* (archivo de descarga, en inglés)

Muchas de las ecuaciones y problemas de tarea están marcados con un icono de una computadora, . Esto indica que soluciones por computadora en MATLAB y MathCad están disponibles para dicho problema o ecuación.

Los problemas de tarea aparecen al final de cada capítulo. El *manual de soluciones para el estudiante* de esta obra, disponible gratuitamente para su descarga (versión en inglés) en los sitios *www.pearson educacion.net/couch*, presenta soluciones para aproximadamente la tercera parte de los problemas, los cuales están marcados con una ★□archivos M para estudiantes también están disponibles para su descarga. El *Manual de soluciones para el profesor* (sólo disponible para profesores, en inglés) presenta soluciones completas para todos los problemas, incluyendo los que requieren solución por computadora. Estos manuales incluyen archivos Acrobat pdf para las soluciones escritas. De la misma manera se proporcionan archivos MathCad y M de MATLAB para los problemas con soluciones por computadora. Estos archivos se pueden descargar de la página para este texto en *www.pearsoneducacion.net/couch*.

Este libro surgió con la idea de rebasar mis enseñanzas en la University of Florida y está templado por mis experiencias como radioaficionado (K4GWQ). Considero que el lector no comprenderá el material técnico a menos que él o ella trabaje con algunos de los problemas de tarea. Consecuentemente, se han incluido más de 550 problemas. Algunos de ellos son fáciles para que un estudiante principiante no se sienta frustrado y otros son lo suficientemente difíciles como para presentar un reto a los alumnos más avanzados. Todos los problemas están diseñados para provocar el pensamiento y la comprensión de los sistemas de comunicaciones.

Agradezco la ayuda de las muchas personas que contribuyeron a este texto y a los muy útiles comentarios proporcionados por la gran cantidad de críticos a lo largo de los años, particularmente, Bruce A. Ferguson, Rose-Hulman Institute of Technology□Ladimer S. Nagurney, University of Hartford□□effrey Carruthers, Boston University y Hen-Geul □eh, California State University, Long Beach. También aprecio la ayuda de mis colegas de la University of Florida. Mi gratitud a mi esposa, la doctora Margaret Couch, quien participó desde el manuscrito original y su revisión, y verificó todas las páginas con correcciones.

LEON W. COUCH, II
Gainesville, Florida
couch@ufl.edu

SEMBLANZA DEL AUTOR

Leon W. Couch II nació en Durham, NC. Siempre interesado en la ingeniería eléctrica, adquirió experiencia como ingeniero de difusión en la escuela preparatoria. Se graduó de Duke University en 1963 con grado de B.S.E.E. e hizo estudios de maestría y doctorado en la University of Florida, ambos en ingeniería eléctrica. Fue seleccionado profesor asistente en la University of Florida en 1968 y profesor de tiempo completo en 1984. Desde 1990 hasta 2004 fungió como presidente asociado de Ingeniería Eléctrica y Computacional en la University of Florida.

La primera edición (en inglés) de *Sistemas de comunicación digitales y analógicos* se publicó en 1983.

LISTA DE SÍMBOLOS

No existen suficientes símbolos en el alfabeto español ni en el griego para permitir el uso de cada letra una sola vez. En consecuencia, algunos símbolos se utilizan para representar más de una entidad, pero su significado debe aclararse con el contexto bajo el cual se presentan. Aún más, los símbolos se seleccionan para que a menudo sean los mismos que los empleados en la disciplina matemática correspondiente. Por ejemplo, en el contexto de variables complejas, x representa la parte real de un número complejo (por ejemplo, $c = x + jy$), mientras que en el contexto de estadísticas, x puede representar una variable aleatoria.

Símbolos

a_n	una constante
a_n	coeficiente de una serie de Fourier en cuadratura
A_c	nivel de la señal modulada de una frecuencia de portadora f_c
A_e	área efectiva de una antena

b_n	coeficiente de una serie de Fourier en cuadratura
B	ancho de banda de banda base
B_p	ancho de banda de un filtro pasabanda
B_T	ancho de banda (pasabanda) de transmisión
c	un número complejo ($c = x + jy$)
c	una constante
c_n	un coeficiente de una serie de Fourier compleja
C	capacidad de canal
C	capacitancia
°C	grados Celsius
dB	decibel
D	dimensiones/s, símbolos/s ($D = N/T_0$) o velocidad en bauds
D_f	constante de ganancia de modulación por frecuencia
D_n	coeficiente de una serie de Fourier polar
D_p	constante de ganancia de modulación por fase
e	error
e	el número natural 2.7183
E	eficiencia de modulación
E	energía
$\mathscr{E}(f)$	densidad espectral de energía (ESD)
E_b/N_0	razón de energía por bit a densidad espectral de potencia de ruido
f	frecuencia (Hz)
$f(x)$	función de densidad de probabilidad (PDF)
f_c	frecuencia de la portadora
f_i	frecuencia instantánea
f_0	una constante (frecuencia)□a frecuencia fundamental de una forma de onda periódica
f_s	frecuencia de muestreo
F	figura de ruido
$F(a)$	función de distribución acumulativa (CDF)
$g(t)$	envolvente compleja
$\tilde{g}(t)$	envolvente compleja distorsionada
G	ganancia de potencia
$G(f)$	función de transferencia de potencia
h	constante de Planck, 6.63×10^{-34} joules
$h(t)$	repuesta al impulso de una red lineal
$h(x)$	función de asignación de x dentro de $h(x)$
H	entropía
$H(f)$	función de transferencia de una red lineal
i	un entero
I_j	información en el j-ésimo mensaje
j	el número imaginario $\sqrt{-1}$
j	un entero
k	constante de Boltzmann, 1.38×10^{-23} joule/K
k	un entero
$k(t)$	respuesta de impulso complejo de una red pasabanda
K	número de bits en una palabra binaria que representa un mensaje digital

K	grados Kelvin (°C + 273)
l	un entero
ℓ	número de bits por dimensión o bits por símbolo
L	inductancia
L	número de niveles permitidos
m	un entero
m	valor de la media
$m(t)$	forma de onda de mensaje (modulación)
$\tilde{m}(t)$	mensaje distorsionado (recibido con ruido)
M	un entero
M	número de mensajes permitidos
n	un entero
n	número de bits en un mensaje
$n(t)$	forma de onda del ruido
N	un entero
N	número de dimensiones utilizadas para representar un mensaje digital
N	potencia de ruido
N_0	nivel de la densidad espectral de potencia de ruido blanco
$p(t)$	una forma de onda de pulso absolutamente limitada por tiempo
$p(t)$	potencia instantánea
$p(m)$	función de densidad de probabilidad de modulación por frecuencia
P	potencia promedio
P_e	probabilidad de error en el bit
$P(C)$	probabilidad de una decisión correcta
$P(E)$	probabilidad de error de mensaje
$\mathcal{P}(f)$	densidad espectral de potencia (PSD)
$Q(z)$	integral de una función gaussiana
$Q(x_k)$	valor cuantificado del k-ésimo valor muestreado, x_k
$r(t)$	señal recibida con ruido
R	velocidad de datos (bits/s)
R	resistencia
$R(t)$	envolvente real
$R(\tau)$	función de autocorrelación
$s(t)$	señal
$\tilde{s}(t)$	señal distorsionada
S/N	relación potencia de señal a potencia de ruido
t	tiempo
T	un intervalo de tiempo
T	temperatura absoluta (Kelvin)
T_b	periodo de bit
T_e	temperatura efectiva de ruido de entrada
T_0	duración de un símbolo o mensaje transmitido
T_0	periodo de una forma de onda periódica
T_0	temperatura ambiental estándar (290 K)
T_s	periodo de muestreo
u_{11}	covarianza

$v(t)$	una forma de onda de voltaje
$v(t)$	una forma de onda pasabanda o un proceso aleatorio pasabanda
$w(t)$	una forma de onda
$W(f)$	espectro (transformada de Fourier) de $w(t)$
x	una entrada
x	una variable aleatoria
x	la parte real de una función compleja o de una constante compleja
$x(t)$	un proceso aleatorio
y	una salida
y	una variable aleatoria de salida
y	parte imaginaria de una función compleja o de una constante compleja
$y(t)$	un proceso aleatorio
α	una constante
β	una constante
β_f	índice de modulación por frecuencia
β_p	índice de modulación por fase
δ	tamaño de paso de una modulación delta
δ_{ij}	función delta de Kronecker
$\delta(t)$	impulso (función delta de Dirac)
ΔF	desviación pico de frecuencia (Hz)
$\Delta\theta$	desviación pico de fase
ϵ	una constante
ϵ	error
η	eficiencia espectral [(bits/segundo)/Hz]
$\theta(t)$	*fase de la* forma de onda
λ	variable temporal de integración
λ	longitud de onda
$\Lambda(r)$	radio de probabilidad
π	3.14159
ρ	coeficiente de correlación
σ	desviación estándar
τ	variable independiente de la función de autocorrelación
τ	ancho de pulso
$\varphi_j(t)$	función ortogonal
ϕ_n	coeficiente de una serie de Fourier polar
ω_c	frecuencia de portadora en radianes, $2\pi f_c$
$\equiv$	equivalencia matemática
$\triangleq$	definición matemática de un símbolo

FUNCIONES DEFINIDAS

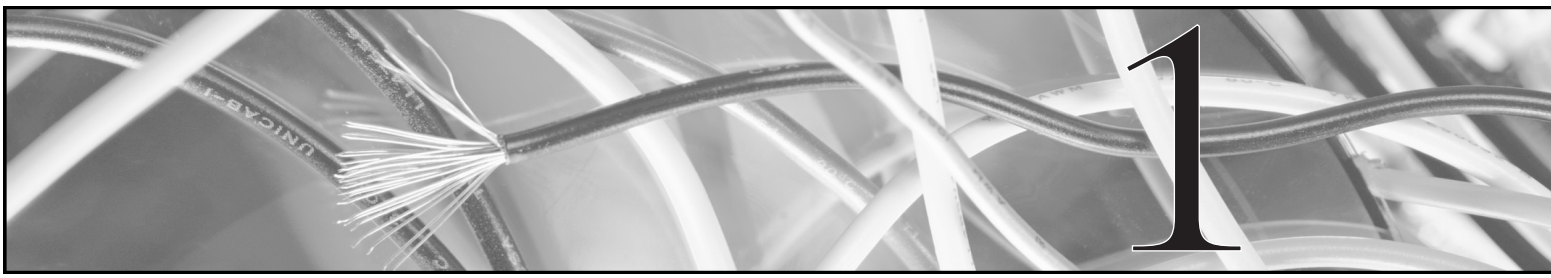
$J_n(\cdot)$	función de Bessel del primer tipo, n-ésimo orden
$\ln(\cdot)$	logaritmo natural
$\log(\cdot)$	logaritmo en base 10

$\log_2(\cdot)$	logaritmo en base 2
$Q(z)$	integral de una función de densidad de probabilidad gaussiana
$\mathrm{Sa}(z)$	$(\text{sen } z)/z$
$u(\cdot)$	función escalón unitario
$\Lambda(\cdot)$	función de triángulo
$\Pi(\cdot)$	función de rectángulo

NOMENCLATURA PARA OPERADORES

$\mathrm{Im}\{\cdot\square$	parte imaginaria de
$\mathrm{Re}\{\cdot\square$	parte real de
$\overline{[\cdot]}$	promedio conjunto
$\langle[\cdot]\rangle$	promedio de tiempo
$[\cdot] * [\cdot]$	convolución
$[\cdot]^*$	conjugado
$\angle[\cdot]$	operador de ángulo o el ángulo mismo, consulte la ecuación (2-108)
$\lvert[\cdot]\rvert$	valor absoluto
$\hat{[\cdot]}$	Transformada de Hilbert
$\mathcal{F}[\cdot]$	Transformada de Fourier
$\mathcal{L}[\cdot]$	Transformada de Laplace
$[\cdot] \cdot [\cdot]$	producto punto

Capítulo



1

INTRODUCCIÓN

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Cómo operan los sistemas de comunicación
- Asignaciones de frecuencias y características de propagación
- Soluciones por computadora (MATLAB y MATHCAD)
- Medición de la información
- Rendimiento de codificación

El estudio de los sistemas de comunicación es inmenso. Sería imposible abordar todos sus temas en un solo libro de extensión razonable. En esta obra están cuidadosamente seleccionados para enfatizar los principios básicos de la comunicación. Más aún, el lector encontrará la motivación para apreciar estos principios mediante el uso de muchas aplicaciones prácticas. A menudo se presentarán las aplicaciones prácticas antes de desarrollar los principios completamente. Esto confiere una "gratificación instantánea" y motiva al lector a aprender bien estos principios básicos. La meta es sentir la satisfacción de comprender cómo operan los sistemas de comunicación y desarrollar la habilidad para diseñar nuevos sistemas en esta área.

¿Qué es un sistema de comunicación?, ¿qué se entiende por ingeniería eléctrica y computacional (ECE, *electrical and computer engineering*)? La ECE está encargada de solucionar dos tipos de problemas: (1) la producción o transmisión de energía eléctrica y (2) la transmisión o procesamiento de información. *Los sistemas de comunicación están diseñados para transmitir información.*

Es importante entender que los sistemas de comunicación y los sistemas de energía eléctrica tienen un conjunto de restricciones muy marcadas. Las formas de onda en los sistemas de energía eléctrica son generalmente *conocidas*, además de que el interés radica en el diseño del sistema para que presente una *mínima pérdida de energía*.

Las formas de onda en los sistemas de comunicación presentes en el receptor (usuario) son *desconocidas* hasta que se reciben, de otra manera no se transmitiría información alguna ni habría

necesidad del sistema de comunicación. Se comunica más información al receptor cuando el usuario "se sorprende más" por el mensaje transmitido. Esto es, la transmisión de información implica la comunicación de mensajes desconocidos antes de tiempo (*a priori*).

El ruido restringe nuestra capacidad de comunicación. Si no existiera, podríamos comunicarnos electrónicamente más allá de los límites del universo utilizando una cantidad de potencia infinitamente pequeña. Esto ha sido obvio desde los primeros días de la radio. Sin embargo, la teoría que describe al ruido y su efecto en la transmisión de información no fue desarrollada sino hasta la década de 1940 por autores como D. O. North [1943], S. O. Rice [1944], C. E. Shannon [1948] y N. Wiener [1949].

Los sistemas de comunicación están diseñados para transmitir a los receptores información que contiene formas de onda. Existen muchas posibilidades de seleccionar formas de onda para presentar la información. Por ejemplo, ¿cómo se selecciona una forma de onda que represente la letra A en un mensaje mecanografiado? Depende de muchos factores, algunos de los cuales son el ancho de banda (el rango de frecuencias) y la frecuencia central de la forma de onda, la potencia o energía de la forma de onda y el costo de su generación en el transmisor, y la detección de la información en el receptor.

Este texto está dividido en ocho capítulos y tres apéndices. El capítulo 1 introduce algunos conceptos clave, como el de información, y presenta un método para evaluar la capacidad de información en un sistema de comunicación. El capítulo 2 cubre las técnicas básicas para obtener el ancho de banda del espectro y la potencia de formas de onda. El 3 estudia las formas de onda de banda base (con frecuencias cercanas a $f = 0$), y los capítulos 4 y 5 examinan las formas de onda de pasabanda (frecuencias en alguna banda no cercana a $f = 0$). Los capítulos 6 y 7 abordan el efecto del ruido en la selección de una forma de onda. El 8 enfatiza casos de estudio sobre comunicación alámbrica e inalámbrica, incluyendo sistemas personales de comunicación (PCS por sus siglas en inglés). Los apéndices ofrecen tablas matemáticas, un curso breve sobre probabilidad y variables aleatorias, así como una introducción a MATLAB. Cada capítulo incluye también los estándares más apropiados para los sistemas de comunicación. La computadora personal se utiliza como herramienta para graficar formas de onda, calcular espectros de formas de onda y analizar y diseñar sistemas de comunicación.

En resumen, los sistemas de comunicación están diseñados para transmitir información. Los diseñadores de sistemas de comunicación tienen cuatro intereses principales:

1. La selección de la forma de onda que contendrá la información.
2. El ancho de banda y la potencia de la forma de onda.
3. El efecto del ruido en la información recibida.
4. El costo del sistema.

1-1 UNA PERSPECTIVA HISTÓRICA

La tabla 1-1 presenta un bosquejo del desarrollo cronológico de la comunicación. Se invita al lector a dedicar algún tiempo al estudio de esta tabla y así apreciar la historia de la comunicación. Note que a pesar de que el teléfono fue desarrollado a finales del siglo XIX, el primer cable telefónico trasatlántico no se completó sino hasta el año 1954. Antes de esta fecha, las llamadas trasatlánticas se realizaban a través de radio de onda corta. De la misma manera, aunque los ingleses iniciaron la difusión televisiva en 1936, el envío trasatlántico de televisión no fue posible sino hasta 1962, cuando

TABLA 1–1 FECHAS IMPORTANTES EN LA COMUNICACIÓN

Año		Evento
Antes de	3000 A.C.	Los egipcios desarrollan un lenguaje pictórico basado en *jeroglíficos*.
	800 D.C.	Los árabes adoptan de la India nuestro sistema numérico actual.
	1440	Johannes Gutenberg inventa el tipo metálico movible.
	1752	El cometa de Benjamín Franklin demuestra que un relámpago es electricidad.
	1827	Georg Simon Ohm formula su ley ($I = E/R$).
	1834	Carl F. Gauss y Ernst H. Weber construyen el telégrafo electromagnético.
	1838	William F. Cooke y sir Charles Wheatstone construyen el telégrafo.
	1844	Samuel F. B. Morse muestra la línea de telégrafo en Baltimore, MD y Washington, DC.
	1850	Gustav Robert Kirchhoff publica por primera vez sus leyes para circuitos.
	1858	Se establece el primer cable trasatlántico y falla 26 días después.
	1864	James C. Maxwell predice la radiación electromagnética.
	1871	La Society of Telegraph Engineers se establece en Londres.
	1876	Alexander Graham Bell desarrolla y obtiene una patente para el teléfono.
	1883	Thomas A. Edison descubre el flujo de electrones en vacío, conocido como el "efecto Edison", el cual es la base del tubo de electrones.
	1884	Se forma el American Institute of Electrical Engineers (AIEE).
	1887	Henrich Hertz verifica la teoría de Maxwell.
	1889	El Institute of Electrical Engineers (IEE) se forma a partir de la Society of Telegraph Engineers, en Londres.
	1894	Oliver Lodge logra la comunicación inalámbrica sobre una distancia mayor a los 137 metros.
	1900	Guglielmo Marconi transmite la primera señal inalámbrica trasatlántica.
	1905	Reginald Fessenden transmite voz y música a través de la radio.
	1906	Lee deForest inventa el amplificador de tríodos de tubo de vacío.
	1907	La Society of Wireless Telegraph Engineers se forma en Estados Unidos.
	1909	El Wireless Institute es establecido en Estados Unidos.
	1912	El Institute of Radio Engineers (IRE) se forma en Estados Unidos a partir de la Society of Wireless Telegraph Engineers y del Wireless Institute.
	1915	Bell System completa una línea telefónica transcontinental en Estados Unidos.
	1918	Edwin H. Armstrong inventa el circuito heterodino de recepción superheterodino.
	1920	KDKA, Pittsburgh, PA, inicia las primeras transmisiones programadas de radio.
	1920	J. R. Carson aplica la técnica de muestreo en la comunicación.
	1923	Vladimir K. Zworkykin concibe el tubo para transmisión televisiva de "iconoscopio".
	1926	J. L. Baird (Inglaterra) y C. F. Jenkins (Estados Unidos) realizan demostraciones de la televisión.
	1927	La Federal Radio Commission es creada en Estados Unidos.
	1927	Harold Black desarrolla el amplificador de realimentación negativa en Bell Laboratories.
	1928	Philo T. Farnsworth muestra el primer sistema de televisión completamente electrónico.
	1931	Se inicia el servicio de teletipo.
	1933	Edwin H. Armstrong inventa la FM.
	1934	La Federal Communication Commission (FCC) es creada en Estados Unidos a partir de la Federal Radio Commission.
	1935	Robert A. Watson-Watt desarrolla el primer radar práctico.
	1936	La British Broadcasting Corporation (BBC) empieza las primeras transmisiones televisivas.
	1937	Alex Reeves concibe la modulación de código de pulsos (PCM).

TABLA 1–1 *(continuación)*

Año	Evento
1941	□ohn V. Atanasoff inventa la computadora digital en el Iowa State College.
1941	La FCC autoriza la transmisión televisiva en Estados Unidos.
1945	□ohn W. Mauchly desarrolla la computadora electrónica digital ENIAC en la University of Pennsylvania.
1947	Walter H. Brattain, □ohn Bardeen y William Shockley conciben el transistor en Bell Laboratories.
1947	Steve O. Rice desarrolla una representación estadística para el ruido en Bell Laboratories.
1948	Claude E. Shannon publica su estudio acerca de la teoría de la información.
1950	La multiplexión por división de tiempo se aplica a la telefonía.
1950s	Se desarrollan el teléfono y los enlaces de comunicación en microondas.
1953	Se introduce la televisión a colores NTSC en Estados Unidos.
1953	Se establece el primer cable telefónico trasatlántico (36 canales de voz).
1957	La antigua URSS lanza el primer satélite terrestre, *Sputnik I*.
1958	A. L. Schawlow y C. H. Townes publican los principios del láser.
1958	□ack Kilby, de Texas Instruments, construye el primer circuito integrado (IC) de germanio.
1958	Robert Noyce, de Fairchild, produce el primer IC de silicón.
1961	Inician las transmisiones en FM en Estados Unidos.
1962	El primer satélite activo, *Telstar I*, transmite señales televisivas entre Estados Unidos y Europa.
1963	Bell Systems introduce el teléfono de teclas.
1963	El *Institute of Electrical and Electronic Engineers (IEEE)* se forma a partir de la unión del IRE y el AIEE.
1963-66	Se desarrollan los códigos de corrección de errores y la ecualización capaz de adaptación para la comunicación digital de alta velocidad libre de errores.
1964	Se pone en marcha el sistema electrónico conmutado de teléfono (No. 1 ESS).
1965	Se pone en servicio el primer satélite comercial de comunicación, *Early Bird*.
1968	Se desarrollan los sistemas de televisión por cable.
1971	Intel Corporation desarrolla el primer microprocesador de una sola tarjeta, el 4004.
1972	Motorola presenta el teléfono celular a la FCC.
1976	Se desarrollan las computadoras personales.
1979	La memoria de acceso aleatorio de 64 kb marca la era de los circuitos integrados de gran escala (VLSI).
1980	Se desarrolla la comunicación por fibra óptica FT3, de Bell System.
1980	Philips y Sony desarrollan el disco compacto.
1981	Se introduce la IBM PC.
1982	AT□T accede a desprenderse de sus 22 compañías telefónicas Bell System.
1984	Apple introduce la computadora Macintosh.
1985	Se generaliza el uso de las máquinas de fax.
1989	Se desarrolla el sistema de posicionamiento global (GPS) utilizando satélites.
1995	Se populariza el uso de Internet y de la World Wide Web.
2000-presente	Llega la era del procesamiento de señales digitales mediante microprocesadores, osciloscopios digitales, receptores sintonizados digitalmente, computadoras personales con operaciones en el orden de megaflops, sistemas de espectro ensanchado, sistemas digitales satelitales, televisión digital (DTV) y sistemas personales de comunicación (PCS).

el satélite *Telstar I* fue puesto en órbita. Los sistemas digitales de transmisión —representados por los sistemas de telegrafía— fueron desarrollados en la década de 1850 antes que los sistemas analógicos –el teléfono— en el siglo XX. En la actualidad, la transmisión digital se está convirtiendo en la técnica preferida.

1–2 FUENTES Y SISTEMAS DIGITALES Y ANALÓGICOS

DEFINICIÓN. Una *fuente digital de información* produce un conjunto finito de mensajes posibles..

Las teclas de un teléfono digital son un buen ejemplo de una fuente digital. Existe un número finito de caracteres (mensaje) que esta fuente puede emitir.

DEFINICIÓN. Una *fuente analógica de información* produce mensajes que están definidos dentro de un espacio continuo.

Un micrófono es un buen ejemplo de una fuente analógica. El voltaje de salida describe la información en el sonido y se distribuye a través de un rango continuo de valores.

DEFINICIÓN. Un *sistema de comunicación digital* transfiere información de una fuente digital al receptor adecuado (también conocido como el receptor).

DEFINICIÓN. Un *sistema* analógico *de comunicación* transfiere información de una fuente digital a un receptor.

De modo estricto, una *forma de onda digital* se define como una función de tiempo que puede tener sólo un conjunto discreto de valores de amplitud. Si la forma de onda digital es binaria, sólo se permiten dos valores. Una *forma de onda* analógica es una función de tiempo que posee un rango continuo de valores.

Un sistema electrónico *digital* de comunicación a menudo cuenta con formas de onda para el voltaje y la corriente, que tienen valores digitales□sin embargo, también *puede* contar con formas de onda analógicas. Por ejemplo, la información de una fuente binaria puede transmitirse al receptor mediante el uso de una onda senoidal de 1,000 Hz para representar el valor binario 1 y una onda senoidal de 500 Hz para representar el valor binario 0. En este caso la información de la fuente digital se transmite al receptor mediante formas de onda analógicas, pero el sistema sigue siendo un sistema de comunicación digital. Desde este punto de vista, un ingeniero en comunicación *digital* necesita saber cómo analizar tanto circuitos analógicos como digitales.

La comunicación digital concede un número de ventajas:

- Se pueden utilizar circuitos digitales relativamente económicos.
- Se mantiene la privacidad mediante el uso de encripción de datos.
- Es posible obtener un mayor rango dinámico (la diferencia entre el valor más grande y el más pequeño).
- Los datos de fuentes de voz y video pueden unirse y ser transmitidos sobre un sistema digital común de transmisión.
- El ruido no se acumula de repetidor a repetidor en sistemas de larga distancia.
- Los errores detectados en los datos pueden ser pocos, aun cuando exista una gran cantidad de ruido en la señal recibida.
- Los errores pueden a menudo corregirse mediante el uso de codificación.

La comunicación digital también presenta desventajas:

- Generalmente se requiere de un mayor ancho de banda en comparación con los sistemas analógicos.
- Se necesita sincronización.

Las ventajas de los sistemas digitales de comunicación comúnmente exceden sus desventajas, por lo que se están volviendo dominantes.

1–3 FORMAS DE ONDA DETERMINÍSTICAS Y ALEATORIAS

Dos clases generales de formas de onda son de importancia en los sistemas de comunicación: deterministas y aleatorias (o estocásticas).

DEFINICIÓN. Una *forma de onda determinística* puede modelarse como una función de tiempo completamente especificada.

Por ejemplo, si

$$w\ (t) = A \cos\ (\omega_0\ t + \varphi_0) \tag{1–1}$$

describe una forma de onda, donde A, ω_0 y φ_0 son constantes conocidas, se dice que esta forma de onda es determinística debido a que para cada valor de t, el valor de $w(t)$ puede evaluarse. Si cualquiera de las constantes es desconocida, entonces el valor de $w(t)$ no puede calcularse y, por consecuencia, $w(t)$ no es determinística.

DEFINICIÓN. Una *forma de onda aleatoria* (o estocástica) no se puede especificar completamente como una función de tiempo y debe modelarse probabilísticamente.[1]

Esto presenta inmediatamente un dilema al analizar sistemas de comunicación. Las formas de onda que representan a la fuente no pueden ser deterministas. Por ejemplo, en un sistema de comunicación digital, puede enviarse información correspondiente a cualesquier letra del alfabeto español. Cada letra puede representarse mediante una forma de onda determinística, pero cuando se examine la forma de onda emitida por la fuente se encuentra que es aleatoria, ya que no se sabe exactamente qué caracteres se transmitirán. Por consiguiente, se necesita diseñar el sistema de comunicación utilizando una forma de onda de señal aleatoria. El ruido también puede ser descrito por una forma de onda aleatoria. Esto requiere del uso de conceptos de probabilidad y estadística (cubiertos en los capítulos 6 y 7) que complican el procedimiento de análisis y diseño. Sin embargo, si representamos la forma de onda de la señal mediante una forma de onda determinista "típica" se puede obtener la mayoría de los resultados esperados, aunque no todos. Los primeros cinco capítulos de este libro se enfocan en esto.

1–4 ORGANIZACIÓN DE ESTE LIBRO

Los capítulos del 1 al 5 utilizan un enfoque determinístico para el análisis de los sistemas de comunicación, lo que permite al lector captar algunos conceptos importantes sin las complicaciones presentadas por el análisis estadístico. Esto también ayuda a quien no está familiarizado con conceptos estadísticos a comprender elementos básicos de los sistemas de comunicación. No obstante, el tema importante sobre el rendimiento de los sistemas de comunicación bajo presencia de ruido no puede

[1] El capítulo 6 presenta una definición más completa de forma de onda aleatoria, también conocida como proceso aleatorio.

analizarse sin la ayuda de estadísticas. Estos tópicos están cubiertos en los capítulos 6 y 7, así como en el apéndice B.[2] El capítulo 8 presenta casos prácticos de estudio tratando con sistemas alámbricos e inalámbricos de comunicación.

Este texto está diseñado para ser agradable al lector. Al final de cada capítulo se incluyen varios problemas con soluciones abreviadas para facilitar el trabajo de los estudiantes. Además, se utiliza la computadora personal (PC) para resolver problemas de forma apropiada. También está disponible un *manual de soluciones para el estudiante* como descarga gratis en http://www.pearsoneducacion.net/couch. Este sitio contiene archivos PDF con la solución completa para aquellos problemas de tarea marcados con una ★ al final de cada capítulo.

Este libro es útil como fuente de referencia para matemáticas (apéndice A), estadísticas (apéndice B y capítulo 6) y MATLAB (apéndice C)□sirve además como un listado de referencia de los estándares de sistemas de comunicación que han sido adoptados (capítulos 3, 4, 5 y 8).

La comunicación es un área de trabajo apasionante. Se invita al lector a consultar el capítulo 8, enfocándose en el estudio de los sistemas alámbricos e inalámbricos. Para aprender más acerca de cómo son aplicados los sistemas de comunicación y para ejemplos de circuitos que el lector puede construir, se puede consultar o adquirir una edición reciente del *ARRL Handbook* [por ejemplo, ARRL, 2004].

1-5 USO DE UNA COMPUTADORA PERSONAL Y MATLAB

Este texto está diseñado de tal manera que se pueda utilizar una PC como herramienta para graficar formas de onda□para calcular espectros (utilizando la transformada rápida de Fourier)□la evaluación de integrales□y, en general, como ayuda al lector para que entienda, analice y diseñe sistemas de comunicación. MATLAB fue seleccionado como el lenguaje de programación debido a que es muy eficiente en estas tareas. Para un breve resumen de conceptos de programación en MATLAB consulte el apéndice C-2 (“Programación en MATLAB”).

Para resolver un problema utilizando MATLAB, primero se ejecuta en la PC el programa de MATLAB, que es un programa interpretativo. Esto es, los resultados se calculan después de capturar cada línea de código. Existe la opción de capturar sentencias en MATLAB una línea a la vez para una ejecución inmediata o, como alternativa, MATLAB puede llamar y ejecutar un archivo script que contenga sentencias de código en dicho lenguaje. El archivo de texto o script también se conoce como archivo.M, ya que el nombre del archivo es del formato xxxx.M. El método de archivos .m se utiliza a menudo para aquellos programas con más de un par de líneas de código. Los archivos.m pueden crearse a través del editor de texto de MATLAB o cualquier otro editor, tal como el Notepad (al correr bajo Windows en la PC).

Se proporcionan archivos .m para la solución de algunas ecuaciones selectas y para problemas de estudio. Las ecuaciones selectas están marcadas por un símbolo de una PC ( ). También se presentan archivos .m de MATLAB para los problemas de tarea con solución por computadora que están marcados por una ★. Los archivos .m pueden descargarse por la World Wide Web desde los sitios de Internet

http://www.pearsoneducacion.net/couch

También estará disponible en estos sitios Web una fe de erratas para este libro.

[2] El apéndice B abarca el tema de probabilidad y variables aleatorias y es un capítulo completo por sí mismo. Esto permite al lector que no haya cursado la materia aprender sobre este tema antes de estudiar los capítulos 6 y 7.

Asimismo, están disponibles archivos modelo para MATHCAD en las fuentes mencionadas anteriormente. [Archivos adicionales para MATLAB y MATHCAD para todos los problemas de tarea marcados por el símbolo de PC ( ) estarán disponibles para el instructor e incluidos en el *Manual de soluciones para el instructor*.(en inglés)] Consulte el apéndice C-1 ("Guía rápida para la ejecución de archivos .m") para instrucciones sobre la ejecución de los archivos .m. Como ejemplo, ejecute el archivo *e1_006.m*, el cual calcula los resultados para la ecuación (1-6) en este capítulo. *Table 2_3.m* es el archivo .m mostrado en la tabla 2-3 y produce las gráficas en MATLAB presentadas en la figura 2-21.

1-6 DIAGRAMA DE BLOQUES DE UN SISTEMA DE COMUNICACIÓN

La figura 1-1 muestra un diagrama de bloques mediante el cual pueden describirse los sistemas de comunicación. Independientemente de cuál sea la aplicación en particular, todos los sistemas de comunicación involucran tres subsistemas principales: el *transmisor*, el *canal* y el *receptor*. A lo largo de este libro se utilizarán los símbolos indicados en este diagrama para evitar la confusión al lector sobre dónde se ubica cada señal en el sistema completo. El mensaje de la fuente está representado por la forma de onda de información de entrada $m(t)$. El mensaje entregado por el receptor utiliza la notación $\tilde{m}(t)$. La [$\sim$] indica que el mensaje recibido puede no ser el mismo que fue transmitido. Esto es, el mensaje en el receptor, $\tilde{m}(t)$, puede distorsionarse por el ruido en el canal, o pueden existir otros impedimentos en el sistema como un filtro indeseado o características no lineales indeseadas. La información en el mensaje puede ser analógica o digital, dependiendo del sistema en particular, y puede representar información de audio, de video o de algún otro tipo. En los sistemas multiplexados pueden existir múltiples fuentes de entrada y salida, así como drenajes. Los espectros (o frecuencias) de $m(t)$ y $\tilde{m}(t)$ están concentradas alrededor de $f = 0$ por consecuencia, éstas se consideran señales de *banda base*.

El bloque de procesamiento de señal en el transmisor condiciona a la fuente para que ésta genere una transmisión más eficiente. Por ejemplo, en un sistema analógico el procesador de señal puede ser un filtro pasabajo que restringe el ancho de banda de $m(t)$. En un sistema híbrido, el procesador de señal puede ser un convertidor analógico a digital (ADC), el cual produce una "palabra digital" que representa muestras de la señal analógica de entrada (descrito en el capítulo 3 en la sección sobre modulación por código de pulsos). En este caso, el ADC en el procesador de señal provee una *codificación de fuente* de la señal de entrada. Aún más, el procesador de señal puede añadir bits de paridad a la palabra digital para suministrar una *codificación de canal* tal que el procesador de señal en el receptor pueda utilizar la detección y corrección de errores para reducir o eliminar errores de bit causados por el ruido en el canal. La señal a la salida del procesador de señal en el transmisor es una señal de banda base, ya que contiene frecuencias concentradas alrededor de $f = 0$.

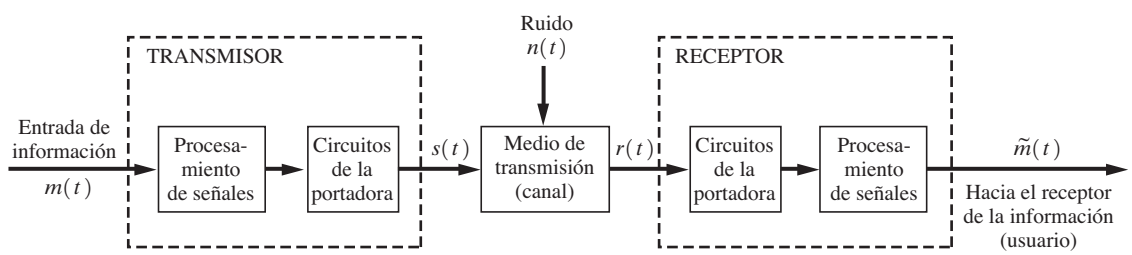


Figura 1–1 Un sistema de comunicación.

El circuito de la portadora en el transmisor convierte la señal de banda base procesada a una banda de frecuencias apropiada para el medio de transmisión del canal. Por ejemplo, si el canal es un cable de fibra óptica, los circuitos de portadora convierten la entrada de banda base (o sea, las frecuencias cercanas a $f = 0$) a frecuencias de luz y la señal transmitida, $s(t)$, es luz. Si el canal propaga señales de banda base, los circuitos de portadora son innecesarios y por tanto $s(t)$ puede ser la salida del circuito de procesamiento en el transmisor. Los circuitos de portadora son requeridos cuando el canal de transmisión está ubicado en una banda de frecuencias alrededor de $f_c \gg 0$. (El subíndice denota una frecuencia "de portadora", por el nombre en inglés de *carrier*.) En este caso, $s(t)$ resulta ser una señal *pasabanda*, ya que está diseñada para poseer frecuencias ubicadas en una banda alrededor de f_c. Por ejemplo, una estación radiodifusora por amplitud modulada (AM) con una frecuencia asignada de 850 kHz tiene un frecuencia de portadora de $f_c = 850$ kHz. El mapeo de la forma de onda de información de entrada de banda base $m(t)$ a una señal pasabanda se conoce como *modulación*. [$m(t)$ es la señal de audio en la radiodifusión por AM.] En el capítulo 4 se mostrará que cualquier señal pasabanda tiene la forma

$$s(t) = R(t) \cos\ [\omega_c\ t + \theta(t)] \tag{1–2}$$

donde $\omega_c = 2\pi f_c$. Si $R(t) = 1$ y $\theta(t) = 0$, entonces $s(t)$ sería una senoidal pura con frecuencia $f = f_c$ con un ancho de banda de *cero*. En el proceso de modulación proporcionado por los circuitos de portadora, la forma de onda de entrada de banda base $m(t)$ causa que $R(t)$ o $\theta(t)$ o ambas cambien como una función de $m(t)$. Estas fluctuaciones en $R(t)$ y $\theta(t)$ originan que $s(t)$ tenga un ancho de banda diferente a cero que depende de las características de $m(t)$ y de las funciones de mapeo utilizadas para generar $R(t)$ y $\theta(t)$. En el capítulo 5 se presentan ejemplos prácticos tanto de señalización digital como analógica para señales pasabanda.

Los canales pueden clasificarse en dos categorías: alámbricos e inalámbricos. Algunos ejemplos de canales *alámbricos* son las líneas telefónicas de par trenzado, los cables coaxiales, guías de onda y cables de fibra óptica. Algunos canales *inalámbricos* típicos son el aire, el vacío y el agua de mar. Note que los principios generales de la modulación digital y analógica se aplican a todos los tipos de canales aun cuando las características de cada canal impongan restricciones que favorecen un tipo particular de señalización. En general, el medio del canal atenúa la señal de manera tal que el ruido del canal o el que introduce un receptor imperfecto causa un deterioro en la información enviada $\tilde{m}$ en comparación con aquella de la fuente. El ruido del canal puede originarse por perturbaciones eléctricas naturales (tales como el relampagueo) o por fuentes artificiales, por ejemplo las líneas de transmisión de alto voltaje, los sistemas de ignición de automóviles o circuitos de conmutación de una computadora digital cercana. El canal puede contener dispositivos amplificadores activos, como los repetidores en sistemas telefónicos o transpondedores satelitales en sistemas de comunicación espacial.

El canal puede también proveer *múltiples trayectorias* entre su salida y su entrada. Esto puede ser causa de que la señal rebote con múltiples reflectores. Esta *múltiple trayectoria* puede ser descrita aproximadamente a través de dos parámetros: por un despliegue de los tiempos de propagación o una dispersión en el espectro Doppler. El despliegue de los tiempos de propagación está causado por trayectorias múltiples de varias longitudes, lo cual provoca que un pulso corto transmitido se propague sobre el tiempo en la salida del canal debido a la combinación de los pulsos recibidos con los diferentes retrasos de las múltiples trayectorias. Los distintos movimientos de los variados reflectores con múltiples trayectorias causan que los pulsos recibidos tengan diferentes desplazamientos de su frecuencia Doppler tal que exista una dispersión en dichos desplazamientos en los distintos componentes de la señal combinada recibida. Si los reflectores con múltiples trayectorias se mueven lentamente y, más aún, aparecen y desaparecen, entonces la señal recibida se desvanecerá debido a que las señales individuales recibidas se cancelarán una a otra (cuando la señal combinada recibida se desvanece). Quizá usted ha escuchado este efecto de desvanecimiento en una estación lejana de radio AM recibida en horas nocturnas. (Las señales recibidas a dichas horas de estaciones lejanas de AM son señales de *onda ionosférica*, definidas en la sección 1-8.)

El receptor toma la señal distorsionada a la salida del canal y la convierte a una señal de banda base que el procesador de banda base en el receptor puede manipular. Éste "limpia" esta señal y envía una estimación de la información fuente $\tilde{m}(t)$ a la salida del sistema de comunicación.

La meta es el desarrollo de sistemas de comunicación que transmitan información al receptor con el mínimo deterioro posible, al tiempo que se satisfacen las restricciones del diseño como la energía transmitida permitida, el ancho de banda permitido para cada señal y el costo. En los sistemas digitales, la medición del deterioro a menudo se toma como la *probabilidad de error en el bit* (P_e), también conocida como la *tasa de error en el bit* (BER), de los datos entregados $\tilde{m}$. En los sistemas analógicos, la medición del rendimiento generalmente se considera como la relación de señal a ruido en la salida del receptor.

1-7 ASIGNACIONES DE FRECUENCIAS

Los sistemas inalámbricos de comunicación a menudo utilizan la atmósfera como canal de transmisión. En este caso, la interferencia y las condiciones de propagación dependen severamente de la frecuencia de transmisión. En teoría, cualquier tipo de modulación (modulación de amplitud, modulación de frecuencia, banda lateral única, modulación por desplazamiento de fase, modulación por desplazamiento de frecuencia, etc.) puede utilizarse en cualquier frecuencia de transmisión. Sin embargo, para presentar una semblanza de orden y para minimizar la interferencia, las regulaciones gubernamentales especifican el tipo de modulación, ancho de banda, potencia y el tipo de información que un usuario puede transmitir sobre bandas de frecuencia designadas.

La International Telecommunications Union (ITU) establece mundialmente las distribuciones de frecuencias y los estándares técnicos. Se trata de una agencia especializada de las Naciones Unidas cuyas oficinas administrativas principales están en Ginebra, Suiza, con un personal de cerca de 700 empleados (visite http://www.itu.ch). Dicho personal tiene la responsabilidad de administrar los acuerdos que han sido ratificados por las cerca de 200 naciones miembros de la ITU. El organismo está estructurado en tres sectores. El Sector de Radiocomunicaciones (ITU-R) suministra las distribuciones de frecuencia y a él concierne el uso eficiente del espectro de radiofrecuencia. La Sección de Estandarización de Telecomunicaciones (ITU-T) examina las cuestiones técnicas, de operación y de tarifas. También recomienda estándares globales para las redes públicas de telecomunicación (PTN) y los sistemas de radio relacionados. El Sector de Desarrollo de Telecomunicaciones (ITU-D) provee asistencia técnica, especialmente a los países en desarrollo. Esta asistencia procura que una amplia gama del servicio de telecomunicación sea económicamente provista e integrada al sistema global de telecomunicación. Antes de 1992, la ITU estaba organizada en dos sectores principales: el Comité Consultivo Internacional de Telegrafía y Telefonía (CCITT, por sus siglas en inglés) y el Comité Consultivo Internacional de Radio (CCIR, por sus siglas en inglés).

Cada miembro de la ITU tiene soberanía sobre el uso espectral y los estándares adoptados bajo su territorio. Sin embargo, se espera que cada nación se apegue al plan y estándares internacionales de frecuencia adoptados por la ITU. A menudo cada país establece una agencia responsable de la administración de las asignaciones de radiofrecuencia dentro de sus fronteras. En Estados Unidos, la Comisión Federal de Comunicaciones (FCC, por sus siglas en inglés) regula y otorga licencias de sistemas de radio al público en general, así como a los gobiernos locales y estatales (visite http://www.fcc.gov). Además de esto, la Administración Nacional de Telecomunicación e Información (NTIA, por sus siglas en inglés) tiene la responsabilidad de la asignación de frecuencias al gobierno y fuerza militar estadounidenses. Las asignaciones internacionales de frecuencias están divididas en subbandas por la FCC para abarcar 70 categorías de servicios y 9 millones de transmisores. La tabla 1-2 presenta un listado general de bandas de frecuencia, sus designaciones comunes, condiciones típicas de propagación y los servicios comunes asignados a dichas bandas.

TABLA 1–2 BANDAS DE FRECUENCIA

Banda de frecuencia[a]	Designación	Características de propagación	Usos comunes
3–30 kHz	Muy baja frecuencia (VLF)	Onda terrestre□baja atenuación día y noche□alto nivel de ruido atmosférico	Navegación de largo alcance□ comunicación submarina
30–300 kHz	Baja frecuencia (LF)	Semejante a VLF, un poco menos confiable□absorción durante el día	Navegación de largo alcance y radiobalizas para comunicación marina
300–3000 kHz	Media frecuencia (MF)	Onda terrestre y onda celeste nocturna□baja atenuación de noche y alta durante el día□ruido atmosférico	Radio marítima, detección direccional y difusión por AM
3–30 Mhz	Alta frecuencia (HF)	La reflexión ionosférica varía con la hora del día, la temporada y la frecuencia□ bajo ruido atmosférico a 30 MHz	Radio de aficionado□difusión internacional, comunicación militar, comunicación de larga distancia para aeronaves y barcos, telefonía, telegrafía, comunicación por fax
30–300 MHz	Muy alta frecuencia (VHF)	Propagación de casi de línea de vista (LOS), con dispersión debido a la inversión de temperatura, ruido cósmico	Televisión VHF, radio bidireccional de FM, comunicación en AM para aeronaves, auxilio de navegación de aeronaves
0.3–3 GHz	Ultraalta frecuencia (UHF)	Propagación de LOS, ruido cósmico	Televisión UFH, telefonía celular, auxilio de navegación, radar, GPS, enlaces microonda, sistemas personales de comunicación
	Letra de designación		
1.0–2.0	L		
2.0–4.0	S		
3–30 GHz	Superalta frequencia (SHF)	Propagación de LOS□ atenuación por precipitación arriba de 10 GHz, atenuación atmosférica debido al oxígeno y vapor de agua, alta absorción de vapor de agua a 22.2 GHz	Comunicación por satélite, enlaces microonda de radar
	Letra de designación		
2.0–4.0	S		
4.0–8.0	C		
8.0–12.0	X		
12.0–18.0	Ku		
18.0–27.0	K		
27.0–40.0	Ka		
26.5–40.0	R		
30–300 GHz	Extremadamente alta frecuencia (EHF)	Igual□alta absorción de vapor de agua a 183 GHz y absorción de oxígeno a 60 y 119 GHz	Radar, satélite, experimental

[a] kHz = 10^3 Hz□MHz = 10^6 Hz□GHz = 10^9 Hz.

TABLA 1–2 BANDAS DE FRECUENCIA *(conclusión)*

Banda de frecuencia[a]	Designación	Características de propagación	Usos comunes
	Letra de designación		
27.0–40.0	Ka		
26.5–40.0	R		
33.0–50.0	Q		
40.0–75.0	V		
75.0–110.0	W		
110–300	mm (milímetro)		
10^3–10^7 GHz	Infrarrojo, luz visible y ultravioleta	Propagación de LOS	Comunicaciones ópticas

[a] kHz = 10^3 Hz□MHz = 10^6 Hz□GHz = 10^9 Hz.

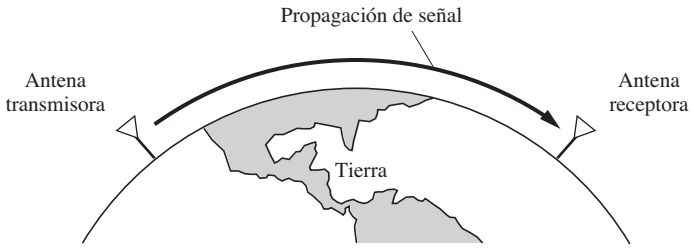
Para una presentación detallada de las distribuciones de frecuencia actuales en Estados Unidos visite http://www.ntica.doc.gov/osmhome/allochrt.html.

1-8 PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

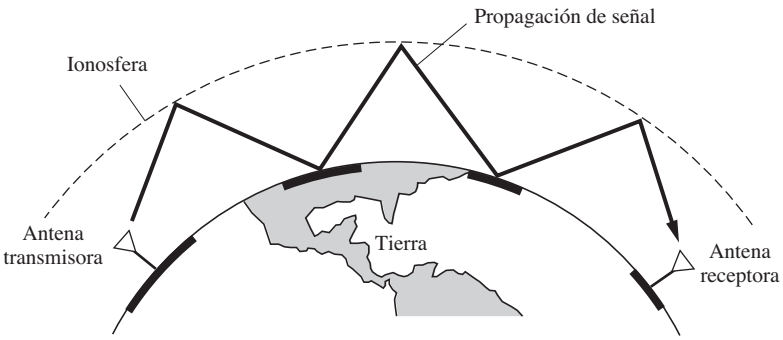
Las características de propagación de las ondas electromagnéticas utilizadas en los canales inalámbricos son altamente dependientes de la frecuencia. La tabla 1-2 ilustra esta situación, donde se asignan frecuencias al usuario que poseen las características de propagación adecuadas para la cobertura necesaria. Las características de propagación resultan de los cambios en la velocidad en las ondas de radio como una función de la altitud y las condiciones limitantes. La velocidad de onda depende de la temperatura aérea, la densidad en el aire y los niveles de ionización aéreos.

La ionización (electrones libres) del aire en grandes altitudes tiene un efecto dominante en la propagación de ondas en las bandas de media (MF) y alta frecuencia (HF). La ionización se origina por la radiación ultravioleta del Sol, así como por los rayos cósmicos. Por consiguiente, la cantidad de ionización es una función de la hora del día, la temporada del año y la actividad del Sol (manchas solares). Esto resulta en varias capas con distinta densidad de ionización ubicadas a varias alturas alrededor de la Tierra.

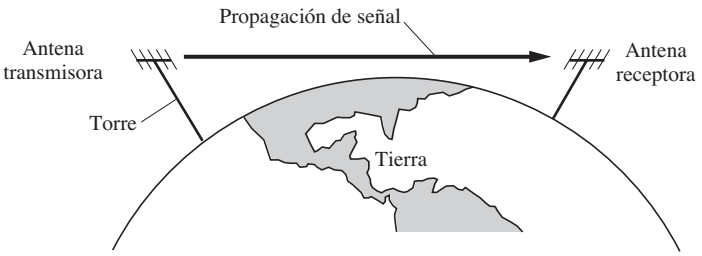
Las regiones ionizadas dominantes son las capas D, E, F_1 y F_2. La capa D es la más cercana a la superficie terrestre, a una altitud de aproximadamente 45 o 55 millas. Para $f > 300$ kHz, la capa D actúa como una esponja de radiofrecuencia (RF) que absorbe (o atenúa) dichas ondas de radio. La atenuación es inversamente proporcional a la frecuencia y se reduce para frecuencias por encima de 4 MHz. Para $f < 300$ kHz, la capa D provoca refracción (flexión) de ondas de RF. La capa D es la más pronunciada durante las horas diurnas, con una ionización máxima cuando el Sol está en su punto más alto, pero casi desaparece en la noche. La capa E tiene una altitud de 65 a 75 millas y una ionización máxima alrededor del mediodía (tiempo local) y prácticamente desaparece después del anochecer. □sta provoca reflexión de frecuencias HF durante las horas diurnas. La capa F varía en altitud entre 90 y 250 millas y se ioniza rápidamente al amanecer□alcanza su ionización máxima al inicio de la tarde y decae lentamente después del anochecer. La región F se divide en dos capas, F_1 y F_2, durante el día, y se combinan para formar una capa durante la noche. La región F es el medio más predominante para proveer reflexión de ondas de HF. Como lo muestra la figura 1-2, el espec-



(a) Propagación de onda terrestre (debajo de 2 MHz)



(b) Propagación de onda celeste (de 2 a 30 MHz)



(c) Propagación de línea de vista (LOS, arriba de 30 MHz)

Figura 1–2 Propagación de radiofrecuencias.

tro electromagnético puede dividirse en tres bandas amplias que poseen una de tres características dominantes de propagación: onda terrestre, onda celeste y línea de vista (LOS).

La figura 1-2a ilustra la propagación de ondas terrestres. Este es el modo dominante de propagación para frecuencias por debajo de 2 MHz. En este caso, la onda electromagnética tiende a seguir el contorno de la Tierra. Esto es, la difracción de la onda causa su propagación a lo largo de la superficie terrestre. Este es el modo de propagación utilizado en la difusión por AM, donde la cobertura local sigue el contorno de la Tierra y la señal se propaga sobre el horizonte visual.

Esto provoca la siguiente cuestión: ¿cuál es la frecuencia más baja que se puede utilizar? La respuesta es que el valor de la frecuencia útil más baja depende de qué tan larga se quiere la antena. Para una radiación eficiente, la antena requiere ser más larga que un décimo de una longitud de onda. Por ejemplo, para una señalización con una frecuencia de portadora de $f_c = 10$ kHz, la longitud de onda es

$$\lambda = \frac{c}{f_c}$$

$$\lambda = \frac{(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{10^4} = 3 \times 10^4 \text{ m} \tag{1–3}$$

donde c es la velocidad de la luz. (La fórmula $\lambda = c/f_c$ es distancia = velocidad × tiempo, donde el tiempo necesario para cruzar una longitud de onda es $t = 1/f_c$.) Por lo tanto, una antena necesita tener una longitud de por lo menos 3,000 m para una radiación electromagnética eficiente a 10 kHz.

La figura 1-2b ilustra la propagación de una onda celeste. Este es el modo dominante de propagación en el rango de frecuencias de 2 a 30 MHz. En este caso, la cobertura de larga distancia se obtiene mediante la reflexión de la onda en la ionosfera y los límites terrestres. En realidad, las ondas se refractan (o se flexionan) en la ionosfera gradualmente en una forma de U invertida, debido a que el índice de refracción varía de acuerdo a la altitud conforme la densidad de ionización cambia. El índice de refracción de la ionosfera está dado por [Griffiths, 1987; Jordan y Balmain, 1968]

$$n = \sqrt{1 - \frac{81N}{f^2}} \tag{1–4}$$

donde n es el índice de refracción, N es la densidad de electrones libres (el número de electrones por metro cúbico) y f es la frecuencia de la onda (en hertz). Valores típicos de N varían en un rango de 10^{10} a 10^{12}, dependiendo de la hora del día, la temporada y el número de manchas solares. En una región ionizada, $n < 1$ debido a que $N > 0$, y fuera de la región ionizada, $n \approx 1$ debido a que $N \approx 0$. En la región ionizada, ya que $n < 1$, las ondas se propagarán de acuerdo a la ley de Snell; por tanto,

$$n \operatorname{sen} \varphi_r = \operatorname{sen} \varphi_i \tag{1–5}$$

donde φ_i es el ángulo de incidencia (entre la dirección de onda y la vertical), medida justamente debajo de la ionosfera, y φ_r es el ángulo de refracción para la onda (a partir de la vertical), medida en la ionosfera. Más aún, el índice de refracción variará con la altitud dentro de la ionosfera debido a que N varía. Para las frecuencias seleccionadas de la banda de 2 a 30 MHz, el índice de refracción cambiará con la altitud sobre el rango apropiado de tal forma que la onda se flexione de regreso a la Tierra. Consecuentemente, la ionosfera actúa como reflector. La estación transmisora contará con áreas de cobertura igual a las indicadas en la figura 1-2b con líneas negras a lo largo de la superficie de la Tierra. La cobertura cercana a la antena transmisora existe gracias al modo de onda terrestre y las otras áreas de cobertura se deben al modo de onda celeste. Note que existen áreas sin cobertura a lo largo de la superficie terrestre entre la antena transmisora y la antena receptora. El ángulo de reflexión y la pérdida de señal en el punto de reflexión ionosférica dependen de la frecuencia, la hora del día, la temporada anual y la actividad de las manchas solares [Jordan, 1985, cap. 33].

Durante el día (en los puntos de reflexión ionosférica), la densidad de electrones será alta, tal que $n < 1$. Por consiguiente, las ondas celestes de estaciones distantes al otro lado del mundo se escucharán en las bandas de onda corta. Sin embargo, la capa D está también presente durante el día. Esto absorbe frecuencias por debajo de 4 MHz.

Este es el caso para la difusión por AM, donde las estaciones distantes no pueden escucharse durante el día, pero la capa desaparece en la noche, y pueden oírse gracias a la propagación de ondas celestes. En Estados Unidos la FCC ha designado ciertas frecuencias dentro de la banda de AM como *canales claros* (como lo muestra la tabla 5-1). En estos canales sólo una o dos estaciones de alto poder de 50 kw son asignadas para operar durante la noche junto con algunas pocas estaciones de bajo poder. Las señales nocturnas de onda celeste de la estación dominante de 50 kw pueden escucharse a distancias de hasta 800 millas de la estación debido a que estos canales están relativamente libres de estaciones interferentes. Por ejemplo, algunas estaciones de 50 kw de canal claro son WSM, Nashville, a 650 kHz□WCCO, Minneapolis, a 830 kHz□y WHO, Des Moines, a 1040 kHz. En realidad, estos "canales claros" ya no son tan claros debido a que al paso de los años se ha otorgado licencia a estaciones adicionales para operarlos.

La propagación de onda celeste tiene como principal causa la reflexión de la capa F (de 90 a 250 millas de altitud). Debido a esta capa, las estaciones difusoras internacionales en la banda de HF pueden escucharse desde el otro lado del mundo a casi cualquier hora durante el día o la noche.

La propagación de LOS (ilustrada en la figura 1-2c) es el modo dominante para las frecuencias arriba de 30 MHz. En este caso, la onda electromagnética se propaga en una línea recta. Por tanto, $f^2 \gg 81N$, tal que $n \approx 1$ y existe muy poca refracción por la ionosfera. De hecho, la señal se propagará *a través* de la ionosfera. Las comunicaciones por satélite utilizan esta propiedad.

El modo de LOS posee la desventaja de que, para una comunicación entre dos estaciones terrestres (Tierra), la trayectoria de la señal debe ser por encima del horizonte. De otra manera, la Tierra bloquearía la trayectoria de LOS. Por lo tanto, las antenas deben colocarse en torres altas para que la antena receptora pueda "ver" a la antena transmisora. Una fórmula para la distancia al horizonte, d, como función de la altura de la antena puede obtenerse con la ayuda de la figura 1-3. De esta figura,

$$d^2 + r^2 = (r + h)^2$$

o

$$d^2 = 2rh + h^2$$

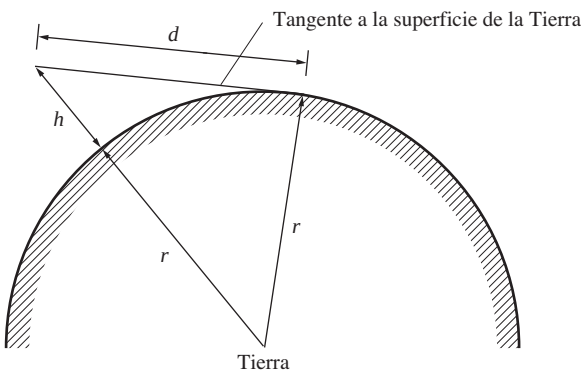


Figura 1–3 Cálculo de la distancia al horizonte.

donde r es el radio de la Tierra y h es la altura de la antena por encima de la superficie terrestre. En esta aplicación, h^2 es despreciable con respecto a $2rh$. El radio de la Tierra es de 3,960 millas terrestres. Sin embargo, a radiofrecuencias de LOS el radio efectivo de la Tierra[3] es de $\frac{4}{3}$(3,960) millas. Por lo tanto, la distancia al horizonte de radio es de

$$d = \sqrt{2h} \text{ millas} \tag{1–6}$$

donde se han utilizado factores de conversión para que h sea la altura de la antena medida en pies y d corresponde a millas terrestres. Por ejemplo, las estaciones televisoras tienen frecuencias asignadas arriba de 30 MHz en el rango de VHF o UHF (consulte la tabla 1-2) y la cobertura de zona marginal de las estaciones de alto poder está limitada por el horizonte de radio de LOS. Para una estación televisora con una torre de 1,000 pies de altura, d es de 44.7 millas. Para un espectador en la zona marginal que cuenta con una antena de 30 pies de altura, d es de 7.75 millas. Por lo tanto, para estas alturas de transmisión y recepción, la estación televisora contará con una cobertura de zona marginal hasta un radio de $44.7 + 7.75 = 52.5$ millas alrededor de la torre transmisora.

Además del modo de propagación de LOS es posible tener una *propagación por dispersión ionosférica*. Este modo ocurre en el rango de frecuencias de 30 a 60 MHz cuando la señal de radiofrecuencia se dispersa debido a irregularidades en el índice de refracción de la baja ionosfera (aproximadamente 50 millas arriba de la superficie de la Tierra). Debido a esta dispersión pueden realizarse comunicaciones a través de trayectorias con longitud de 1,000 millas, aun cuando ésta sea mayor a la distancia de LOS. De la misma manera, la *dispersión troposférica* (dentro de 10 millas por encima de la superficie de la Tierra) puede propagar señales de radiofrecuencia que estén en el rango de 40 MHz a 4 GHz a través de trayectorias de varios cientos de millas.

Si el lector desea más detalles técnicos acerca de la propagación de ondas de radio, puede consultar libros que incluyan capítulos sobre propagación de ondas terrestres y celestes [Griffiths, 1987□ □ordan y Balmain, 1968] y sobre propagación de señales celulares inalámbricas [Rappaport, 2002]. En el "ARRL handbook" [ARRL, 2004] puede encontrarse una descripción bastante accesible sobre este tema. También están disponibles programas para computadoras personales que predicen las condiciones de propagación de onda celeste, tales como VOACAP [ARRL, 2004].

1-9 MEDICIÓN DE INFORMACIÓN

Como se ha visto, el propósito de los sistemas de comunicación es transmitir información de una fuente a un receptor. Sin embargo, □qué se entiende exactamente por información y cómo se mide? Se sabe que cuantitativamente está relacionada a la sorpresa que se siente cuando se recibe un mensaje. Por ejemplo, el mensaje: "El océano ha sido destruido por una explosión nuclear" contiene más información que el mensaje: "Hoy está lloviendo."

DEFINICIÓN. La *información* enviada de una fuente digital cuando se transmite el j-ésimo mensaje está dada por

$$I_j = \log_2\left(\frac{1}{P_j}\right) \text{ bits} \tag{1–7a}$$

donde P_j es la probabilidad de transmitir el j-ésimo mensaje.[4]

[3] El índice de refracción de la atmósfera se reduce ligeramente con la altura, lo cual causa cierta flexión de los rayos de radio. Este efecto puede incluirse en los cálculos de LOS utilizando un radio efectivo de la Tierra equivalente a cuatro tercios del radio real.

[4] El apéndice B presenta la definición de probabilidad.

De esta definición se deduce que los mensajes que tiene una menor probabilidad de ocurrencia (valores más pequeños para P_j) suministran más información (valores grandes de I_j). También se observa que la medida de información depende sólo de la probabilidad del envío del mensaje y no de la posible interpretación del contenido en referencia a si tiene sentido o no.

La base del logaritmo determina las unidades utilizadas para la medida de información. Por lo tanto, se emplea el logaritmo de base 2 para unidades de "bits". Si se usa el logaritmo natural, las unidades son "nats", y para logaritmos de base 10 la unidad es el "hartley", llamado así en honor a R. V. Hartley, quien fue el primero en sugerir el uso de la media logarítmica, en 1928 [Hartley, 1948].

En esta sección, el término *bit* denota una unidad de información como se define en la ecuación (1-7a). En secciones posteriores, particularmente en el capítulo 3, se utiliza el término *bit* para representar una unidad de datos binarios. Estos dos significados para la palabra *bit* no deben confundirse. Algunos autores utilizan *binit* para representar unidades de datos y *bit* exclusivamente para denotar unidades de información. No obstante, la mayoría de los ingenieros utiliza la misma palabra (*bit*) para representar ambos tipos de unidades y el significado particular se entiende por el contexto en el que la palabra es empleada. Este libro sigue esa costumbre de la industria.

Para facilitar la evaluación de I_j en una calculadora se puede escribir la ecuación (1-7a) en términos del logaritmo de base 10 o el logaritmo natural:

$$I_j = -\frac{1}{\log_{10} 2} \log_{10} P_j = -\frac{1}{\ln 2} \ln P_j \tag{1–7b}$$

En general, el contenido de la información variará de mensaje a mensaje ya que los respectivos valores de P_j no serán iguales. Por consecuencia, se necesita una medida de la información promedio para la fuente, la cual considera todos los mensajes posibles que se pueden enviar.

DEFINICIÓN. La medida de *información promedio* de una fuente digital es

$$H = \sum_{j=1}^{m} P_j I_j = \sum_{j=1}^{m} P_j \log_2 \left(\frac{1}{P_j}\right) \text{ bits} \tag{1–8}$$

donde m es el número de posibles mensajes fuente diferentes y P_j es la probabilidad de enviar el j-ésimo mensaje (m es finito ya que se presume una fuente digital). La información promedio es llamada *entropía*.

Ejemplo 1–1 EVALUACIÓN DE LA INFORMACIÓN Y ENTROPÍA

Encuentre el contenido de información de un mensaje que consiste en una palabra digital de 12 dígitos en donde cada dígito puede tener uno de cuatro niveles. Asuma que la probabilidad de enviar cualquiera de los cuatro niveles es igual y que el nivel en cualquier dígito es independiente de los valores tomados por los dígitos anteriores.

En una cadena de 12 símbolos (dígitos), donde cada símbolo tiene uno de cuatro niveles, existen $4 \cdot 4 \cdots 4 = 4^{12}$ diferentes combinaciones (de palabras) que pueden obtenerse. Debido a que cada nivel es igualmente probable, todas las diferentes palabras son también igualmente probables. Por lo tanto,

$$P_j = \frac{1}{4^{12}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{12}$$

o

$$I_j = \log_2 \left(\frac{1}{(\frac{1}{4})^{12}}\right) = 12 \log_2(4) = 24 \text{ bits}$$

En este ejemplo observamos que el contenido de información en cada uno de los mensajes posibles equivale a 24 bits. Por lo tanto, la información promedio H es de 24 bits.

Suponga que sólo se han permitido dos niveles (binario) para cada dígito y que todas las palabras son igualmente probables. Entonces la información sería de $I_j = 12$ bits para las palabras binarias y la información promedio sería de $H = 12$ bits. En este caso todas las palabras de 12 bits proporcionaron 12 bits de información porque las palabras fueron igualmente probables. Si no fueran igualmente probables, algunas de las palabras de 12 bits pudieran contener más de 12 bits de información y otras menos, con lo que la información promedio hubiera sido menor a 12 bits. Por ejemplo, si la mitad de las palabras de 12 bits (2,048 de las posibles 4,096) tienen una probabilidad de ocurrencia de $P_j = 10^{-5}$ para cada una de estas palabras (con una $I_j = 16.61$ bits correspondiente) y la otra mitad tiene $P_j = 4.78 \times 10^{-4}$ (para una $I_j = 11.03$ bits correspondiente), entonces la información promedio es de $H = 11.14$ bits.

La velocidad de información también es importante.

DEFINICIÓN. La *velocidad de fuente* está dada por

$$R = \frac{H}{T} \text{ bits/s} \tag{1–9}$$

donde H se calcula utilizando la ecuación (1-8) y T es el tiempo requerido para enviar un mensaje.

Las definiciones dadas previamente se aplican a las fuentes digitales. Los resultados para fuentes analógicas pueden aproximarse utilizando fuentes digitales con tanta exactitud como se desee.

1-10 CAPACIDAD DE CANAL Y SISTEMAS DE COMUNICACIÓN IDEALES

Para verificar si un sistema de comunicación es ideal o perfecto, pueden utilizarse muchos criterios. Para los sistemas digitales, el sistema óptimo es aquel que minimiza la probabilidad de error de bit a la salida del sistema sujeto a las restricciones de la energía transmitida y del ancho de banda del canal. Por lo tanto, el error de bit y el ancho de banda de la señal son de primordial importancia, temas que se abordan en capítulos posteriores. Ello origina la siguiente pregunta: ¿acaso es posible la invención de un sistema sin error de bit a la salida aun cuando se introduzca ruido en el canal? Claude Shannon respondió a esta pregunta en 1948-1949 [Wyner y Shamai, 1998; Shannon, 1948, 1949]. La respuesta es afirmativa bajo ciertas suposiciones. Shannon demostró que (para el caso de una señal con ruido blanco gaussiano añadido) se puede calcular una capacidad de canal C (bits/s) tal que si la velocidad de información R (bits/s) era menor a C, entonces la probabilidad de error se aproximará a cero. La ecuación para C es

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) \tag{1–10}$$

donde B es el ancho de banda del canal en hertz (Hz) y S/N es la relación de potencia de señal a ruido (watts/watts, no dB) a la entrada del receptor digital. Shannon no describe cómo construir este sistema, pero sí demuestra que tener tal sistema es teóricamente posible. Por tanto, Shannon aporta un límite de rendimiento teórico que puede alcanzarse con sistemas de comunicación prácticos. Los sistemas que se aproximan a este límite a menudo incorporan codificación para la corrección de errores.

El sistema óptimo en los sistemas analógicos es aquel que puede alcanzar la relación más grande de señal a ruido a la salida del receptor, sujeta a las restricciones de diseño tales como el ancho de banda del canal y la potencia transmitida. En este caso la evaluación de la relación de señal a ruido de salida es de suma importancia. Se puede preguntar si es posible diseñar un sistema con una relación de señal a ruido infinita a la salida cuando se introduce ruido al canal. La respuesta es negativa. El capítulo 7 ilustra el rendimiento de sistemas analógicos prácticos con respecto al sistema ideal de Shannon. (Consulte la figura 7-27).

Otros límites fundamentales para la señalización digital fueron descubiertos por Nyquist en 1924 y Hartley en 1928. Nyquist demostró que si un pulso representa un bit de datos, se puede enviar pulsos no interferentes a través de un canal a una velocidad no mayor a $2B$ pulsos/s, donde B es el ancho de banda del canal en hertz. Esto se conoce ahora como el teorema de dimensionalidad y se discute en el capítulo 2. Hartley generalizó el resultado de Nyquist para el caso de una señalización de pulso multinivel, como se aprecia en los capítulos 3 y 5.

La siguiente sección describe las mejoras que pueden obtenerse en los sistemas digitales cuando se utiliza la codificación, y cómo estos sistemas codificados se comparan con el sistema ideal de Shannon.

1-11 CODIFICACIÓN

Si los datos a la salida de un sistema de comunicación digital tienen errores que ocurren con frecuencia, éstos pueden a menudo reducirse con cualquiera de las siguientes dos técnicas principales:

- Requisición de repetición automática (ARQ)
- Corrección de errores directa (FEC)

En un sistema de ARQ, cuando un circuito receptor detecta errores de paridad en un bloque de datos, el receptor envía una requisición para que el bloque de datos sea retransmitido. En un sistema FEC, los datos transmitidos están codificados para que el receptor detecte y corrija errores. Estos procedimientos se clasifican también como *codificación de canal* debido a que se utilizan para corregir errores causados por el ruido en el canal. Esto es diferente de la *codificación de fuente* descrita en el capítulo 3, donde el propósito de la codificación es extraer la información esencial de la fuente y codificarla a una forma digital para almacenarla eficientemente o bien transmitirla utilizando técnicas digitales.

La utilización de la técnica de ARQ o de FEC depende de la aplicación en particular. La ARQ a menudo se usa en los sistemas de comunicación por computadora porque su implementación es relativamente barata y generalmente existe un canal duplex (bidireccional) tal que la terminal receptora pueda transmitir un acuse de recibo (ACK) para los datos recibidos correctamente o una requisición de retransmisión (NAC) cuando los datos se reciben con errores. Las técnicas de FEC se utilizan para la corrección de errores en canales simplex (unidireccionales), donde el envío de un indicador de ACK/NAC no es factible. La FEC se prefiere en sistemas con largos retrasos de transmisión, ya que si se utilizara la técnica de ARQ, la velocidad efectiva de datos sería pequeña□el transmisor tendría largos periodos de inactividad mientras espera por el indicador ACK/NAC, el cual se demora por el gran retraso de transmisión. El resto de esta sección se concentra en las técnicas de FEC.

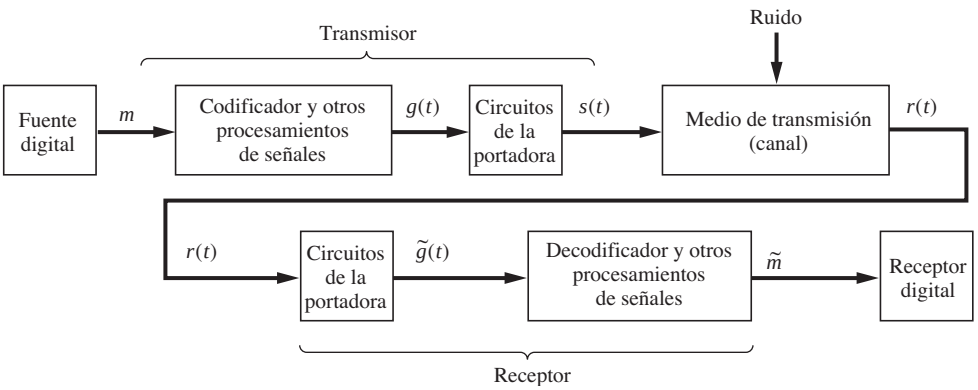


Figura 1–4 Un sistema digital genérico de comunicación.

La figura 1-4 ilustra los sistemas de comunicación con FEC, en donde se han designado bloques para la codificación y decodificación. La codificación involucra la adición de bits extra (redundantes) al flujo de datos para que el decodificador reduzca o corrija errores a la salida del receptor. Sin embargo, estos bits extra tienen la desventaja de que aumentan la velocidad de datos (bits/s) y, por consecuencia, incrementan también el ancho de banda de la señal codificada.

Los códigos pueden clasificarse en dos amplias categorías:

- *Códigos de bloque*. Un código de bloque es un mapeo de símbolos binarios de entrada k a símbolos binarios de salida n. Por consiguiente, el codificador de bloque es un dispositivo *sin memoria*. Debido a que $n > k$, el código puede seleccionarse para proveer redundancia, tal como los *bits de paridad*, los cuales son utilizados por el decodificador para proporcionar alguna detección y corrección de errores. Estos códigos están representados por (n, k), en donde la velocidad de código R[5] está definida por $R = k/n$. Los valores prácticos para R varían en el rango de $\frac{1}{4}$ y $\frac{7}{8}$, y los valores de k varían en el rango de 3 a varios cientos [Clark y Cain, 1981].
- *Códigos convolucionales*. Un código convolucional se produce por un codificador que tiene *memoria*. El codificador convolucional acepta un número k de símbolos binarios a la entrada y produce n símbolos binarios a la salida, en donde los n símbolos de salida se ven afectados por $v + k$ símbolos de entrada. La memoria está incorporada debido a que $v > 0$. Esta velocidad de código está definida por $R = k/n$. Los valores típicos para k y n varían en el rango de 1 a 8, y los valores para v varían de 2 a 60. El rango de R se encuentra entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{7}{8}$ [Clark y Cain, 1981]. Un valor pequeño de la velocidad de código R indica un alto grado de redundancia, la cual debe proveer un control de errores más efectivo con la desventaja de que el ancho de banda de la señal codificada se ve aumentado.

Códigos de bloque

Antes de discutir los códigos de bloque se requieren varias definiciones. El *peso de Hamming* de una palabra código es el número de bits con el valor binario 1. Por ejemplo, la palabra código 110101 tiene un peso de Hamming de 4. La *distancia Hamming* entre dos palabras código, representada por d, es el número de posiciones por las que difieren. Por ejemplo, las palabras código

[5] No confunda la velocidad de código (con unidades de bits/bits) con la velocidad de datos o de información (la cual posee unidades de bits/s).

110101 y 111001 tienen una distancia de $d = 2$. Una palabra código recibida puede analizarse para la existencia de errores. Algunos errores pueden detectarse y corregirse si $d \geq s + t + 1$, donde s es el número de errores que pueden detectarse y t es el número de errores que pueden corregirse ($s \geq t$). Por lo tanto, se puede detectar un patrón de t o menos errores si $d \geq 2t + 1$.

Una palabra código genérica puede representarse de la forma

$$i_1 i_2 i_3 \cdots i_k p_1 p_2 p_3 \cdots p_r$$

donde k es el número de bits de información, r es el número de bits de verificación de paridad y n es la longitud total de la palabra en el código de bloque (n, k), donde $n = k + r$. Este arreglo de los bits de información al inicio de la palabra código seguido de los bits de paridad es el más común. A dicho código de bloque se le llama *sistemático*. Otros arreglos con los bits de paridad entrelazados con los bits de información son posibles y a menudo se consideran códigos equivalentes.

Hamming ha ofrecido un procedimiento para el diseño de códigos de bloque que cuentan con capacidad de corrección de un solo error [Hamming, 1950]. Un código Hamming es un código de bloques con una distancia Hamming de 3, debido a que $d \geq 2t + 1$, $t = 1$ y por lo tanto sólo puede detectarse y corregirse un solo error. Sin embargo, sólo se permiten ciertos códigos (n, k). Estos códigos Hamming permitidos son

$$(n, k) = (2^m - 1, 2^m - 1 - m) \tag{1–11}$$

donde m es un entero y $m \geq 3$. Por lo tanto, algunos de los códigos permitidos son (7, 4), (15, 11), (31, 26), (63, 57) y (127, 120). La velocidad de código R se aproxima a 1 conforme m se hace más grande.

Además de los Hamming, existen muchos otros tipos de códigos de bloque. Una clase popular son los *códigos cíclicos*, que son aquellos en los que se puede obtener otra palabra código tomando cualquier palabra código, desplazando sus bits hacia la derecha y colocando los bits desplazados a la izquierda. Estos tipos de códigos tienen la ventaja de que pueden codificarse fácilmente a partir de la fuente del mensaje utilizando registros de desplazamiento lineal con retroalimentación económicos. Dicha estructura permite su fácil decodificación. Algunos ejemplos de códigos cíclicos y relacionados son los códigos de Bose-Chaudhuri-Hocquenhem (BCH), Reed-Solomon, Hamming, máxima longitud, Reed-M□ller y Golay. La tabla 1-3 presenta algunas propiedades de los códigos de bloque [Bhargava, 1983].

TABLA 1–3 PROPIEDADES DE LOS CÓDIGOS DE BLOQUE

	Código[a]			
Propiedad	**BCH**	**Reed-Solomon**	**Hamming**	**Máxima longitud**
Longitud de bloque	$n = 2^m = 1$ $m = 3, 4, 5, \ldots$	$n = m(2^m - 1)$ bits	$n = 2^m - 1$	$n = 2^m - 1$
Número de bits de paridad		$r = m2t$ bits	$r = m$	
Distancia mínima	$d \geq 2t + 1$	$d = m(2t + 1)$ bits	$d = 3$	$d = 2^m - 1$
Número de bits de información	$k \geq n - mt$			$k = m$

[a] m es cualquier entero positivo a menos que se indique lo contrario□n es la longitud de bloque□k es el número de bits de información.

Códigos convolucionales

La figura 1-5 muestra un codificador convolucional. En éste, un número k de bits (una trama de entrada) se desplazan uno a la vez y, en concurrencia, un número n de bits (una trama de entrada) se desechan, donde $n > k$. Por lo tanto, cada trama de entrada de k bits produce una trama de salida de n bits. Se proporciona redundancia a la salida debido a que $n > k$. Además, el codificador cuenta con memoria, ya que la trama de salida depende del número K de tramas de entrada anteriores, donde $K > 1$. La *velocidad de código* es de $R = k/n$, la cual es de $\frac{3}{4}$ en esta ilustración. La *longitud de restricción*, K, es el número de tramas de entrada almacenadas en el registro de desplazamiento de kK bits.[6] Dependiendo del código convolucional en particular que será generado, se añaden datos de las kK etapas (por módulo 2) al registro de desplazamiento y se utilizan para activar los bits en el registro de salida a la etapa n.

Por ejemplo, considere el codificador convolucional mostrado en la figura 1-6. En este caso, $k = 1$, $n = 2$, $K = 3$ y un conmutador con dos entradas ejecuta la función de un registro de desplazamiento de salida en dos etapas. El código convolucional se genera introduciendo un bit de datos y después dándole una revolución completa al conmutador. El proceso se repite en sucesivos bits de entrada para producir la salida convolucionalmente codificada. En este ejemplo, cada bit de entrada de $k = 1$ produce $n = 2$ bits de salida, tal que la velocidad de código es de $R = k/n = \frac{1}{2}$. El árbol de código en la figura 1-7 presenta las secuencias codificadas para el ejemplo del codificador convolucional de la figura 1-6. Para utilizar el árbol de código, diríjase hacia arriba si la entrada es un 0 binario y hacia abajo si la entrada es un 1 binario. Los bits codificados correspondientes se muestran

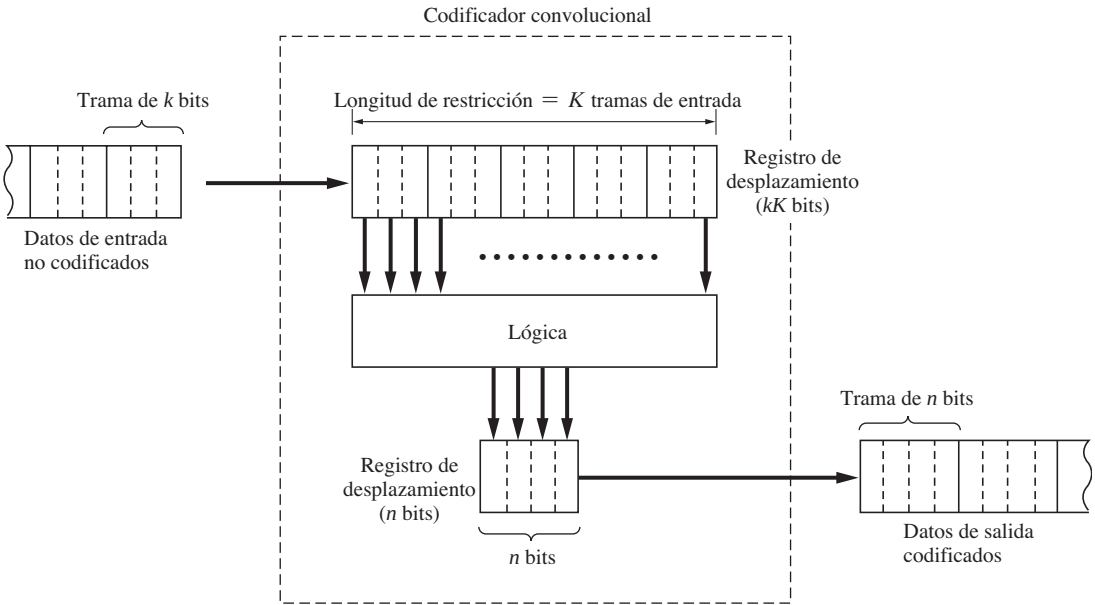

Codificador convolucional
Trama de k bits
Longitud de restricción = K tramas de entrada
Registro de desplazamiento (kK bits)
Datos de entrada no codificados
Lógica
Trama de n bits
Registro de desplazamiento (n bits)
n bits
Datos de salida codificados

Figura 1–5 Codificación convolucional $(k = 3, n = 4, K = 5 \text{ y } R = \frac{3}{4})$.

[6] En la literatura se utilizan varias definiciones diferentes de la longitud de restricción [Blahut, 1983; Clark y Cain, 1981; Proakis, 1995].

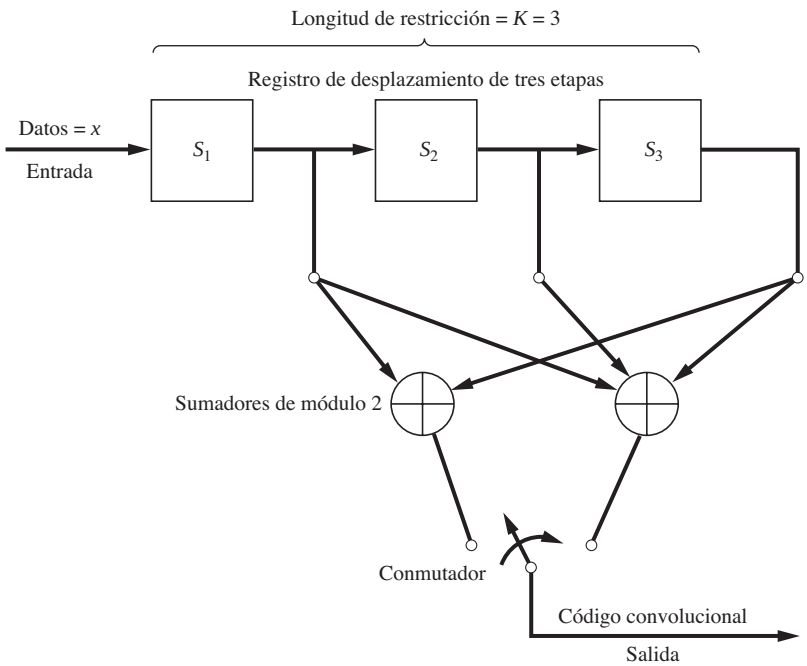


Figura 1–6 Codificador convolucional para un código con una velocidad de $\frac{1}{2}$, y una longitud de restricción de 3.

en paréntesis. Por ejemplo, si la secuencia de entrada $x_{11} = 1010$ se alimenta a la entrada (con el bit de entrada más reciente a la derecha), la secuencia de salida codificada correspondiente es $y_{11} = 11010001$, mostrada por la trayectoria A en la figura 1-7.

Una señal codificada convolucionalmente se decodifica al "emparejar" los datos codificados recibidos con el patrón de bits correspondiente en el árbol de código. En la decodificación secuencial (una técnica subóptima), la trayectoria es similar a la de un conductor que ocasionalmente toma la dirección incorrecta en una bifurcación del camino pero se da cuenta de su error, regresa, e intenta una trayectoria diferente. Por ejemplo, si se recibió $y_{11} = 11010001$, la trayectoria A sería la "pareja" más cercana y los datos decodificados serían $x_{11} = 1010$. Si existe ruido en el canal, algunos de los bit codificados recibidos podrían ser erróneos, y por tanto las trayectorias no serían parejas exactas. En este caso, la pareja se encuentra al seleccionar una trayectoria que minimizará la distancia Hamming entre la secuencia de trayectoria seleccionada y la secuencia codificada recibida.

Un algoritmo óptimo de decodificación, llamado *decodificación Viterbi*, utiliza un procedimiento similar. Éste examina las posibles trayectorias y selecciona las mejores basándose en algunas probabilidades condicionales [Forney, 1973]. El procedimiento Viterbi puede utilizar decisiones ponderadas o absolutas. Un algoritmo de *decisión ponderada* primero decide el resultado basado en si una estadística de prueba[7] se encuentra por encima o por debajo de un umbral

[7] La estadística de prueba es un valor calculado en el receptor, basado en la entrada a éste durante algún intervalo de tiempo especificado. [Vea Eq. 7-4.]

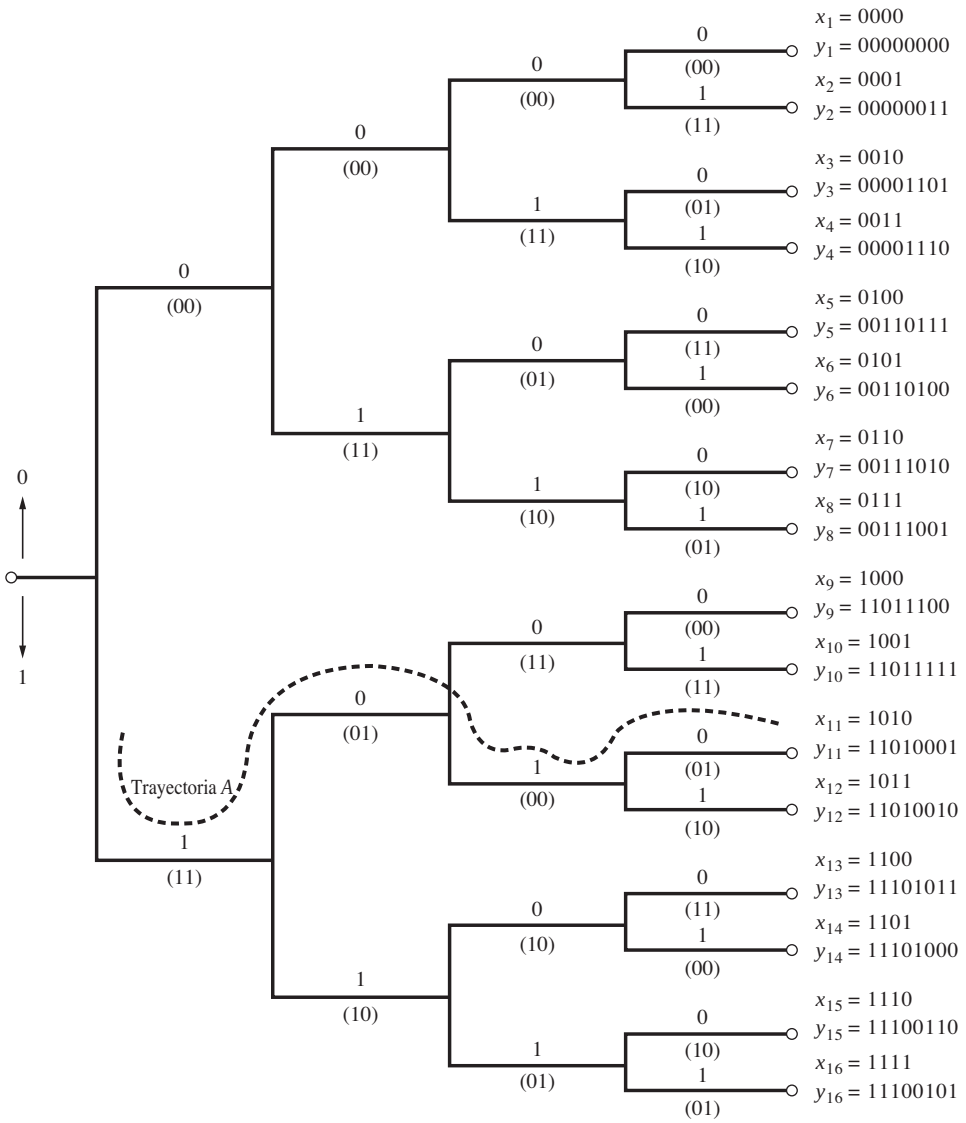


Figura 1–7 Árbol de código para el codificador convolucional de la figura 1-6.

de decisión y después suministra un número de "confianza" que especifica qué tan cercana llegó la estadística de prueba al valor de umbral. En las *decisiones absolutas* sólo se conoce la salida de la decisión y no se sabe si la decisión fue casi "demasiado cerca para estar seguro" (debido a que el valor de prueba fue casi igual al valor de umbral). La técnica de decisión ponderada puede traducirse a una mejora (decremento) de 2 dB en la entrada requerida en el receptor E_b/N_0 [Clark y Cain, 1981]. E_b es la energía de la señal recibida sobre un intervalo de tiempo de 1 bit y $N_0/2$ es la densidad espectral de potencia (PSD) del ruido del canal a la entrada del receptor. Tanto E_b como N_0 se definirán a mayor detalle en capítulos posteriores. [Por ejemplo, vea la ecuación (7-24b) o la ecuación (8-44).]

Entrelazado de código

En la discusión anterior se asumió que si no se utiliza codificación, entonces el ruido en el canal causará errores de bit aleatorios en la salida del receptor que estarán más o menos aislados (esto es, no adyacentes). Cuando se añadió la codificación, la redundancia en el código permitió al decodificador receptor la corrección de errores en forma tal que la salida decodificada estará casi libre de errores. Sin embargo, en algunas aplicaciones ocurren pulsos anchos y largos de ruido en el canal. Si se utilizan las técnicas de codificación comunes en dichas situaciones ocurrirán ráfagas de errores a la salida del decodificador debido a que las ráfagas de ruido son más anchas que el "tiempo de redundancia" del código. Esta situación puede mejorarse utilizando el entrelazado de código.

Los datos codificados se entrelazan en el lado transmisor al "barajar" (así como se barajan cartas de juego) los bits codificados sobre un intervalo de tiempo con una longitud equivalente a varios bloques (para códigos de bloque) o varias longitudes de restricción (para códigos convolucionales). La longitud requerida del intervalo es de varias veces la duración de la ráfaga de ruido. En el lado transmisor, y antes de la decodificación, los datos con ráfagas de errores se entrelazan para producir datos codificados con errores aislados. Éstos son a su vez corregidos al pasar los datos codificados a través del decodificador. Ello produce una salida casi libre de errores, aun cuando ocurran ráfagas de ruido en la entrada del receptor. Existen dos clases de entrelazadores: de bloque y convolucionales [Sklar, 1998].

Rendimiento de código

La figura 1-8 ilustra la mejora en el rendimiento de un sistema de comunicación digital que puede alcanzarse utilizando la codificación. Se asume que una señal digital con ruido añadido en el canal está presente a la entrada del receptor. Se muestra también el rendimiento de un sistema que utiliza una señalización a través de la modulación por desplazamiento de fase binaria (BPSK) cuando se utiliza la codificación, así como cuando ésta no existe. Para el caso sin codificación, se emplea el circuito de detección óptimo (filtro acoplado) en el receptor, descrito en el capítulo 7 y por la ecuación (7-38). Para el caso con codificación se usa un código Golay de (23, 12). P_e es la *probabilidad de error de bit*, también conocida como *tasa de error de bit* (BER), que se mide en la salida del receptor. E_b/N_0 es la relación de energía por bit/densidad de ruido en la entrada del receptor (como se describió en la sección anterior). Para $E_b/N_0 = 7$ dB, la figura 1-8 muestra que la BER es de 10^{-3} para el caso sin codificación, y que la BER puede reducirse a 10^{-5} si se utiliza codificación.

La *ganancia del código* se define como la reducción en E_b/N_0 (en decibeles) que se alcanza cuando se utiliza codificación, en comparación con la E_b/N_0 requerida para el caso sin codificación a algún nivel específico de P_e. Por ejemplo, como se ve en la figura, se puede alcanzar una ganancia de codificación de 1.33 dB para una BER de 10^{-3}. La ganancia del código aumenta si la BER es más pequeña, tal que se alcanza una ganancia de 2.15 dB cuando $P_e = 10^{-5}$. Esta mejora es significativa en las aplicaciones de comunicaciones espaciales, en donde cada decibel de mejora es invaluable. La figura destaca también que existe un *umbral de codificación* en el sentido de que el sistema codificado en realidad suministra un rendimiento *más pobre* que el de un sistema sin codificación cuando E_b/N_0 es menor que el valor de umbral. En este ejemplo, el umbral de codificación es de aproximadamente 3.5 dB. Existe un umbral de codificación en todos los sistemas codificados.

El teorema de capacidad de canal de Shannon, ecuación (1-10), provee la E_b/N_0 requerida para una codificación óptima. Esto es, si la velocidad de la fuente está por debajo de la capacidad del canal, la codificación óptima permitirá la decodificación de la información fuente en el receptor con

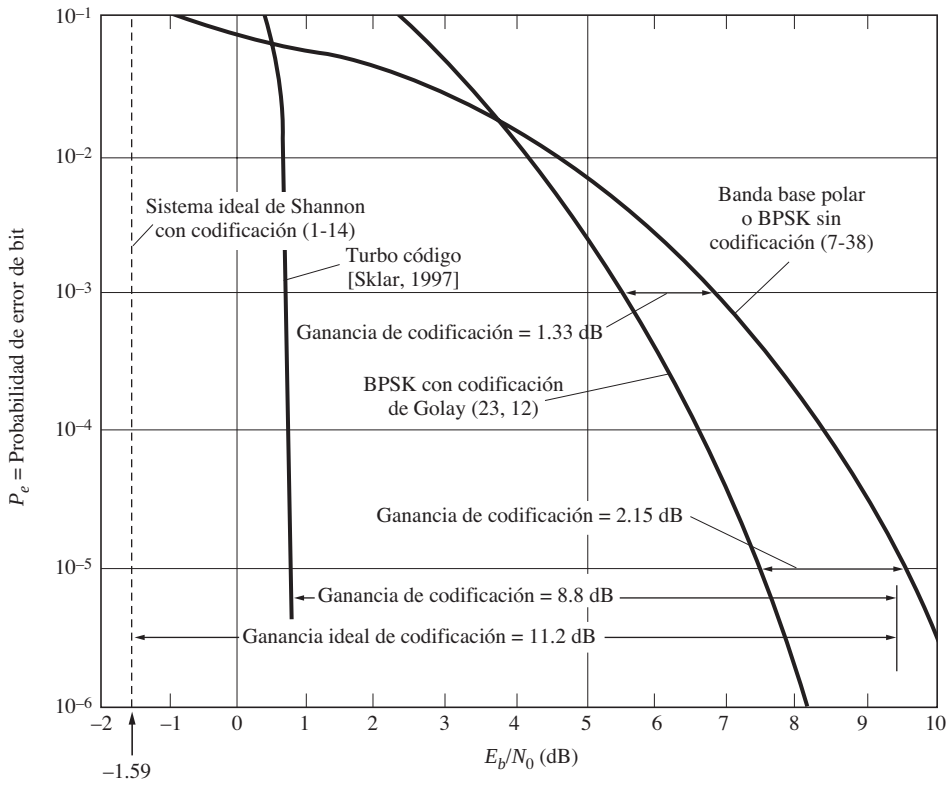

10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
P_e = Probabilidad de error de bit
Sistema ideal de Shannon con codificación (1-14)
Turbo código [Sklar, 1997]
Banda base polar o BPSK sin codificación (7-38)
Ganancia de codificación = 1.33 dB
BPSK con codificación de Golay (23, 12)
Ganancia de codificación = 2.15 dB
Ganancia de codificación = 8.8 dB
Ganancia ideal de codificación = 11.2 dB
–2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
E_b/N_0 (dB)
–1.59

Figura 1–8 Rendimiento de sistemas digitales con o sin codificación.

una $P_e \rightarrow 0$ (en otras palabras, $10^{-\infty}$), aun cuando exista algún ruido en el canal. A continuación se encontrará la E_b/N_0 requerida tal que $P_e \rightarrow 0$ con la codificación (desconocida) óptima. Asuma que la señal óptima codificada no tiene restricciones en cuanto a su ancho de banda. Entonces, a partir de la ecuación (1-10),

$$C = \lim_{B\rightarrow\infty} \left\{ B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right)\right\} = \lim_{B\rightarrow\infty} \left\{ B \log_2 \left(1 + \frac{E_b/T_b}{N_0 B}\right)\right\}$$

$$= \lim_{x\rightarrow 0} \left\{ \frac{\log_2[1 + (E_b/N_0 T_b)x]}{x} \right\}$$

donde T_b es el tiempo que se toma para enviar un bit y N es la potencia del ruido que ocurre dentro del ancho de banda de la señal. La densidad espectral de potencia (PSD) es de $\mathcal{P}_n(f) = N_0/2$, y, como se muestra en el capítulo 2, la potencia del ruido es

$$N = \int_{-B}^{B} \mathcal{P}_n(f) df = \int_{-B}^{B} \left(\frac{N_0}{2}\right) df = N_0 B \tag{1–12}$$

donde B es el ancho de banda de la señal. La regla de L'Hospital se utiliza para la evaluación de este límite:

$$C = \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{1}{1 + (E_b/N_0T_b)x} \left(\frac{E_b}{N_0T_b} \right) \log_2 e \right\} = \frac{E_b}{N_0T_b \ln 2} \tag{1–13}$$

Si se envía la señal a una velocidad cercana a la capacidad del canal, entonces $P_e \to 0$, y se encuentra la máxima velocidad de información permitida para $P_e \to 0$ (en otras palabras, el sistema óptimo). Por lo tanto, $1/T_b = C$, o, utilizando la ecuación (1-13),

$$\frac{1}{T_b} = \frac{E_b}{N_0T_b \ln 2}$$

o

$$E_b/N_0 = \ln 2 = -1.59 \text{ dB} \tag{1–14}$$

Este valor mínimo para E_b/N_0 es de −1.59 dB y es conocido como el *límite de Shannon*. Esto es, si se utilizan una codificación y decodificación óptimas tanto en el transmisor como en el receptor, entonces se obtendrán datos libres de errores a la salida del receptor, siempre y cuando la E_b/N_0 a la entrada del receptor sea mayor a −1.59 dB. Este límite de "pared de concreto" se muestra mediante la línea trazada en la figura 1-8, donde P_e cambia de 0 ($10^{-\infty}$) a $\frac{1}{2}(0.5 \times 10^0)$ conforme E_b/N_0 se hace más pequeña que −1.59 dB, asumiendo que se utiliza el código (desconocido) ideal. Cualquier sistema práctico tendrá un peor rendimiento que este sistema ideal descrito por el límite de Shannon. Por lo tanto, la meta de los diseñadores de sistemas digitales es encontrar códigos prácticos que se aproximan al rendimiento del código (desconocido) ideal de Shannon.

Cuando se compara el rendimiento de una señal codificada óptima con la de BPSK sin codificación (un BER de 10^{-5}), se observa que la señal codificada (desconocida) óptima tiene una ganancia de codificación de $9.61 - (-1.59) = 11.2$ dB. Utilizando la figura 1-8, compare este valor con la ganancia de codificación de 8.8 dB que se alcanza cuando se utiliza un turbo código. La tabla 1-4 muestra las ganancias que pueden obtenerse para algunos otros códigos.

A partir de su introducción en 1993, los turbo *códigos* se han popularizado debido a que pueden rendir cerca del límite de Shannon y aún así poseer una decodificación razonablemente compleja [Sklar, 1997]. Los turbo códigos se generan utilizando una concatenación paralela de dos códigos convolucionales simples, con un codificador precedido por un entrelazador [Benedetto y Montorsi, 1996]. El entrelazador asegura que las palabras susceptibles a errores recibidas para uno de los códigos corresponderán a las palabras resistentes a errores recibidas para el otro código.

Todos los códigos descritos anteriormente alcanzan sus ganancias de codificación a expensas de la *expansión de ancho de banda*. Esto es, cuando se añaden bits de redundancia para suministrar una ganancia de codificación, la velocidad total de datos y, por consecuencia, el ancho de banda de la señal se incrementan por un factor multiplicativo, el cual es el recíproco de la velocidad de código. La expansión de ancho de banda de un sistema codificado en relación a un sistema sin codificación es de $1/R = n/k$. Por lo tanto, si una señal sin codificación acapara todo el ancho de banda disponible, no se podrá agregar codificación para la reducción de errores en el receptor debido a que la señal codificada utilizará demasiado ancho de banda. Sin embargo, este problema se puede solucionar utilizando una modulación por codificación convolucional (TCM).

TABLA 1–4 GANANCIAS DE CODIFICACIÓN CON BANDA BASE POLAR, BPSK O QPSK

Técnica de codificación utilizada	Ganancia de codificación (dB) a una BER de 10^{-5}	Ganancia de codificación (dB) a una BER de 10^{-8}	Capacidad de velocidad de datos
Codificación ideal	11.2	13.6	
Turbo código [Sklar, 1997]	8.8		
Reed-Solomon y convolución (decodificación Viterbi) concatenados[a]	6.5–7.5	8.5–9.5	Moderada
Convolución con decodificación secuencial (decisiones ponderadas)	6.0–7.0	8.0–9.0	Moderada
Códigos de bloque (decisión ponderada)	5.0–6.0	6.5–7.5	Moderada
Reed-Solomon y bloque corto concatenado[a]	4.5–5.5	6.5–7.5	Muy alta
Convolucional con decodificación Viterbi	4.0–5.5	5.0–6.5	Alta
Convolucional con decodificación secuencial (decisiones absolutas)	4.0–5.0	6.0–7.0	Alta
Códigos de bloque (decisiones absolutas)	3.0–4.0	4.5–5.5	Alta
Códigos de bloque con decodificación de umbral	2.0–4.0	3.5–5.5	Alta
Convolucional con decodificación de umbral	1.5–3.0	2.5–4.0	Muy alta

[a]Se utilizan dos codificadores diferentes en serie en el transmisor (consulte la figura 1-4) y se utilizan los decodificadores correspondientes en el receptor.

Fuente: Bhargava [1983] y Sklar [1997].

Modulación por codificación convolucional

Gottfried Ungerboeck ha inventado una técnica llamada *modulación por codificación convolucional* (TCM) que combina modulación multinivel con codificación para alcanzar una ganancia de codificación sin expansión de ancho de banda [Benedetto, Mondin y Montorsi, 1994□Biglieri, Divsalar, McLane y Simon, 1991□Ungerboeck, 1982, 1987]. El "truco" consiste en añadir bits de codificación de redundancia mediante el incremento en el número de niveles (valores de amplitud) permitidos en la señal digital sin cambiar el ancho de pulso. (El ancho de banda se mantendrá igual si no se cambia el ancho de pulso, ya que aquél es proporcional al recíproco de éste.) Esta técnica se conoce como señalización multinivel y se introduce por vez primera en la sección 3-4. Por ejemplo, los pulsos mostrados en la figura 3-14a representan una señalización multinivel de $L = 4$, donde cada nivel porta dos bits de información, como lo muestra la tabla 3-3. Ahora agregue un bit de codificación de redundancia a los dos bits de información para generar ocho niveles de amplitud para los pulsos, pe-

ro mantenga el mismo ancho de pulso, de tal manera que la forma de onda tendrá el mismo ancho de banda. Entonces el bit de redundancia, debido a la codificación, puede acomodarse sin necesidad de aumentar el ancho de banda. Este concepto puede generalizarse a una señalización multinivel con valores complejos, como se muestra al final de la sección 5-10. En resumen, la TCM integra el diseño de modulación de formas de onda con el diseño de codificación, manteniendo al mismo tiempo el ancho de banda de la forma de onda sin codificación.

Cuando se implementa un código convolucional de una longitud de restricción de $K = 3$, esta técnica de TCM produce una ganancia de codificación de 3 dB relativa a una señal sin codificación que posee el mismo ancho de banda y la misma velocidad de información. Se pueden alcanzar casi 6 dB de ganancia de codificación si se utilizan codificadores con una longitud de restricción igual a 9. Los códigos con longitud de restricción más grandes no son difíciles de generar, pero el decodificador correspondiente para éstos es bastante complicado. Sin embargo, los circuitos integrados de muy alta velocidad (VHSIC) hacen factible dicho decodificador.

Los módems para computadora de 9,600 bit/s CCITT V.32, 14,400 bit/s CCITT V.33bis y 28,800 bit/s CCITT V.34 utilizan TCM. El módem CCITT V.32 posee una ganancia de codificación de 4 dB y está descrito en el ejemplo 4 del documento de Wei [Wei, 1983□CCITT Study Group XVII, 1984].

Para profundizar en el estudio de la codificación, el lector puede consultar varios excelentes textos sobre el tema [Blahut, 1983□Clark y Cain, 1981□Gallagher, 1968□Lin y Costello, 1983□McEliece, 1977□Peterson y Weldon, 1972□Sweeney, 1991□Viterbi y Omura, 1979].

1-12 AVANCE

A partir de las discusiones anteriores observamos la necesidad de algunas herramientas básicas para la comprensión y diseño de los sistemas de comunicación. Algunas de las herramientas primordiales requeridas son los modelos matemáticos para representar señales, ruido y sistemas lineales. El capítulo 2 proporciona estas herramientas. Está dividido en categorías amplias acerca de las propiedades de señales y ruido, transformadas y espectros de Fourier, representaciones ortogonales, representaciones limitadas por banda y descripciones de sistemas lineales. También se definen las medidas de ancho de banda.

1–13 EJEMPLOS DE ESTUDIO

SA1-1 Cálculo de línea de vista (LOS) La antena para una estación televisora (TV) está ubicada en la cima de una torre de transmisión de 1,500 pies de altura. Calcule la cobertura de LOS para la estación de TV si la antena receptora (en el área de zona marginal) está localizada 20 pies por encima del suelo.

Solución: Utilizando la ecuación (1-6) encontramos que la distancia de la torre transmisora de TV al horizonte de radio es de

$$d_1 = \sqrt{2h} = \sqrt{2(1{,}500)} = 54.8 \text{ millas}$$

La distancia de la antena receptora al horizonte de radio es de

$$d_2 = \sqrt{2(20)} = 6.3 \text{ millas}$$

Entonces, el radio total para el contorno de cobertura de LOS (el cual es un círculo alrededor de la torre de transmisión) es de

$$d = d_1 + d_2 = 61.1 \text{ millas}$$

SA1-2 Velocidad de datos de información Un teclado telefónico de tonos tiene los dígitos del 0 al 9 además de las teclas * y #. Asuma que la probabilidad de enviar * o # es de 0.005 y que la probabilidad de enviar del 0 al 9 es de 0.099 cada una. Si se presionan las teclas a una velocidad de 2 teclas/s, calcule la velocidad de datos para esta fuente.

Solución: Utilizando la ecuación (1-8) obtenemos que

$$H = \Sigma P_j \log_2\left(\frac{1}{P_j}\right)$$

$$= \frac{1}{\log_{10}(2)}\left[10(0.099)\ \log_{10}\left(\frac{1}{0.099}\right) + 2(0.005)\ \log_{10}\left(\frac{1}{0.005}\right)\right]$$

o

$$H = 3.38 \text{ bits/tecla}$$

Utilizando la ecuación (1-9), donde $T = 1/(2 \text{ teclas/s}) = 0.5$ s/tecla, resulta que

$$R = \frac{H}{T} = \frac{3.38}{0.5} = 6.76 \text{ bits/s}$$

SA1-3 Máxima velocidad de datos de una línea telefónica Un usuario de computadora planea adquirir un módem de alta velocidad para el envío de datos sobre su línea telefónica analógica. La línea telefónica tiene una relación de señal a ruido (SNR) de 25 dB y pasa audiofrecuencias que se encuentran más allá del rango de 300 a 3,200 Hz. Calcule la máxima velocidad de datos que puede enviarse sobre la línea telefónica cuando no existen errores en el lado receptor.

Solución: En términos de una relación de potencia, la SNR es $S/N = 10^{(25/10)} = 316.2$ (vea dB en el capítulo 2) y el ancho de banda es $B = 3{,}200 - 300 = 2{,}900$ Hz. Utilizando la ecuación (1-10) obtenemos que

$$R = B \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) = 2{,}900\ [\log_{10}(1 + 316.2)]/\log_{10}(2),$$

o

$$R = 24{,}097 \text{ bits/s}$$

Por consiguiente, una señal de módem de 28.8 kbit/s no trabajaría en esta línea telefónica□sin embargo, una señal de módem de 14.4 kbit/s debe transmitir datos sin error.

PROBLEMAS

1–1 Una estación de FM de alto poder con frecuencia de 96.9 MHz tiene una antena de 1,200 pies de altura. Si la señal se recibirá a 60 millas de la estación, □a qué altura en esta área de zona marginal deberá montar su antena el radioescucha?

★ **1–2** Utilizando geometría, compruebe que la ecuación (1-6) es correcta.

1–3 Un sistema de microondas terrestre está desarrollándose. Las antenas de transmisión y recepción estarán ubicadas en la cima de sendas torres de igual altura, una en el sitio transmisor y otra en el sitio receptor.

La distancia entre los dos puntos es de 25 millas. Calcule la altura mínima requerida para las torres en una trayectoria de transmisión de LOS.

1–4 Una celda de telefonía celular cuenta con una antena ubicada en la cima de una torre de 60 pies de altura. Un típico usuario de teléfono celular tiene su antena ubicada 4 pies por arriba del suelo. ¿Cuál es el radio de cobertura de esta celda para un usuario distante?

★ **1–5** Una fuente digital emite niveles de −1.0 y 0.0 V con una probabilidad de 0.2 cada uno y niveles de +3.0 y +4.0 V con una probabilidad de 0.3 cada uno. Evalúe la información promedio de la fuente.

1–6 Compruebe que el logaritmo de base 10 puede convertirse a logaritmos de base 2 utilizando la identidad $\log_2(x) = [1/\log_{10}(2)]\ \log_{10}(x)$.

1–7 Si todos los mensajes emitidos por una fuente son igualmente probables (en otras palabras, $P_j = P$), demuestre que la ecuación (1-8) se reduce a $H = \log_2(1/P)$.

★ **1–8** Para una fuente binaria:

(a) Demuestre que la entropía H es máxima cuando la probabilidad del envío de un 1 binario es igual a la probabilidad de enviar un 0 binario.

(b) Encuentre el valor de la máxima entropía.

★ **1–9** Una pantalla de cristal líquido (LCD) de siete segmentos de un dígito cada uno emite un 0 con una probabilidad de 0.25, un 1 y un 2 con una probabilidad de 0.15 cada uno, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 con una probabilidad de 0.07 cada uno, y un 9 con una probabilidad de 0.03. Encuentre la información promedio para esta fuente.

1–10 **(a)** Una fuente binaria envía un 1 binario con una probabilidad de 0.3. Evalúe la información promedio para esta fuente.

(b) Para una fuente binaria, encuentre la probabilidad de enviar un 1 binario y un 0 binario, tal que la información promedio de la fuente se maximice.

★ **1–11** Un teclado numérico cuenta con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Asuma que la probabilidad de enviar cualquier dígito es la misma que para el envío de cualquiera de los otros dígitos. Calcule qué tan frecuente deben presionarse los botones para poder enviar información a una velocidad de 2 bits/s.

1–12 **Remítase** al ejemplo 1-1 y asuma que se envían palabras de 12 dígitos de longitud sobre un sistema y que cada dígito puede tomar uno de dos valores posibles. La mitad de las posibles palabras tienen una probabilidad de ser transmitidas que es de $(\frac{1}{2})^{13}$ para cada una. La otra mitad tiene probabilidad igual a $3(\frac{1}{2})^{13}$. Encuentre la entropía para esta fuente.

1–13 Evalúe la capacidad de un canal de teleimpresora que tiene un ancho de banda de 300 Hz y una SNR de 30 dB.

★ **1–14** Asuma que una computadora terminal tiene 110 caracteres (en su teclado) y que cada caracter se envía utilizando palabras binarias.

(a) ¿Cuál es el número de bits requeridos para representar cada caracter?

(b) ¿Qué tan rápido pueden enviarse los caracteres (caracteres/s) sobre un canal de línea telefónica que posee un ancho de banda de 3.2 kHz y una SNR de 20 dB?

(c) ¿Cuál es el contenido de información para cada caracter si cada uno tiene la misma probabilidad de ser enviado?

1–15 Una línea telefónica analógica tiene una SNR de 45 dB y pasa audiofrecuencias mayores al rango de 300 a 3,200 Hz. Un módem será diseñado para transmitir y recibir datos simultáneamente (en otras palabras, *full duplex*) sobre dicha línea sin errores.

(a) Si se utiliza el rango de frecuencias de 300 a 1,200 Hz para la señal transmitida, ¿cuál es la máxima velocidad de transmisión de datos?

(b) Si se utiliza el rango de frecuencias de 1,500 a 3,200 Hz para la señal que se recibe simultáneamente, ¿cuál es la máxima velocidad de recepción de datos?

(c) Si se utiliza el rango completo de frecuencias de 300 a 3,200 Hz simultáneamente para la transmisión y recepción (utilizando un circuito híbrido como el que se describe en el capítulo 8, figura 8-4), ¿cuál es la máxima velocidad de transmisión y recepción de datos?

1–16 Utilizando las definiciones para los términos asociados con la codificación convolucional, dibuje un diagrama de bloques para un codificador convolucional que posea una velocidad de $R = \frac{2}{3}$ y una longitud de restricción de $K = 3$.

★ **1–17** Para el codificador convolucional mostrado en la figura P1–17, calcule los datos codificados de salida cuando los datos de entrada son $\mathbf{x} = [10111]$. (El primer bit de entrada es el elemento más a la izquierda del vector de renglón **x**.)

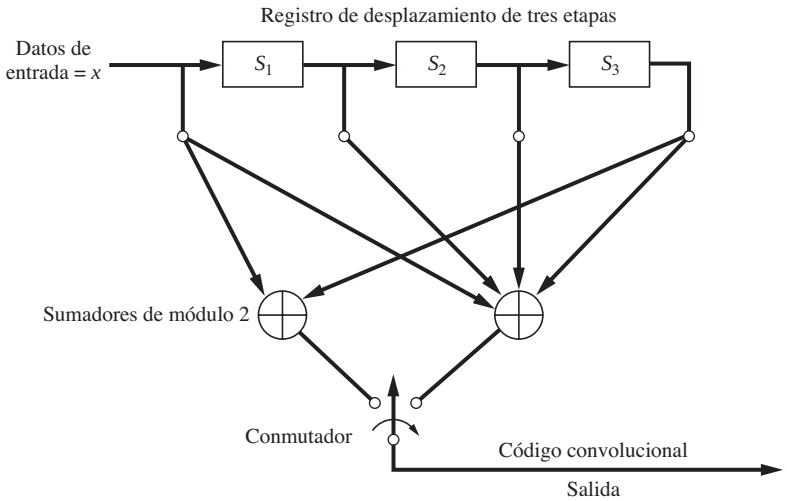
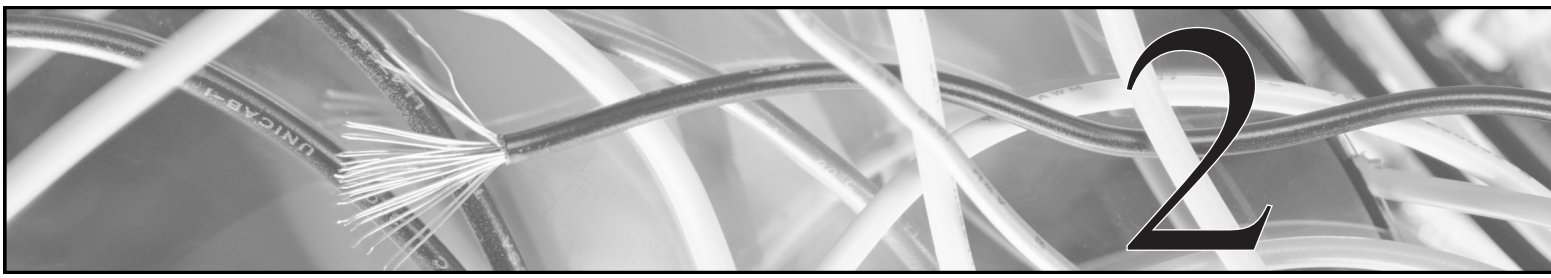


Figura P1–17

Capítulo



2

SEÑALES Y ESPECTROS

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Propiedades básicas de señales (DC, RMS, dBm y potencia)
- Transformada y espectros de Fourier
- Sistemas lineales y distorsión lineal
- Señales limitadas por banda y muestreo
- Transformada discreta de Fourier
- Ancho de banda de señales

2–1 PROPIEDADES DE SEÑALES Y RUIDO

En los sistemas de comunicación, la forma de onda recibida es usualmente dividida en parte deseada que contiene la información o señal, y en la parte residual o indeseada, llamada *ruido*.

Este capítulo desarrolla herramientas matemáticas que facilitan la descripción de señales y ruido desde un punto de vista de formas de onda determinísticas (el capítulo 6 presenta el enfoque de la forma de onda aleatoria). Las formas de onda se representarán mediante expresiones matemáticas directas, o con series ortogonales, como las de Fourier. Las propiedades de estas formas de onda tales como su valor de DC, su valor cuadrático medio (RMS), potencia normalizada, espectro de magnitud, espectro de fase, densidad espectral de potencia y ancho de banda son también establecidas. Además se estudiarán los efectos de la filtración lineal.

La forma de onda de interés puede ser el voltaje como una función del tiempo, $v(t)$, o la corriente como una función del tiempo, $i(t)$. Las mismas técnicas matemáticas pueden utilizarse cuando se trabaja con cualquiera de estos tipos de forma de onda. Por lo tanto, como enfoque general, las formas de onda se representarán por medio de $w(t)$ cuando el análisis se aplique a cualesquier caso.

Formas de onda físicamente realizables

Las formas de onda prácticas que son *físicamente realizables* (es decir, medibles en un laboratorio) satisfacen varias condiciones:[1]

1. La forma de onda tiene valores significativos diferentes a cero sobre un intervalo compuesto de tiempo finito.
2. El espectro de la forma de onda tiene valores significativos sobre un intervalo compuesto de frecuencia finito.
3. La forma de onda es una función continua en el tiempo.
4. La forma de onda tiene un valor pico finito.
5. La forma de onda sólo tiene valores reales. Esto es, en cualquier momento no puede tener un valor complejo de $a + jb$, donde b es diferente de cero.

La primera condición es necesaria debido a que los sistemas (y sus formas de onda) parecen existir por una cantidad finita de tiempo□as señales físicas también producen una cantidad finita de energía. La segunda se requiere debido a que cualquier medio de transmisión, ya sean cables, cables coaxiales, guías de onda o cable de fibra óptica, tienen un ancho de banda restringido. La tercera condición es una consecuencia de la segunda y se hará más clara con la ayuda del análisis espectral, desarrollado en la sección 2-2. La cuarta es menester porque los dispositivos físicos se destruyen si está presente un valor infinito de voltaje o de corriente dentro del dispositivo. La quinta condición resulta del hecho de que sólo las formas de onda reales pueden observarse en el mundo real a pesar de que las *propiedades* de una forma de onda, como los espectros, pueden ser complejos. Más adelante, en el capítulo 4, se mostrará que las formas de onda complejas pueden ser muy útiles en la representación matemática de señales pasabanda reales.

Los modelos matemáticos que no cumplen alguna o todas las condiciones mencionadas se utilizan por una razón principal: simplificar el análisis matemático. Sin embargo, si se es cuidadoso con el modelo matemático, puede obtenerse el resultado correcto cuando se interpreta la respuesta adecuadamente. Por ejemplo, considere que la forma de onda digital mostrada en la figura 2-1 presenta discontinuidades durante los tiempos de conmutación. Esta situación no cumple la tercera condición, aquella sobre la necesidad de que la forma de onda física sea continua. La forma de onda física tiene una duración finita (decae a cero antes de $t = \pm\infty$), pero la duración de la forma de onda matemática se extiende hasta el infinito.

En otras palabras, el modelo matemático asume que la forma de onda física ha existido en su condición de estado estable durante todo el tiempo. El análisis espectral del modelo aproximará los resultados correctos, excepto para los componentes con frecuencias extremadamente altas. La potencia promedio que se calcula del modelo resultará en el valor correcto para la potencia promedio de la señal física que se medirá durante un intervalo de tiempo adecuado. La energía total de la señal del modelo matemático será infinita porque se extiende a un tiempo infinito, mientras que la de la señal física será finita. Por consiguiente, el modelo no generará el valor correcto para la energía total de la señal física sin utilizar alguna información adicional. Sin embargo, el modelo puede utilizarse para calcular la energía de la señal física durante un intervalo de tiempo finito. Se dice que el modelo matemático es una *señal de potencia* debido a que tiene la propiedad de potencia finita (y energía infinita), mientras que la forma de onda física es una *señal de energía* debido a que tiene energía finita. (Las definiciones matemáticas para las señales de potencia y energía se presentarán

[1] Consulte el documento de Slepian [1976] para una discusión interesante sobre la primera y segunda condiciones.

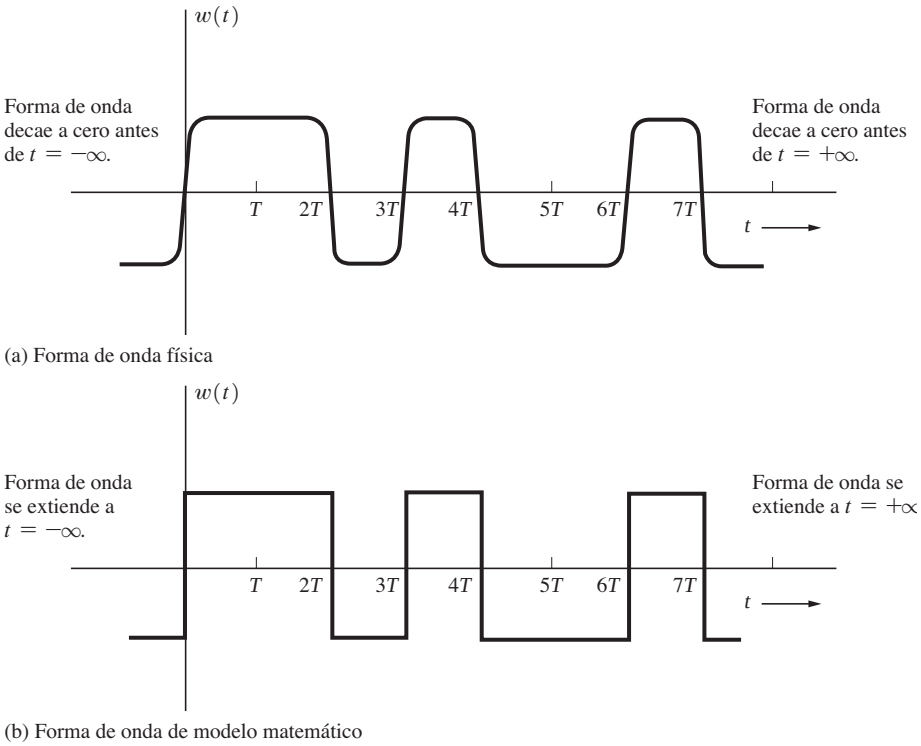


Figura 2–1 Formas de onda físicas y matemáticas.

en otra sección.) Todas las señales físicas son señales de energía, aunque a menudo se utilizan modelos matemáticos de señales de potencia para simplificar el análisis.

En resumen, las formas de onda se clasifican como señales o ruido, digitales o analógicas, determinísticas o no determinísticas, físicamente realizables o físicamente no realizables y pertenecientes a dos tipos: de potencia o de energía. La siguiente sección presentará clasificaciones adicionales, como periódicas y no periódicas.

Operador de promedio de tiempo

Algunas características útiles de las formas de onda son el valor de "corriente" directa (DC), la potencia promedio y el valor cuadrático medio (RMS). Antes de repasar dichos conceptos, debe definirse el operador de promedio de tiempo.

DEFINICIÓN. El *operador de promedio de tiempo*[2] está dado por

$$\langle [\cdot] \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [\cdot]\, dt \tag{2–1}$$

[2] El operador de promedio conjunto se define en el apéndice B.

Puede observarse que este operador es *lineal* debido a que, a partir de la ecuación (2-1), el promedio de la suma de dos cantidades es igual a la suma de sus promedios:[3]

$$\langle a_1 w_1(t) + a_2 w_2(t)\rangle = a_1\langle w_1(t)\rangle + a_2\langle w_2(t)\rangle \tag{2–2}$$

La ecuación (2-1) puede reducirse a una forma más simple dada por la ecuación (2-4) si el operador trabaja en una forma de onda *periódica*.

DEFINICIÓN. Una forma de onda $w(t)$ es *periódica* con un periodo de T_0 si

$$w(t) = w(t + T_0) \qquad \text{para toda } t \tag{2–3}$$

donde T_0 es el número positivo más pequeño que satisface esta relación.[4]

Por ejemplo, una forma de onda senoidal con frecuencia $f_0 = 1/T_0$ hertz es periódica, debido a que satisface la ecuación (2-3). A partir de esta definición se hace claro que una forma de onda periódica tendrá valores significativos sobre un intervalo de tiempo infinito $(-\infty, \infty)$. Por consecuencia, las formas de onda físicas no pueden ser realmente periódicas pero sí contar con valores periódicos sobre un intervalo de tiempo finito. Esto es, la ecuación (2-3) puede satisfacerse para t sobre algún intervalo finito, pero no para todos los valores de t.

TEOREMA. *Si la forma de onda involucrada es periódica, el operador de promedio de tiempo puede reducirse a*

$$\langle[\cdot]\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2+a}^{T_0/2+a} [\cdot]\, dt \tag{2–4}$$

donde T_0 *es el periodo de la forma de onda y una constante real arbitraria, la cual puede llevarse a cero.*

La ecuación (2-4) resulta justamente de la ecuación (2-1), ya que con referencia a ésta, las integrales sobre intervalos de tiempo sucesivos de T_0 segundos de anchura tendrán áreas idénticas, debido a que la forma de la onda es periódica con un periodo de T_0. Conforme estas integrales se suman, tanto el área total como T son proporcionalmente más grandes, lo que resulta en un valor para el promedio de tiempo igual al generado por la integración sobre un periodo y dividiéndolo por el ancho de tal intervalo, T_0.

En resumen, la ecuación (2-1) puede utilizarse para calcular el promedio de tiempo de cualquier tipo de forma de onda, aun cuando ésta sea o no periódica. La ecuación (2-4) es válida sólo para formas de onda periódicas.

Valor de DC

DEFINICIÓN. El valor de *DC* ("corriente" directa) de una forma de onda $w(t)$ está dado por su promedio de tiempo, $\langle w(t)\rangle$.

Por lo tanto,

$$W_{\text{dc}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} w(t)\, dt \tag{2–5}$$

[3] Consulte la ecuación (2-130) para la definición de linealidad.

[4] Las formas de onda no periódicas son llamadas por algunos autores *formas de onda aperiódicas*.

Para cualquier forma de onda física lo importante es la evaluación del valor de DC sólo sobre un intervalo finito de interés, por decir, de t_1 a t_2, tal que el valor de DC sea

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} w(t)\, dt$$

Sin embargo, si se utiliza un modelo matemático con una forma de onda de estado estable de magnitud infinita se obtendrá el resultado correcto utilizando nuestra definición, la ecuación (2-5), lo cual involucra un límite de $T \to \infty$. El ejemplo 2-1 demostrará esto en seguida. Más aún, como se expondrá en el capítulo 6, para el caso de formas de onda estocásticas ergódicas, el operador de promedio de tiempo $\langle [\cdot] \rangle$ puede reemplazarse por el operador de promedio conjunto $\overline{[\cdot]}$.

Potencia

En los sistemas de comunicación, si la potencia (promedio) de señal recibida es suficientemente grande en comparación a la del ruido, entonces la información podrá recuperarse. Este concepto se demostró mediante la fórmula de capacidad de canal de Shannon, ecuación (1-10). Por consiguiente, la potencia promedio es un concepto importante que requiere comprensión. Gracias a la física se conoce que la potencia está definida como trabajo por unidad de tiempo□el voltaje es trabajo por unidad de carga y la corriente es carga por unidad de tiempo. Esta es la base para la definición de potencia en términos de cantidades eléctricas.

DEFINICIÓN. Suponga que $v(t)$ denote el voltaje a través de un conjunto de terminales de circuito, y que $i(t)$ represente la corriente a la terminal, como la figura 2-2 lo muestra. La *potencia instantánea* (trabajo incremental dividido por el tiempo incremental) asociado con el circuito está dada por

$$p(t) = v(t)i(t) \tag{2–6}$$

donde la potencia instantánea fluye dentro del circuito cuando $p(t)$ es positiva y fluye fuera del circuito cuando $p(t)$ es negativa. La *potencia promedio* es

$$P = \langle p(t) \rangle = \langle v(t)i(t) \rangle \tag{2–7}$$

Ejemplo 2–1 EVALUACIÓN DE POTENCIA

Suponga que el circuito en la figura 2-2 contiene una lámpara fluorescente de 120 V a 60 Hz conectada a una configuración con un factor alto de potencia. Asuma que tanto el voltaje como la corriente son senoidales y están en fase (factor de potencia unitario), como lo muestra la figura 2-3.[5] El valor de DC de esta forma de onda (periódica) de voltaje es

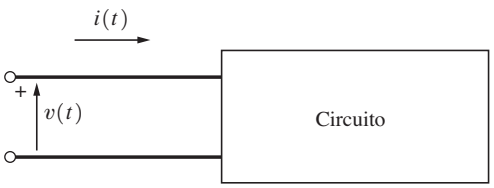


Figura 2–2 Convención de polaridad utilizada para el voltaje y la corriente.

[5] Pueden construirse circuitos con dos lámparas fluorescentes con la ayuda de una balastra (*ballast*) con un factor alto de potencia que suministra un factor de potencia total mayor a 90□ [Fink y Beaty, 1978].

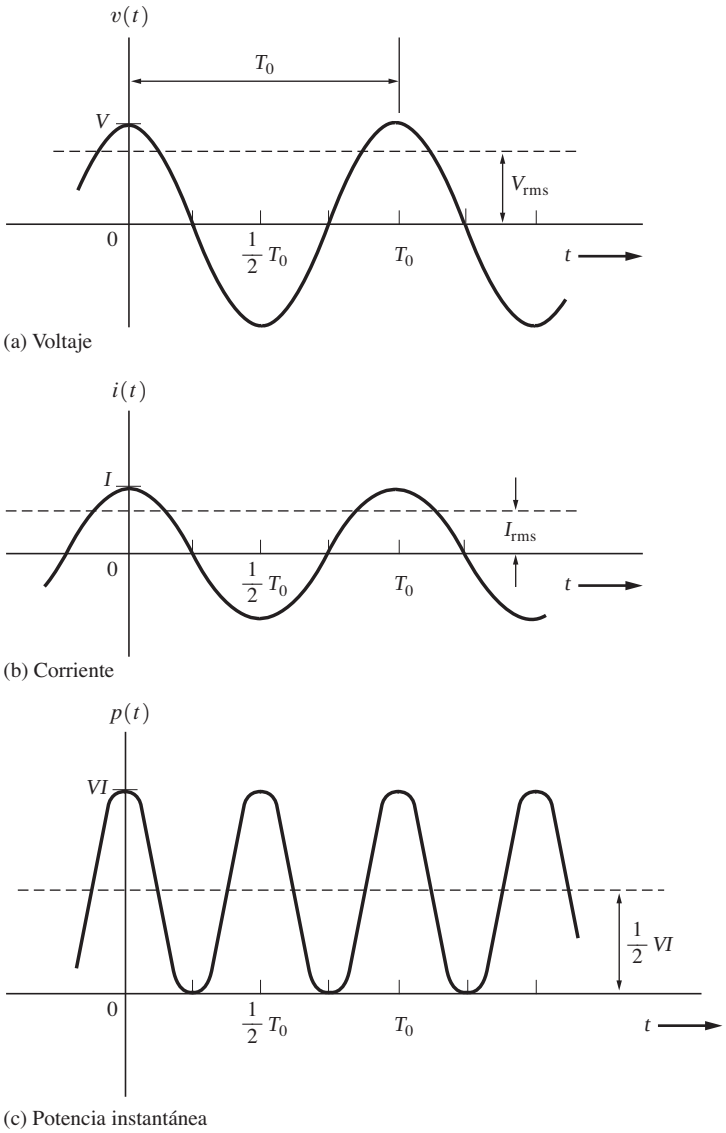


Figura 2–3 Formas de onda de estado estable para el ejemplo 2-1.

$$V_{dc} = \langle v(t) \rangle = \langle V \cos \omega_0 t \rangle$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} V \cos \omega_0 t \, dt = 0 \tag{2–8}$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T_0$ y $f_0 = 1/T_0 = 60$ Hz. De la misma manera, $I_{dc} = 0$. La potencia instantánea es

$$p(t) = (V \cos \omega_0 t)(I \cos \omega_0 t) = \tfrac{1}{2} VI(1 + \cos 2\omega_0 t) \tag{2–9}$$

La potencia promedio es

$$P = \langle \tfrac{1}{2} VI(1 + \cos 2\omega_0 t) \rangle$$

$$= \frac{VI}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} (1 + \cos 2\omega_0 t)\, dt$$

$$= \frac{VI}{2} \tag{2–10}$$

Como se observa de la ecuación (2-9) y la figura 2-3c, la potencia (es decir, luz emitida) ocurre a una velocidad de $2f_0 = 120$ pulsos por segundo. (De hecho, esta lámpara puede utilizarse como un estroboscopio para "congelar" mecánicamente a objetos en rotación.) La potencia pico es de VI y la potencia promedio es de $\frac{1}{2}VI$, donde V es el voltaje máximo e I es la corriente pico. Aún más, para este caso de un voltaje senoidal y una corriente senoidal, se observa que la potencia promedio pudiera haberse obtenido multiplicando $V/\sqrt{2}$ por $I/\sqrt{2}$.

Valor RMS y potencia normalizada

DEFINICIÓN. El *valor cuadrático medio (RMS)* de $w(t)$ es

$$W_{\text{rms}} = \sqrt{\langle w^2(t) \rangle} \tag{2–11}$$

TEOREMA. *Si una carga es resistiva (es decir, con un factor de potencia unitario), la potencia promedio es*

$$P = \frac{\langle v^2(t) \rangle}{R} = \langle i^2(t) \rangle R = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R}$$

$$= I_{\text{rms}}^2 R = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \tag{2–12}$$

donde R es el valor de la carga resistiva.

La ecuación (2-12) resulta de la ecuación (2-7) al utilizar la ley de Ohm, la cual es $v(t) = i(t)R$, y de la ecuación (2-11).

Continuando con el ejemplo 2-1, $V_{\text{rms}} = 120$ V, se puede observar a partir de la ecuación (2-11) que cuando se utilizan formas senoidales de las ondas, resulta que $V_{\text{rms}} = \text{V}/\sqrt{2}$ e $I_{\text{rms}} = I/\sqrt{2}$. Por lo tanto, utilizando la ecuación (2-12) se observa que la potencia promedio es de $\frac{1}{2}VI$, la cual es del mismo valor que la obtenida en la discusión anterior.

El concepto de potencia *normalizada* a menudo es utilizado por los ingenieros en comunicaciones. En él, se asume que R tiene un valor de 1 Ω, aun cuando puede asumir otro en el circuito real. Otra manera de expresar este concepto es decir que la potencia está dada con base en ohm por ohm. En los cálculos de la relación de señal de potencia a ruido, R se cancelará automáticamente, de tal manera que los valores normalizados de potencia se utilizarán para obtener la relación correcta. Si se requiere del valor exacto de potencia, por ejemplo, al final de un largo conjunto de cálculos, siempre puede obtenerse mediante la "denormalización" del valor normalizado. A partir de la ecuación (2-12) se descubre también que *la raíz cuadrada de la potencia normalizada es igual al valor RMS.*

DEFINICIÓN. La *potencia promedio normalizada* es

$$P = \langle w^2(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} w^2(t)\, dt \tag{2–13}$$

donde $w(t)$ representa una forma de onda real de voltaje o de corriente.

Formas de onda de energía y de potencia[6]

DEFINICIÓN. $w(t)$ es una *forma de onda de potencia* si y sólo si la potencia promedio normalizada P es finita y diferente de cero (es decir, $0 < P < \infty$).

DEFINICIÓN. La *energía total normalizada es*

$$E = \lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} w^2(t)\, dt \tag{2–14}$$

DEFINICIÓN. $w(t)$ es una *forma de onda de energía* si y sólo si la energía total normalizada es finita y diferente de cero (es decir, $0 < E < \infty$).

Con estas definiciones se observa que si una forma de onda se clasifica en uno de estos tipos no puede ser del otro tipo. Es decir, si $w(t)$ tiene una energía finita, la potencia promediada sobre un tiempo infinito es cero y si la potencia (promediada sobre un tiempo infinito) es finita, entonces la energía es infinita. Aún más, hay funciones matemáticas que poseen tanto energía como potencia infinitas y, por consecuencia, no pueden clasificarse en ninguna de estas dos categorías. Un ejemplo es cuando $w(t) = e^{-t}$. Las formas de onda físicamente realizables son del tipo de energía, pero a menudo se modelan a través de formas de onda de infinita duración del tipo de potencia. Los instrumentos de laboratorio que miden cantidades promedio, como el valor de DC, el RMS y la potencia promedio, calculan un promedio sobre un intervalo de tiempo finito. Esto es, T en la ecuación (2-1) se mantiene finita en lugar de aproximarse a un número grande. Por lo tanto, pueden obtenerse cantidades promedio diferentes de cero para señales (físicas) de energía. Por ejemplo, cuando el valor de DC se mide con un multímetro convencional (volt-ohm-miliamp) y causa movimiento en éste, entonces se establece el intervalo para el promedio de tiempo mediante el movimiento de la masa en el multímetro que proporciona un amortiguamiento. Por tanto, las cantidades promedio calculadas a partir de un modelo matemático del tipo de potencia (promediadas sobre un tiempo infinito) generarán los resultados medidos en el laboratorio (promediados sobre un tiempo finito).

Decibel

El *decibel* es una medida logarítmica de base 10 para relaciones o razones de potencia. Por ejemplo, la razón del nivel de potencia a la salida de un circuito en comparación con aquél a la entrada del mismo, a menudo se especifica a través de una ganancia en decibeles en lugar de una razón real.

DEFINICIÓN. La *ganancia en decibeles* de un circuito es[7]

$$\text{dB} = 10 \log \left(\frac{\text{potencia promedio de salida}}{\text{potencia promedio de entrada}} \right) = 10 \log \left(\frac{P_{\text{salida}}}{P_{\text{entrada}}} \right) \tag{2–15}$$

[6] Este concepto es conocido también por algunos autores como *señales de energía* y *señales de potencia*, pero se aplica tanto al ruido como a las formas de onda de la señal.

[7] Los logaritmos con base 10 se denotarán con $\log(\cdot)$ mientra que los logaritmos con base e se denotarán con $\ln(\cdot)$. Note que tanto los dB como la razón de $P_{\text{salida}}/P_{\text{entrada}}$ son cantidades sin dimensión.

Esta definición resulta en un número que indica el valor *relativo* de la *potencia de salida* con respecto a la *potencia de entrada*, pero no indica la magnitud real de los niveles de potencia involucrados. Si se presentan cargas resistivas, entonces la ecuación (2-12) puede utilizarse y reduce la ecuación (2-15) a

$$\text{dB} = 20 \log \left(\frac{V_{\text{rms salida}}}{V_{\text{rms entrada}}} \right) + 10 \log \left(\frac{R_{\text{entrada}}}{R_{\text{carga}}} \right) \tag{2–16}$$

o

$$\text{dB} = 20 \log \left(\frac{I_{\text{rms salida}}}{I_{\text{rms entrada}}} \right) + 10 \log \left(\frac{R_{\text{carga}}}{R_{\text{entrada}}} \right) \tag{2–17}$$

Note que se obtiene el mismo valor para los decibeles sin importar si se utilizó potencia, voltaje o corriente [ecuación (2-15), ecuación (2-16) o ecuación (2-17)] para obtener dicho valor. Esto es, los decibeles están definidos en términos del logaritmo de una razón de potencia pero también pueden calcularse de una razón de voltaje o de corriente.

Si se utilizan potencias normalizadas, entonces

$$\text{dB} = 20 \log \left(\frac{V_{\text{rms salida}}}{V_{\text{rms entrada}}} \right) = 20 \log \left(\frac{I_{\text{rms salida}}}{I_{\text{rms entrada}}} \right) \tag{2–18}$$

Esta ecuación no resulta en el valor verdadero para los decibeles, a menos que $R_{\text{entrada}} = R_{\text{carga}}$, sin embargo es una práctica común en ingeniería el uso de la ecuación (2-18) aún y cuando $R_{\text{entrada}} \neq R_{\text{carga}}$ y aún más si el número obtenido no es estrictamente correcto. Los ingenieros entienden que si se requiere el valor correcto, éste puede calcularse a partir del seudovalor si R_{entrada} y R_{carga} son conocidas.

Si se conoce el valor en dB, entonces se pueden obtener fácilmente la razón de potencia o la razón de voltaje si se invierten las ecuaciones apropiadas aquí presentadas. Por ejemplo, si se desea la razón de potencia, entonces la ecuación (2-15) puede invertirse para obtener

$$\frac{P_{\text{salida}}}{P_{\text{entrada}}} = 10^{\text{dB}/10} \tag{2–19}$$

La medida en decibeles puede también emplearse para expresar una medida de la razón o relación de potencia de señal a potencia del ruido, medida en algún punto de un circuito.

DEFINICIÓN. La *relación en decibeles de señal a ruido* es[8]

$$(\text{S/N})_{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{P_{\text{señal}}}{P_{\text{ruido}}} \right) = 10 \log \left(\frac{\langle s^2(t) \rangle}{\langle n^2(t) \rangle} \right) \tag{2–20}$$

Debido a que la potencia de señal es $\langle s^2(t) \rangle / R = V^2_{\text{rms señal}}/R$ y la potencia de ruido es $\langle n^2(t) \rangle / R = V^2_{\text{rms ruido}}/R$, esta definición es equivalente a

$$(\text{S/N})_{\text{dB}} = 20 \log \left(\frac{V_{\text{rms señal}}}{V_{\text{rms ruido}}} \right) \tag{2–21}$$

[8] Esta definición involucra la relación de la potencia *promedio de señal* con la potencia *promedio del ruido*. Una definición alterna también útil para algunas aplicaciones incluye la relación de potencia de señal *pico* con la potencia promedio del ruido. Consulte la sección 6-8.

La medida en decibeles puede también utilizarse para indicar niveles absolutos de potencia con respecto a algún nivel de referencia.

DEFINICIÓN. El *nivel de potencia en decibeles* con respecto a 1 mW es

$$\text{dBm} = 10 \log \left(\frac{\text{nivel de potencia real (watts)}}{10^{-3}} \right)$$

$$= 30 + 10 \log[\text{nivel de potencia real (watts)}] \tag{2–22}$$

donde la "m" en dBm denota una referencia en miliwatts. Los generadores de señales RF de laboratorio a menudo están calibrados en términos de dBm.

Se emplean también otras medidas en decibeles de niveles absolutos de potencia. Cuando se utiliza un nivel de referencia de 1 W, el nivel en decibeles está representado por dBW. Cuando se usa un nivel de referencia de 1 kW, el nivel en decibeles está denotado por dBk. Por ejemplo, una potencia de 5 W puede especificarse como +36.99 dBm, 6.99 dBW o −23.0 dBk. La industria de telefonía ocupa una medida en decibeles con un nivel "de ruido de referencia" de 1 picowatt (10^{-12} W) [Jordan, 1985]. Esta medida en decibeles está representada por dBrn. Un nivel de 0 dBrn corresponde a −90 dBm. La industria de televisión por cable (CATV) emplea un nivel de RMS de 1 milivolt a través de una carga de 75 Ω como referencia. Esta medida en decibeles se denota con dBmV, y está definida como

$$\text{dBmV} = 20 \log \left(\frac{V_{\text{rms}}}{10^{-3}} \right) \tag{2–23}$$

donde 0 dBmV corresponde a –48.75 dBm.

Debe enfatizarse que la expresión general para la evaluación de potencia está dada por la ecuación (2-7), misma que puede emplearse para la evaluación de la potencia promedio para cualquier tipo de forma de onda y condición de carga, mientras que la ecuación (2-12) sólo es útil para cargas resistivas. Otros textos, especialmente en el área de potencia, presentan ecuaciones que sólo son válidas para formas de onda senoidales.

Fasores

Las señales senoidales de prueba ocurren con tanta frecuencia en problemas de ingeniería eléctrica que a menudo se utiliza una nomenclatura abreviada llamada *notación de fasor*.

DEFINICIÓN. Se dice que un número complejo c es un *fasor* si representa una forma de onda *senoidal*. Es decir,

$$w(t) = |c| \cos[\omega_0 t + \angle c] = \text{Re}\{ce^{j\omega_0 t}\} \tag{2–24}$$

donde el fasor $c = |c|e^{j\angle c}$ y $\text{Re}\{\cdot\}$ denota la parte real de una cantidad compleja $\{\cdot\}$.

Se hará referencia a $ce^{j\omega_0 t}$ como el fasor *en rotación*, a diferencia del fasor c. Cuando se emplea c como representación de una forma de onda, se *entiende* que la forma de onda real que aparece en el circuito es una senoide, como lo especifica la ecuación (2-24). Debido a que el fasor es un número complejo, éste puede escribirse en forma cartesiana o polar. Es decir,

$$c \triangleq x + jy = |c|e^{j\varphi} \tag{2–25}$$

donde x y y son números reales a lo largo de coordenadas cartesianas y $|c|$ y $\angle c = \varphi = \tan^{-1}(y/x)$ son la longitud y el ángulo (números reales) en el sistema de coordenadas polares. La nomenclatura abreviada para la forma polar al lado derecho de la ecuación (2-25) es $|c| \angle \varphi$.

Por ejemplo, $25\ \text{sen}(2\pi 500t + 45°)$ podría representarse por el fasor $25\ \angle -45°$, ya que, del apéndice A, $\text{sen}\ x = \cos(x - 90°)$ y $25\ \text{sen}(\omega_0 t + 45°) = 25\ \cos(\omega_0 t - 45°) = \text{Re}\{(25e^{-j\pi/4})\ e^{j\omega_0 t}\}$, donde $\omega_0 = 2\pi f_0$ y $f_0 = 500$ Hz. De la misma manera, $10\ \cos(\omega_0 t + 35°)$ pueden denotarse por $10\ \angle 35°$.

Algunos autores emplean definiciones ligeramente diferentes para el fasor. Por ejemplo, $w(t)$ puede expresarse en términos de la parte imaginaria de una cantidad compleja en lugar de la parte real, como está definida en la ecuación (2-24). Además, el fasor puede denotar el RMS de $w(t)$, en lugar del valor pico [Kaufman y Seidman, 1979]. En este caso, $10\ \text{sen}(\omega_0 t + 45°)$ deberá denotarse con el fasor $7.07\ \angle 45°$. A lo largo de este libro se utilizará la definición dada por la ecuación (2-24). Los fasores pueden representar sólo formas de onda *senoidales*.

2–2 TRANSFORMADA Y ESPECTROS DE FOURIER

Definición

¿Cómo se encuentran las frecuencias de una forma de onda? Aún más, ¿cuál es la definición de frecuencia? Para las formas de onda de tipo senoidal se sabe que la frecuencia puede encontrarse mediante la evaluación de $f_0 = 1/T_0$, donde T_0 es el periodo de la senoide. Esto es, la frecuencia es la velocidad de ocurrencia de una onda con forma senoidal. Todas las demás ondas con forma no senoidal poseen más de una frecuencia.[9]

En la mayoría de las aplicaciones prácticas la forma de onda no es periódica, así que no existe un valor de T_0 para el cálculo de la frecuencia. Por consiguiente, se debe responder esta pregunta: ¿existe algún método general para encontrar las frecuencias de una forma de onda que funcionará para cualquier tipo de forma de onda? La respuesta es afirmativa: la transformada de Fourier (FT, por sus siglas en inglés), que encuentra los componentes de tipo senoidal en $w(t)$.

DEFINICIÓN. La *transformada de Fourier* (FT) de una forma de onda $w(t)$ es

$$W(f) = \mathcal{F}[w(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [w(t)]e^{-j2\pi ft}\, dt \tag{2–26}$$

donde $\mathcal{F}[\cdot]$ denota la transformada de Fourier de $[\cdot]$ y f es el parámetro de frecuencia con unidades de Hz (es decir, 1/s).[10] Esto *define* el término *frecuencia*, que es el parámetro f en la transformada de Fourier.

$W(f)$ es conocida también como un *espectro de dos lados* de $w(t)$, debido a que componentes de frecuencia tanto positivas como negativas se obtienen a partir de la ecuación (2-26). Debe aclararse que el espectro de una forma de onda de voltaje (o de corriente) se obtiene mediante un cálculo matemático que no aparece físicamente en un circuito real; f es tan sólo un parámetro (llamado *frecuencia*) que determina qué punto de la función espectral será evaluado.

[9] La forma de onda de voltaje constante o de corriente constante de *DC* tiene una frecuencia, $f = 0$. Este es un caso especial de una onda de coseno (es decir, forma de onda de tipo senoidal) donde $T_0 \to \infty$ y $f_0 \to 0$. Una onda periódica cuadrada tiene un número infinito de frecuencias armónicas impares, como muestra el ejemplo 2-12.

[10] Algunos autores definen a la FT en términos del parámetro de frecuencia $\omega = 2\pi f$ donde ω está en radianes por segundo. Dicha definición es idéntica a la ecuación (2-26) cuando ω es reemplazada con $2\pi f$. Este autor prefiere la ecuación (2-26) debido a que los analizadores de espectro están a menudo calibrados en unidades de hertz y no en radianes por segundo.

La FT se emplea para encontrar las frecuencias en $w(t)$. Se selecciona algún valor de f, como por ejemplo $f = f_0$, y se calcula $|W(f_0)|$. Si $|W(f_0)|$ es diferente de cero, entonces la frecuencia f_0 está presente en $w(t)$. En general, la integral de la FT se evalúa una y otra vez para todos los valores posibles de f sobre el rango de $-\infty < f < \infty$ para encontrar todas las frecuencias en $w(t)$.

Es fácil demostrar por qué la FT encuentra las frecuencias en $w(t)$. Por ejemplo, suponga que $w(t) = 1$. Para esta forma de onda de DC, la integral de la ecuación (2-26) es $e^{-j2\pi ft} = \cos 2\pi ft - j \operatorname{sen} 2\pi ft$ y, por consecuencia, la integral de la FT es cero (siempre y cuando $f \neq 0$), debido a que el área bajo una onda senoidal sobre múltiples periodos es de cero. Sin embargo, si se selecciona una $f = 0$, entonces la integral de la FT no es cero. Por lo tanto, como se espera, la ecuación (2-26) identifica $f = 0$ como la frecuencia de $w(t) = 1$. En otro ejemplo, dejemos que $w(t) = 2 \operatorname{sen} 2\pi f_0 t$. Para este caso, la integral de la ecuación (2-26) es $\operatorname{sen} 2\pi(f_0 - f)t + \operatorname{sen} 2\pi(f_0 + f)t - j \cos 2\pi(f_0 - f)t + \cos 2\pi(f_0 + f)t$ y la integral es diferente de cero cuando $f = f_0$ o cuando $f = -f_0$.[11] La FT encuentra las frecuencias en $w(t)$ en esta manera.

La evaluación directa de la integral de la FT puede ser difícil, así que una lista de técnicas alternativas de evaluación es bastante útil. La integral de la FT, la ecuación (2-26), puede evaluarse mediante el uso de

1. Integración directa.[12] *Consulte el ejemplo 2-2.*
2. Tablas de transformadas de Fourier o transformadas de Laplace. *Consulte la tabla 2-2 y el ejemplo 2-9.*
3. Teoremas de la FT. *Consulte la tabla 2-1 y el ejemplo 2-3.*
4. Superposición para dividir el problema en dos o más problemas simples. *Consulte el ejemplo de estudio SA-5.*
5. Diferenciación o integración de $w(t)$. *Consulte el ejemplo 2-6.*
6. Integración numérica de la integral de la FT en la PC por medio de funciones de integración en MATLAB o MathCAD. *Consulte el ejemplo 2-5 y el archivo E2_055N.M.*
7. Transformada rápida de Fourier (FFT) en la PC por medio de funciones de FFT en MATLAB o MathCAD. *Consulte la figura 2-21, archivo FIG2_21.M y la figura 2-22, archivo FIG2_22.M.*

Estas técnicas de evaluación se desarrollan durante el resto del presente capítulo.

A partir de la ecuación (2-26), y debido a que $e^{-j2\pi ft}$ es complejo, entonces $W(f)$ es una función compleja de frecuencia. $W(f)$ puede descomponerse en dos funciones reales $X(f)$ y $Y(f)$ tal que

$$W(f) = X(f) + jY(f) \tag{2–27}$$

lo cual es idéntico a escribir un número complejo en términos de pares de números reales que pueden graficarse en un sistema de coordenadas cartesianas de dos dimensiones. Por esta razón, la ecuación (2-27) a veces se conoce como forma *en cuadratura*, o forma *cartesiana*. De la misma manera, la ecuación (2-26) puede escribirse equivalentemente en términos de un sistema de coordenadas polares, en donde el par de funciones reales denota la magnitud y la fase:

$$W(f) = |W(f)|e^{j\theta(f)} \tag{2–28}$$

[11] La frecuencia de la onda de seno es f_0, pero la FT encuentra tanto f_0 como a su reflejo $-f_0$, como se explica en la discusión seguida del ejemplo 2-4.

[12] La integración de contorno, cubierta en un curso de matemáticas sobre variables complejas, es también una técnica útil de integración.

Esto es,

$$|W(f)| = \sqrt{X^2(f) + Y^2(f)} \quad \text{y} \quad \theta(f) = \tan^{-1}\left(\frac{Y(f)}{X(f)}\right) \tag{2–29}$$

Esto se conoce como la forma de *magnitud-fase* o forma *polar*. Para determinar la presencia de ciertos componentes de frecuencia, se examina el espectro de magnitud $|W(f)|$, al cual los ingenieros se refieren libremente como el *espectro*.

La forma de onda de tiempo puede calcularse a partir del espectro empleando la *transformada inversa de Fourier*

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(f) e^{j2\pi ft}\, df \tag{2–30}$$

Se dice que las funciones $w(t)$ y $W(f)$ constituyen un *par de transformada de Fourier*, donde $w(t)$ es la descripción en el dominio del tiempo y $W(f)$ es la descripción en el dominio de frecuencia. En este libro, la función en el dominio del tiempo se denota con una letra minúscula, mientras que la función en el dominio de frecuencia está representada por una letra mayúscula. La nomenclatura abreviada para el emparejamiento entre los dos dominios se denotará mediante una doble flecha: $w(t) \leftrightarrow W(f)$.

La forma de onda $w(t)$ es transformable por Fourier (es decir, cumple con las suficientes condiciones) si satisface ambas *condiciones de Dirichlet*:

- Sobre cualquier intervalo de tiempo finito, la función $w(t)$ es de valor único con un número finito de máximos y mínimos y el número de discontinuidades (si existen) es finito.
- $w(t)$ es absolutamente integrable. Es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|\, dt < \infty \tag{2–31}$$

Aunque estas condiciones son suficientes, no son necesarias. De hecho, algunos de los ejemplos dados a continuación no satisfacen las condiciones de Dirichlet, pero aun así la transformada de Fourier puede encontrarse.

Una condición suficiente más débil para la existencia de la transformada de Fourier es

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2\, dt < \infty \tag{2–32}$$

donde E es la energía normalizada [Goldber, 1961]. Esta es la condición de energía finita que todas las formas de onda físicamente realizables satisfacen. Por lo tanto, todas las formas de onda físicas encontradas en la práctica de la ingeniería son transformables por Fourier.

Debe notarse que los matemáticos a veces emplean otras definiciones para la transformada de Fourier en lugar de la ecuación (2-26). Sin embargo, en estos casos, la ecuación para las transformadas inversas correspondientes, equivalentes a la ecuación (2-30), también serían diferentes, tal que cuando la transformada y su inversa se utilizan en conjunto, la $w(t)$ original podrá recuperarse. Esta es una consecuencia del teorema de la integral de Fourier, el cual es

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) e^{j2\pi f(t-\lambda)} d\lambda\, df \tag{2–33}$$

La ecuación (2-33) puede descomponerse en las ecuaciones (2-26) y (2-30), así como en otras definiciones para los pares de transformada de Fourier. El teorema de la integral de Fourier es estrictamente verdadero sólo para funciones bien comportadas (es decir, formas de onda físicas). Por ejemplo, si $w(t)$ es una onda cuadrada ideal, entonces un punto de discontinuidad de $w(\lambda)$, denotado por λ_0, entonces $w(t)$ tendrá un valor el cual es el promedio de dos valores obtenidos para $w(\lambda)$ a cada lado del punto de discontinuidad λ_0.

Ejemplo 2–2 ESPECTRO DE UN PULSO EXPONENCIAL

Suponiendo que $w(t)$ sea un pulso exponencial en decaída que se enciende en $t = 0$. Es decir,

$$w(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Resolviendo directamente la integral de la FT, se obtiene que

$$W(f) = \int_0^\infty e^{-t} e^{-j2\pi ft}\, dt = \frac{e^{-(1+j2\pi f)t}}{1 + j2\pi f}\Bigg|_0^\infty$$

o

$$W(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f}$$

En otras palabras, el par de la FT es

$$\left.\begin{cases} e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}\right\} \leftrightarrow \frac{1}{1 + j2\pi f} \tag{2–34}$$

El espectro puede expresarse también en términos de las funciones en cuadratura racionalizando el denominador de la ecuación (2-34)□por lo tanto,

$$X(f) = \frac{1}{1 + (2\pi f)^2} \quad \text{y} \quad Y(f) = \frac{-2\pi f}{1 + (2\pi f)^2}$$

La forma de magnitud-fase es

$$|W(f)| = \sqrt{\frac{1}{1 + (2\pi f)^2}} \quad \text{y} \quad \theta(f) = -\tan^{-1}(2\pi f)$$

Se presentarán más ejemplos después de desarrollar algunos teoremas útiles.

Propiedades de las transformadas de Fourier

A partir de la definición del espectro dada por la ecuación (2-26) surgen muchos teoremas útiles e interesantes. Uno de particular interés es producto de trabajar con formas de onda reales. En cualquier circuito físico que puede construirse, las formas de onda de voltaje (o de corriente) son funciones reales (a diferencia de funciones complejas) de tiempo.

TEOREMA. *La simetría espectral de señales reales. Si $w(t)$ es real, entonces*

$$W(-f) = W^*(f) \tag{2–35}$$

(El asterisco de superíndice denota una operación de conjugado.)

Demostración. A partir de la ecuación (2-26) se obtiene que

$$W(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) e^{j2\pi ft}\, dt \tag{2–36}$$

y tomando el conjugado de la ecuación (2-26) resulta en

$$W^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w^*(t) e^{j2\pi ft}\, dt \tag{2–37}$$

Pero ya que $w(t)$ es real, $w^*(t) = w(t)$ y la ecuación (2-35) sigue debido a que los lados derechos de las ecuaciones (2-36) y (2-37) son iguales. Puede también mostrarse que si $w(t)$ es real y resulta ser una función par de t, entonces $W(f)$ también es *real*. De manera similar, si $w(t)$ es real y es una función impar de t, entonces $W(f)$ es *imaginaria*.

Otro corolario útil de la ecuación (2-35) es que, para una $w(t)$ real, el espectro de magnitud es par alrededor del origen (es decir, de $f = 0$), o

$$|W(-f)| = |W(f)| \tag{2–38}$$

y el espectro de fase es impar alrededor del origen:

$$\theta(-f) = -\theta(f) \tag{2–39}$$

Esto puede demostrarse fácilmente escribiendo el espectro en forma polar:

$$W(f) = |W(f)| e^{j\theta(f)}$$

□ entonces

$$W(-f) = |W(-f)| e^{j\theta(-f)}$$

y también

$$W^*(f) = |W(f)| e^{-j\theta(f)}$$

Utilizando la ecuación (2-35) se observa que las ecuaciones (2-38) y (2-39) son verdaderas.

En resumen, con base en la discusión previa, las siguientes son algunas propiedades de la transformada de Fourier:

- f, llamada frecuencia y con unidades de hertz, es sólo un parámetro de la FT que especifica cuál es la frecuencia que se desea encontrar en la forma de onda $w(t)$.
- La FT busca la frecuencia f en la $w(t)$ sobre *todo* el tiempo, es decir, sobre el rango de

$$-\infty < t < \infty$$

- $W(f)$ puede ser compleja, aun cuando $w(t)$ sea real.
- Si $w(t)$ es real, entonces $W(-f) = W^*(f)$.

Teorema de Parseval y densidad espectral de energía

Teorema de Parseval.

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_1(t)w_2^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(f)W_2^*(f)\,df \tag{2–40}$$

Si $w_1(t) = w_2(t) = w(t)$, entonces el teorema se reduce al

Teorema de energía de Rayleigh, el cual es

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |W(f)|^2\,df \tag{2–41}$$

Demostración. Trabajando con el lado izquierdo de la ecuación (2-40) y utilizando la ecuación (2-30) para reemplazar $w_1(t)$, resulta en

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} w_1(t)w_2^*(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} W_1(f)e^{j2\pi ft}\,df\right] w_2^*(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_1(f)w_2^*(t)e^{j2\pi ft}\,df\,dt\end{aligned}$$

Intercambiando el orden de integración sobre f y t[13] se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_1(t)w_2^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(f)\left[\int_{-\infty}^{\infty} w_2(t)e^{-j2\pi ft}\,dt\right]^* df$$

Utilizando la ecuación (2-26) se produce la ecuación (2-40). El teorema de Parseval presenta un método alternativo para la evaluación de la energía empleando la descripción en el dominio de frecuencia en lugar de la definición en el dominio del tiempo. Esto lleva al concepto de la función de densidad espectral de energía.

Definición. La *densidad espectral de energía* (ESD, por sus siglas en inglés) está definida para las formas de onda de energía mediante

$$\mathscr{E}(f) = |W(f)|^2 \tag{2–42}$$

donde $w(t) \leftrightarrow W(f)$. $\mathscr{E}(f)$ tiene unidades de joules por hertz.

Empleando la ecuación (2-41) se observa que la energía total normalizada está dada por el área bajo la función de ESD:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{E}(f)\,df \tag{2–43}$$

Una función similar llamada *densidad espectral de potencia (*PSD, por sus siglas en inglés*)* puede definirse para formas de onda de potencia y se desarrolla en la sección 2-3 y en el capítulo 6.

Además del de Parseval, existen muchos otros teoremas de las transformadas de Fourier. La tabla 2-1 resume algunos de ellos. Estos teoremas pueden demostrarse sustituyendo la función de tiem-

[13] El teorema de Fubini establece que el orden de integración puede intercambiarse si todas las integrales son absolutamente convergentes. Es decir, que éstas tienen un valor finito cuando sus componentes se reemplazan con sus valores absolutos. Se asume que esta condición se satisface.

po correspondiente en la definición de la transformada de Fourier y reduciendo el resultado a aquel dado en la columna más a la derecha de la tabla. Por ejemplo, el teorema de cambio de escala se demuestra sustituyendo $w(at)$ en la ecuación (2-26). Así tenemos que

$$\mathcal{F}[w(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} w(at)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

Si dejamos que $t_1 = at$, y asumiendo que $a > 0$, se tiene que

$$\mathcal{F}[w(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a}\, w(t_1)e^{-j2\pi(f/a)t_1}\,dt_1 = \frac{1}{a}\,W\left(\frac{f}{a}\right)$$

Para $a < 0$, esta ecuación se convierte en

$$\mathcal{F}[w(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{a}\, w(t_1)e^{-j2\pi(f/a)t_1}\,dt_1 = \frac{1}{|a|}\,W\left(\frac{f}{a}\right)$$

Por lo tanto, ya sea para $a > 0$ o $a < 0$, obtenemos que

$$w(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}\,W\left(\frac{f}{a}\right)$$

Los otros teoremas en la tabla 2-1 se demuestran de una manera similar y directa, excepto el teorema de la integral, el cual es más difícil de derivar debido a que el resultado de la transformada involucra una función delta de Dirac $\delta(f)$. Este teorema puede demostrarse empleando el teorema de convolución, como se ilustra en el problema 2-36. El capítulo 4 discutirá el teorema de señal pasabanda con mayor detalle. Éste es la base para las técnicas de modulación digital y analógica cubiertas en los capítulos 4 y 5. En la sección 2-8 se estudiará la relación entre la transformada de Fourier y la transformada discreta de Fourier (DFT, por sus siglas en inglés).

Como se observará en los ejemplos que siguen, estos teoremas pueden simplificar bastante los cálculos requeridos para resolver problemas de transformada de Fourier. El lector debe estudiar la tabla 2-1 y prepararse para utilizarla cuando sea necesario. Después de evaluar la transformada de Fourier, debe asegurarse que sus propiedades, que son fáciles de verificar, se han satisfecho de otra manera se cometerá un error. Por ejemplo, si $w(t)$ es real,

- $W(-f) = W^*(f)$, o $|W(f)|$ es par y $\theta(f)$ es impar.
- $W(f)$ es real cuando $w(t)$ es par.
- $W(f)$ es imaginaria cuando $w(t)$ es impar.

Ejemplo 2–3 ESPECTRO DE UNA SENOIDAL AMORTIGUADA

Asumiendo que la senoidal amortiguada esté dada por

$$w(t) = \begin{cases} e^{-t/T}\,\text{sen}\,\omega_0 t, & t > 0,\ T > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

El espectro de esta forma de onda se obtiene evaluando la FT. Esto se logra fácilmente empleando el resultado del ejemplo anterior además de algunos de los teoremas de Fourier. A partir de la ecua-

TABLA 2–1 ALGUNOS TEOREMAS DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER[a]

Operación	Función	Transformada de Fourier
Linealidad	$a_1 w_1(t) + a_2 w_2(t)$	$a_1 W_1(f) + a_2 W_2(f)$
Retraso de tiempo	$w(t - T_d)$	$W(f)\ e^{-j\omega T_d}$
Cambio de escala	$w(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} W\left(\frac{f}{a}\right)$
Conjugación	$w^*(t)$	$W^*(-f)$
Dualidad	$W(t)$	$w(-f)$
Conversión de frecuencia de señal real [$w(t)$ es real]	$w(t)\cos(w_c t + \theta)$	$\frac{1}{2}[e^{j\theta} W(f - f_c) + e^{-j\theta} W(f + f_c)]$
Conversión de frecuencia de señal compleja	$w(t)\ e^{j\omega_c t}$	$W(f - f_c)$
Señal pasabanda	$\mathrm{Re}\{g(t)\ e^{j\omega_c t}\}$	$\frac{1}{2}[G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)]$
Diferenciación	$\frac{d^n w(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n W(f)$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} w(\lambda) d\lambda$	$(j2\pi f)^{-1} W(f) + \frac{1}{2} W(0)\ \delta(f)$
Convolución	$w_1(t) * w_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\lambda) \cdot w_2(t - \lambda)\ d\lambda$	$W_1(f) W_2(f)$
Multiplicación[b]	$w_1(t) w_2(t)$	$W_1(f) * W_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(\lambda)\ W_2(f - \lambda)\ d\lambda$
Multiplicación por t^n	$t^n w(t)$	$(-j2\pi)^{-n} \frac{d^n W(f)}{df^n}$

[a] $\omega_c = 2\pi f_c$.

[b] el * denota convolución, descrito a detalle por la ecuación (2-62).

ción (2-34) y utilizando el teorema de cambio de escala de la tabla 2-1, donde $a = 1/T$, se encuentra que

$$\begin{Bmatrix} e^{-t/T}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \frac{T}{1 + j(2\pi f T)}$$

Utilizando el teorema de conversión de frecuencia de señal real con $\theta = -\pi/2$, se obtiene

$$\begin{aligned} W(f) &= \frac{1}{2}\left\{e^{-j\pi/2}\ \frac{T}{1 + j2\pi T(f - f_0)} + e^{j\pi/2}\ \frac{T}{1 + j2\pi T(f + f_0)}\right\} \\ &= \frac{T}{2j}\left\{\frac{1}{1 + j2\pi T(f - f_0)} - \frac{1}{1 + j2\pi T(f + f_0)}\right\} \end{aligned} \tag{2–44}$$

donde $e^{\pm j\pi/2} = \cos(\pi/2) \pm j \operatorname{sen}(\pi/2) = \pm j$. Este espectro es complejo (es decir, ni real ni imaginario) debido a que $w(t)$ no cuenta con simetría par o impar alrededor de $t = 0$.

Como se espera, la ecuación (2-44) muestra que el pico del espectro de magnitud para la senoidal amortiguada ocurre a $f = \pm f_0$. Compare esto con el máximo del espectro de magnitud para la decaída exponencial (ejemplo 2-2) que ocurre a una $f = 0$. Esto es, el factor sen $w_0 t$ causó que el nivel máximo del espectro se moviera de $f = 0$ a $f = \pm f_0$.

Función delta de Dirac y función escalón unitario

DEFINICIÓN. La *función delta de Dirac* $\delta(x)$ está definida por

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\ \delta(x)\ dx = w(0) \tag{2–45}$$

donde $w(x)$ es cualquier función que es continua a un valor de $x = 0$.

En esta definición, la variable x puede ser de tiempo o de frecuencia, dependiendo de la aplicación. Una definición alternativa para $\delta(x)$ es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\ dx = 1 \tag{2–46a}$$

y

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \tag{2–46b}$$

donde ambas ecuaciones, (2-46a) y (2-46b), deberán satisfacerse. La función delta de Dirac no es una función verdadera, de ahí que se dice ser una función singular. Sin embargo, $\delta(x)$ puede definirse como una función en un sentido más general y tratada de tal manera en un ramo de las matemáticas llamado *funciones generalizadas* y la *teoría de distribuciones*.

A partir de la ecuación (2-45), la *propiedad de corrimiento* de la función δ es

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\ \delta(x - x_0)\ dx = w(x_0) \tag{2–47}$$

Esto es, la función δ obtiene el valor $w(x_0)$ de la integral.

En algunos problemas es también útil el empleo de la integral equivalente para la función δ, la cual es

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j2\pi xy}\ dy \tag{2–48}$$

donde se puede utilizar el signo de + o de − como sea necesario. Esto asume que $\delta(x)$ es una función par: $\delta(-x) = \delta(x)$. La ecuación (2-48) puede verificarse tomando la transformada de Fourier de la función delta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft}\ dt = e^0 = 1$$

y después tomando la transformada inversa de Fourier para ambos lados de esta ecuación□la ecuación (2-48) lo muestra. (Consulte el apéndice A para propiedades adicionales de la función delta.)

Otra función cercanamente relacionada a la función delta de Dirac es la función escalón unitario.

DEFINICIÓN. La *función escalón unitario* $u(t)$ es

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{2–49}$$

Debido a que $\delta(\lambda)$ es cero, excepto cuando $\lambda = 0$, la función delta de Dirac está relacionada con la función escalón unitario mediante

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)\, d\lambda = u(t) \tag{2–50}$$

y por consecuencia,

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \tag{2–51}$$

Ejemplo 2–4 ESPECTRO DE UNA SENOIDE

Encuentre el espectro de una forma de onda senoidal de voltaje que tiene una frecuencia de f_0 y un valor pico de A volts. Es decir,

$$v(t) = \text{A sen } \omega_0 t \quad \text{donde} \quad \omega_0 = 2\pi f_0$$

A partir de la ecuación (2-26), el espectro es

$$V(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A\left(\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \frac{A}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t}\, dt - \frac{A}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t}\, dt$$

Mediante la ecuación (2-48), estas integrales son equivalentes a las funciones delta de Dirac. Es decir,

$$V(f) = j\,\frac{A}{2}\,[\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)]$$

Note que el espectro es imaginario, como era esperado, debido a que $v(t)$ es real e impar. Además, se obtuvo una expresión significativa de la transformada de Fourier, aunque $v(t)$ era del tipo de energía infinita y no era absolutamente integrable. Es decir, esta $v(t)$ no satisface las condiciones de Dirichlet suficientes (pero no necesarias) dadas por las ecuaciones (2-31) y (2-32).

El espectro de magnitud es

$$|V(f)| = \frac{A}{2}\,\delta(f-f_0) + \frac{A}{2}\,\delta(f+f_0)$$

donde A es un número positivo. Debido a que sólo dos frecuencias ($f = \pm f_0$) están presentes, $\theta(f)$ está definida estrictamente sólo por estas dos frecuencias. Es decir, $\theta(f_0) = \tan^{-1}(-1/0) = -90°$ y $\theta(-f_0) = \tan^{-1}(1/0) = +90°$. Sin embargo, ya que $|V(f)| = 0$ para todas las frecuencias excepto $f = \pm f_0$ y $V(f) = |V(f)|e^{j\theta(t)}$, $\theta(f)$ puede considerarse como cualquier conjunto de valores convenientes para $f \neq \pm f_0$. Por lo tanto, el espectro de fase se toma como

(a) Espectro de magnitud (b) Espectro de fase ($\theta_0 = 0$)

Figura 2–4 Espectro de una onda de seno.

$$\theta(f) = \begin{Bmatrix} -\pi/2, & f > 0 \\ +\pi/2, & f < 0 \end{Bmatrix} \text{ radianes} = \begin{Bmatrix} -90°, & f > 0 \\ 90°, & f < 0 \end{Bmatrix}$$

La figura 2-4 exhibe gráficas de estos espectros. Como muestra la figura 2-4a, las *ponderaciones* de las funciones delta son las que se grafican, ya que es imposible graficar las funciones delta completas debido a que tienen valores infinitos. Se observa que el espectro de magnitud es par y el espectro de fase es impar, como se esperaba basándonos en las ecuaciones (2-38) y (2-39).

Ahora generalicemos la forma de onda senoidal a una con un ángulo de fase arbitrario de θ_0. Entonces

$$w(t) = A \text{ sen } (\omega_0 t + \theta_0) = A \text{ sen } [\omega_0(t + \theta_0/\omega_0)]$$

y, empleando el teorema de retraso de tiempo, el espectro se convierte en

$$W(f) = j\frac{A}{2}\, e^{j\theta_0(f/f_0)}\, [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$$

El espectro de magnitud resultante es el mismo que el obtenido para el caso en donde $\theta_0 = 0$. El nuevo espectro de fase es la suma del espectro de fase anterior más la función lineal $(\theta_0/f_0)f$. Sin embargo, como el espectro total es cero a excepción de $f = \pm f_0$, el valor para el espectro de fase puede asignarse arbitrariamente para todas las frecuencias a excepción de $f = \pm f_0$. Cuando $f = f_0$, la fase es de $(\theta_0 - \pi/2)$ radianes y cuando $f = -f_0$ la fase es de $-(\theta_0 - \pi/2)$ radianes.

Desde un punto de vista *matemático*, la figura 2-4 demuestra que dos frecuencias están presentes en la onda de seno, una a $f = +f_0$ y la otra a $f = -f_0$. Esto puede también observarse a partir de la expansión de la forma de onda de tiempo□esto es

$$v(t) = A \text{ sen } \omega_0 t = \frac{A}{j2}\, e^{j\omega_0 t} - \frac{A}{j2}\, e^{-j\omega_0 t}$$

lo cual implica que la onda senoidal consiste de dos fasores en rotación, uno en rotación con una frecuencia de $f = +f_0$ y otro en rotación con $f = -f_0$. Desde el punto de vista de la *ingeniería*, se dice que una frecuencia está presente, es decir, $f = f_0$, porque para cualquier forma de onda física (en otras palabras, real), la ecuación (2-35) muestra que para cualquier frecuencia positiva presente existe también una frecuencia matemática negativa. El fasor asociado con $v(t)$ es $c = 0 - jA = \text{A} \angle -90°$. Otra observación interesante es que el espectro de magnitud consiste en *líneas* (es decir, funciones delta de Dirac). Como la ecuación (2-109) muestra, las líneas son una consecuencia de que $v(t)$ es una función periódica. Si la senoide se enciende y se apaga, entonces la forma de onda resultante no

es periódica y su espectro es continuo, como se comprueba en el ejemplo 2-9. Una senoide amortiguada también tiene un espectro continuo, como demuestra el ejemplo 2-3.

Pulsos rectangulares y triangulares

Las siguientes formas de onda ocurren con frecuencia en problemas de comunicación, así que se definirán símbolos especiales para abreviar la nomenclatura.

DEFINICIÓN. Asumiendo que $\Pi(\cdot)$ denote un solo *pulso rectangular*. Entonces

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \triangleq \begin{cases} 1, & |t| \le \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \tag{2–52}$$

DEFINICIÓN. $\mathrm{Sa}(\cdot)$ denota la función[14]

$$\mathrm{Sa}(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \tag{2–53}$$

DEFINICIÓN. Considerando que $\Lambda(\cdot)$ denote la función triangular. Entonces

$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \triangleq \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{T}, & |t| \le T \\ 0, & |t| > T \end{cases} \tag{2–54}$$

La figura 2-5 muestra estas formas de onda. La sección A-9 (apéndice A) presenta una tabulación de $\mathrm{Sa}(x)$.

Ejemplo 2–5 ESPECTRO DE UN PULSO RECTANGULAR

El espectro se obtiene tomando la transformada de Fourier de $w(t) = \Pi(t/T)$.

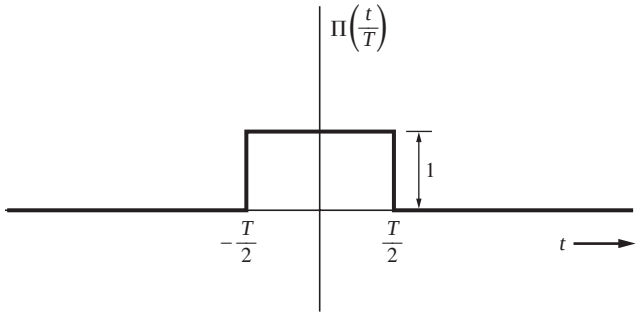
$$W(f) = \int_{-T/2}^{T/2} 1 e^{-j\omega t}\, dt = \frac{e^{-j\omega T/2} - e^{j\omega T/2}}{-j\omega}$$
$$= T\,\frac{\operatorname{sen}(\omega T/2)}{\omega T/2} = T\,\mathrm{Sa}(\pi T f)$$

Por lo tanto,

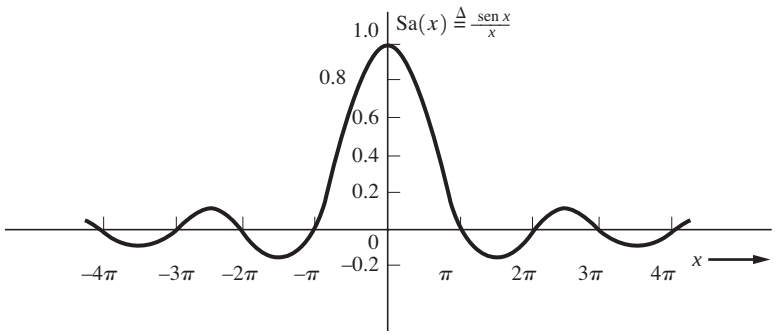
$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow T\,\mathrm{Sa}(\pi T f) \tag{2–55}$$

Una evaluación numérica de esta integral de la FT está dada por el archivo E2_055N.M. La figura 2-6a muestra el par de la transformada de Fourier que precedió. Note la relación inversa entre el ancho de

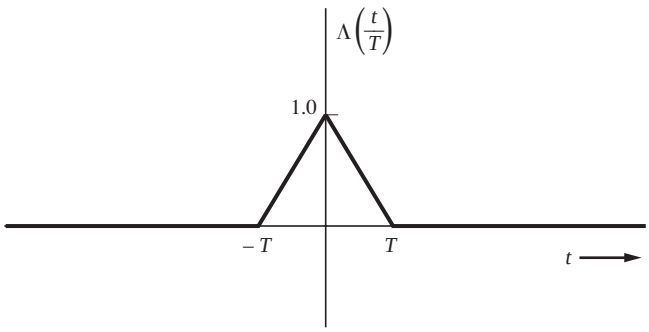
[14] Que está relacionada con la función sinc por medio de $\mathrm{Sa}(x) = \mathrm{sinc}(x/\pi)$ debido a que $\mathrm{sinc}(\lambda) \triangleq (\operatorname{sen} \pi\lambda)/\pi\lambda$. La notación de $\mathrm{Sa}(x)$ y $\mathrm{sinc}(x)$ representan el mismo concepto, pero pueden confundirse debido a la escala. En este libro a menudo se utilizará $(\operatorname{sen} x)/x$ para evitar confusión y no abarcar mucho espacio textual.



(a) Pulso rectangular



(b) Función Sa(x)



(c) Función triangular

Figura 2–5 Formas de onda y nomenclatura simbólica correspondiente.

pulso T y el cruce con cero espectral $1/T$. Además, mediante el uso del teorema de dualidad (listado en la tabla 2-1), el espectro de un pulso (sen x)/x es un rectángulo. Es decir, considerando que $\Pi(x)$ es una función par y aplicando el teorema de dualidad a la ecuación (2-55), obtenemos

$$T\,\text{Sa}(\pi T t) \leftrightarrow \Pi\left(-\frac{f}{T}\right) = \Pi\left(\frac{f}{T}\right)$$

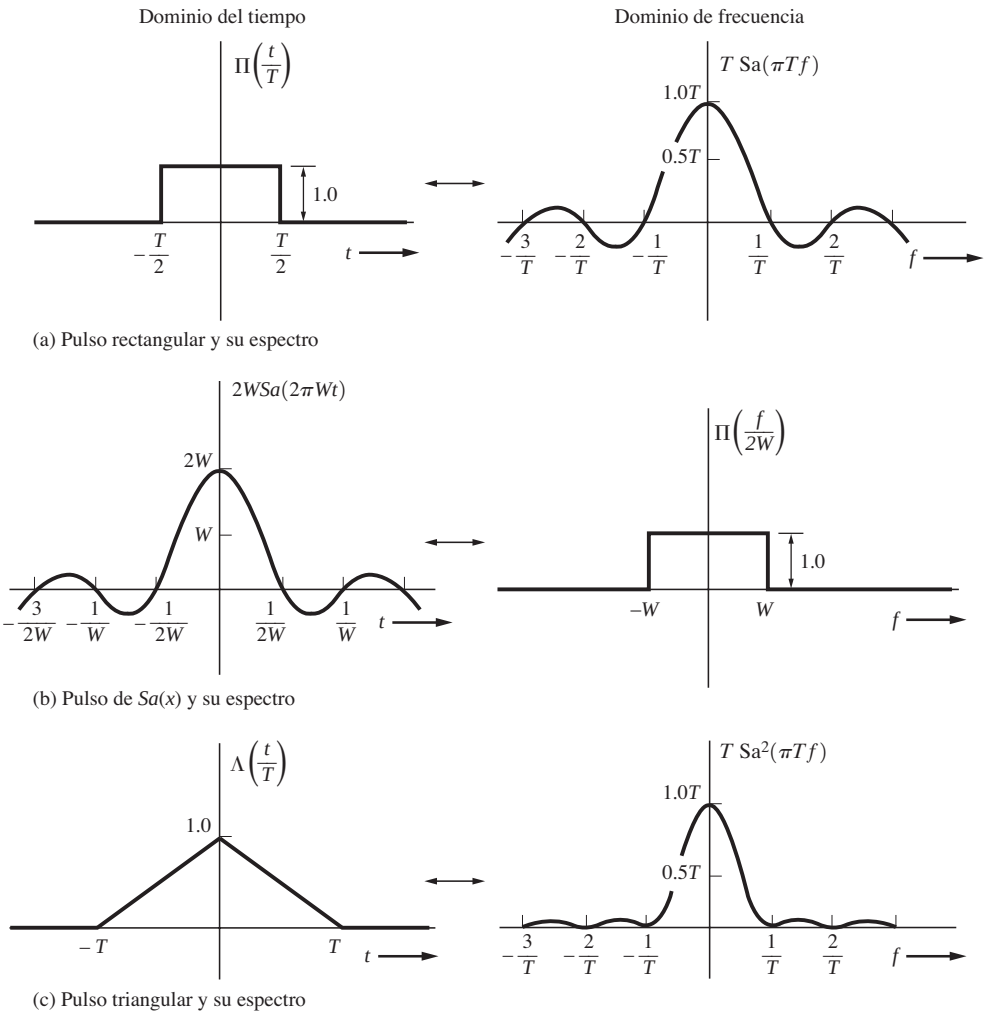


Figura 2–6 Espectros de pulsos rectangular, (sen x)/x y triangular.

Reemplazando el parámetro T con $2W$ obtenemos el par de la transformada de Fourier.

$$2W\ \mathrm{Sa}(2\pi W t) \leftrightarrow \Pi\left(\frac{f}{2W}\right) \tag{2–56}$$

donde W es el ancho de banda absoluto en hertz. Este par de la transformada de Fourier también se muestra en la figura 2-6b.

Los espectros mostrados en la figura 2-6 son reales debido a que los pulsos en el dominio del tiempo son reales y pares. Si los pulsos se desplazan en el tiempo para destruir la simetría par, entonces los espectros serán complejos. Por ejemplo, teniendo que

$$v(t) = \begin{Bmatrix} 1, & 0 < t < T \\ 0, & t \text{ en cualquier otro valor} \end{Bmatrix} = \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

Entonces, empleando el teorema de retraso de tiempo y la ecuación (2-55) obtenemos el espectro

$$V(f) = Te^{-j\pi fT}\,\mathrm{Sa}(\pi Tf) \tag{2–57}$$

En términos de la notación en cuadratura, la ecuación (2-57) se convierte en

$$V(f) = \underbrace{[T\,\mathrm{Sa}(\pi fT)\,\cos(\pi fT)]}_{X(f)} + j\underbrace{[-T\,\mathrm{Sa}(\pi fT)\,\mathrm{sen}(\pi fT)]}_{Y(f)} \tag{2–58}$$

Examinando la ecuación (2-57) se encuentra que el espectro de magnitud es

$$|V(f)| = T\left|\frac{\mathrm{sen}\,\pi fT}{\pi fT}\right| \tag{2–59}$$

y el espectro de fase es

$$\theta(f) = \underline{\angle e^{-j\pi fT}} + \underline{\angle \mathrm{Sa}(\pi fT)} = -\pi fT + \begin{cases} 0, & \dfrac{n}{T} < |f| < \dfrac{n+1}{T}, \quad n \text{ par} \\ \pi, & \dfrac{n}{T} < |f| < \dfrac{n+1}{T}, \quad n \text{ impar} \end{cases} \tag{2–60}$$

El pulso rectangular es una de las formas de pulso más importantes y generalizadas porque su uso es muy conveniente en la representación de los datos binarios uno y cero. Por ejemplo, los circuitos de lógica TTL emplean pulsos rectangulares de 5 volts para representar los unos binarios y cero volts para representar los ceros binarios. La figura 3-15a muestra esto, donde $A = 5$. Otros ejemplos de la codificación por pulsos rectangulares se muestran en la figura 3-15.

El ancho de banda nulo para la señalización digital por pulso rectangular se obtiene de las ecuaciones (2-55) o (2-59). Esto es, *si el ancho de pulso de una señal digital es de T segundos, entonces el ancho de banda (es decir, el ancho de la banda de frecuencias donde la magnitud espectral no es pequeña) es de aproximadamente 1/T Hz.* Esto implica una amplia discusión sobre el ancho de banda de señal, la cual se pospone hasta la sección 2-9.

Ejemplo 2–6 ESPECTRO DE UN PULSO TRIANGULAR

El espectro de un pulso triangular se obtiene mediante la evaluación directa de la integral de la FT empleando ecuaciones para cada línea del triángulo por separado, como muestra la figura 2-16c. Otra opción, que permite obtener rápidamente la FT, es calcular ésta para la segunda *derivada* del triángulo. Se utilizará esta segunda opción para demostrar esta técnica. Asumiendo que

$$w(t) = \Lambda(t/T)$$

Entonces

$$\frac{dw(t)}{dt} = \frac{1}{T}\,u(t+T) - \frac{2}{T}\,u(t) + \frac{1}{T}\,u(t-T)$$

y

$$\frac{d^2w(t)}{dt^2} = \frac{1}{T}\,\delta(t+T) - \frac{2}{T}\,\delta(t) + \frac{1}{T}\,\delta(t-T)$$

Utilizando la tabla 2-2 se encuentra que el par de la FT para la segunda derivada es

$$\frac{d^2w(t)}{dt^2} \leftrightarrow \frac{1}{T}\, e^{j\omega T} - \frac{2}{T} + \frac{1}{T}\, e^{-j\omega T}$$

la cual puede reescribirse como

$$\frac{d^2w(t)}{dt^2} \leftrightarrow \frac{1}{T}\,(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})^2 = \frac{-4}{T}\,(\text{sen } \pi fT)^2$$

El par de la FT para la onda de forma original se obtiene empleando la tabla 2-1 y aplicando el teorema de la integral dos veces:

$$w(t) \leftrightarrow \frac{-4}{T}\,\frac{(\text{sen } \pi fT)^2}{(j2\pi f)^2}$$

Por lo tanto,

$$w(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow T\,\text{Sa}^2(\pi fT) \tag{2–61}$$

Esto se ilustra en la figura 2-6c.

Convolución

La operación de convolución, como aparece en la tabla 2-1, es muy útil. La sección 2-6 muestra cómo se aplica la operación de convolución cuando se evalúa la forma de onda a la salida de un sistema lineal.

DEFINICIÓN. La *convolución* de una forma de onda $w_1(t)$ con una forma de onda $w_2(t)$ y que produce una tercera forma de onda $w_3(t)$ es

$$w_3(t) = w_1(t) * w_2(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\lambda)\, w_2(t-\lambda)\, d\lambda \tag{2–62a}$$

donde $w_1(t) * w_2(t)$ es una nomenclatura abreviada para esta operación de integración y el * se lee como "convolucionada con".

Cuando se examina esta integral se observa que t es un parámetro y λ es la variable de integración.

Si se requiere la convolución de formas de onda discontinuas, es generalmente más fácil la evaluación de la integral equivalente

$$w_3(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\lambda)\, w_2(-(\lambda - t))\, d\lambda \tag{2–62b}$$

Por lo tanto, los componentes en la integral de la ecuación (2-62b) se obtienen mediante:

1. La inversión de tiempo de w_2 para obtener $w_2(-\lambda)$,
2. El desplazamiento en el tiempo de w_2 por t segundos para obtener $w_2(-(\lambda - t))$ y
3. Multiplicando este resultado por w_1 se obtienen los componentes de la integral $w_1(\lambda)\, w_2(-(\lambda - t))$.

Los ejemplos que siguen ilustran estas tres operaciones.

Ejemplo 2–7 CONVOLUCIÓN DE UN RECTÁNGULO CON UNA EXPONENCIAL

Asumiendo que

$$w_1(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{2}T}{T}\right) \qquad \text{y} \qquad w_2(t) = e^{-t/T}\,u(t)$$

como lo muestra la figura 2-7. De la implementación del tercer paso con la ayuda de la figura, se obtiene que la convolución de $w_1(t)$ con $w_2(t)$ es de 0 si $t < 0$ debido a que el producto $w_1(\lambda)\ w_2(-(\lambda - t))$ es cero para todos los valores de λ. Si $0 < t < T$, entonces la ecuación (2-62b) se convierte en

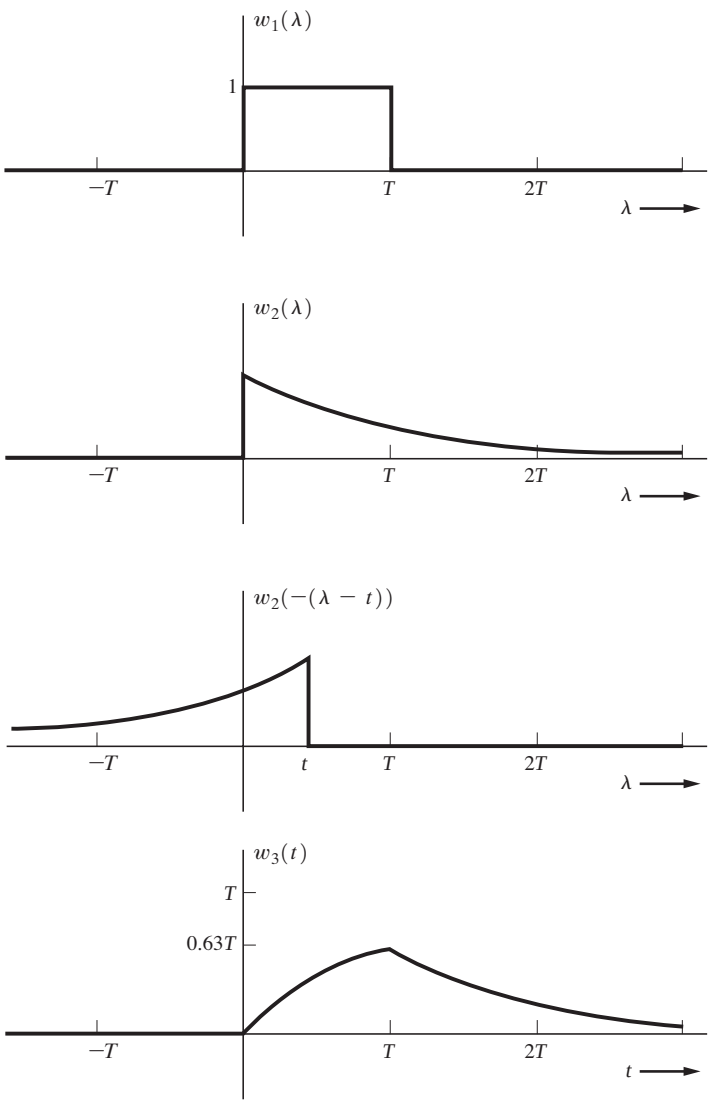


Figura 2–7 Convolución de un rectángulo y una exponencial.

$$w_3(t) = \int_0^t 1e^{+(\lambda - t)/T}\, d\lambda = T(1 - e^{-t/T})$$

Si $t > T$, entonces la ecuación (2-62b) se convierte en

$$w_3(t) = \int_0^T 1e^{+(\lambda - t)/T}\, d\lambda = T(e - 1)\, e^{-t/T}$$

Por lo tanto,

$$w_3(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ T(1 - e^{-t/T}), & 0 < t < T \\ T(e - 1)e^{-t/T}, & t > T \end{cases}$$

Este resultado se grafica en la figura 2-7.

Ejemplo 2–8 ESPECTRO DE UN PULSO TRIANGULAR POR CONVOLUCIÓN

En el ejemplo 2-6 se evaluó el espectro de un pulso triangular empleando el teorema de la integral. El mismo resultado puede obtenerse utilizando el teorema de convolución de la tabla 2-1. Si el pulso rectangular de la figura 2-6a se convoluciona consigo mismo y después se escala (es decir, multiplica) por la constante $1/T$, la forma de onda de tiempo resultante es el pulso triangular de la figura 2-6c. Aplicando el teorema de convolución se obtiene el espectro para el pulso triangular mediante la multiplicación del espectro del pulso rectangular (de la figura 2-6a) por sí mismo y escalándolo con una constante $1/T$. Como se espera, el resultado es el espectro mostrado en la figura 2-6c.

Ejemplo 2–9 ESPECTRO DE UNA SENOIDE CONMUTADA

En el ejemplo 2-4 se encontró que una senoide continua tiene un espectro de línea con sus líneas ubicadas en $f = \pm f_0$. En este ejemplo se observará cómo el espectro cambia cuando la senoide se conmuta entre encendido y apagado. La senoide conmutada se muestra en la figura 2-8a y puede representarse por

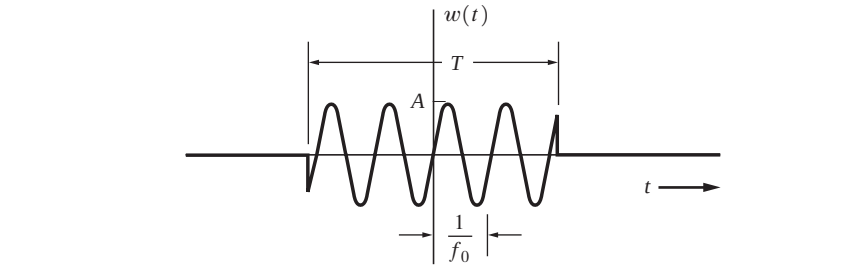
$$w(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) A \text{ sen } \omega_0 t = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) A \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Utilizando la FT del pulso rectangular de la tabla 2-2 y el teorema de conversión de una señal real de la tabla 2-1, se observa que el espectro de esta senoide conmutada es

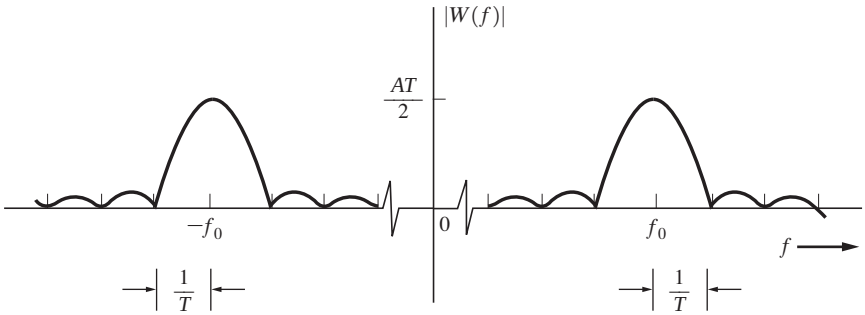
$$W(f) = j\frac{A}{2} T\left[\text{Sa}(\pi T(f + f_0)) - \text{Sa}(\pi T(f - f_0))\right] \tag{2–63}$$

El espectro es continuo e imaginario. El espectro de magnitud se muestra en la figura 2-8. Compare el espectro continuo de la figura 2-8 con el espectro discreto obtenido para la onda senoidal continua, como se muestra en la figura 2-4a. Además note que si la duración de la senoide conmutada puede hacerse demasiado grande (es decir, $T \to \infty$), entonces el espectro continuo de la figura 2-8 se convertirá en el espectro discreto de la figura 2-4a con las funciones delta en f_0 y $-f_0$.

El espectro para la senoide conmutada puede también evaluarse utilizando un enfoque de convolución. El teorema de multiplicación de la tabla 2-1 puede emplearse cuando $w_1(t) = \Pi(t/T)$ y



(a) Dominio del tiempo



(b) Dominio de frecuencia (espectro de magnitud)

Figura 2–8 Forma de onda y espectro de una senoide conmutada.

$w_2(t) = A$ sen $\omega_0 t$. En este caso el espectro de la senoide conmutada se obtiene resolviendo un problema de convolución en el dominio de frecuencia:

$$W(f) = W_1(f) * W_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(\lambda) W_2(f-\lambda)\, d\lambda$$

Esta integral de convolución es fácil de evaluar debido a que el espectro de $w_2(t)$ consiste en dos funciones delta. Los detalles sobre este enfoque se dejan como tarea para el lector.

La tabla 2-2 presenta un resumen de los pares de la transformada de Fourier. Algunas técnicas numéricas utilizando la transformada discreta de Fourier se discuten en la sección 2-8.

2–3 DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA Y FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN

Densidad espectral de potencia

La potencia normalizada de una forma de onda se relacionará ahora con su descripción en el dominio de frecuencia mediante una función llamada *densidad espectral de potencia (PSD*, por sus siglas en inglés*)*, que es bastante útil para describir cómo los contenidos de potencia de señales y de ruido se ven afectados por los filtros y otros dispositivos en los sistemas de comunicación. En la ecuación (2-42) la densidad espectral de energía (ESD) se definió en términos de la versión del cuadrado de la magnitud de la transformada de Fourier de la forma de onda.

TABLA 2–2 ALGUNOS PARES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Función	**Forma de onda de tiempo $w(t)$**	**Espectro $W(f)$**
Rectangular	$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$T[\mathrm{Sa}(\pi fT)]$
Triangular	$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$	$T[\mathrm{Sa}(\pi fT)]^2$
Escalón unitario	$u(t) \triangleq \begin{cases} +1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
Signo	$\mathrm{sgn}(t) \triangleq \begin{cases} +1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{j\pi f}$
Constante	1	$\delta(f)$
Impulso en $t = t_0$	$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
Sinc	$\mathrm{Sa}(2\pi Wt)$	$\frac{1}{2W}\ \Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$
Fasor	$e^{j(\omega_0 t + \varphi)}$	$e^{j\varphi}\ \delta(f - f_0)$
Senoide	$\cos(\omega_c t + \varphi)$	$\frac{1}{2}e^{j\varphi}\ \delta(f - f_c) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi}\ \delta(f + f_c)$
Gaussiano	$e^{-\pi(t/t_0)^2}$	$t_0 e^{-\pi(ft_0)^2}$
Exponencial, lateral	$\begin{cases} e^{-t/T}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{T}{1 + j2\pi fT}$
Exponencial, bilateral	$e^{-\lvert t\rvert/T}$	$\frac{2T}{1 + (2\pi fT)^2}$
Tren de impulsos	$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(t - kT)$	$f_0 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(f - nf_0)$, donde $f_0 = 1/T$

La PSD se definirá de manera similar, aunqnue es más útil que la ESD, ya que generalmente se aplican modelos del tipo de potencia en la solución de problemas de comunicación.

Primero se define la versión truncada de la forma de onda a través de

$$w_T(t) = \begin{cases} w(t), & -T/2 < t < T/2 \\ 0, & t \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} = w(t)\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \tag{2–64}$$

Utilizando la ecuación (2-13) se obtiene la potencia promedio normalizada:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} w^2(t)\ dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} w_T^2(t)\ dt$$

Empleando el teorema de Parseval, de la ecuación (2-41), la potencia promedio normalizada se convierte en

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |W_T(f)|^2\ df = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lim_{T\to\infty} \frac{|W_T(f)|^2}{T}\right) df \tag{2–65}$$

donde $W_T(f) = \mathcal{F}[w_T(t)]$. La función en la integral del lado derecho tiene unidades de watts/hertz (o el equivalente de volts^2/hertz o amperes^2/hertz, como sea conveniente) y puede definirse como la PSD.

DEFINICIÓN. La *densidad espectral de potencia (PSD)* para una forma de onda determinística de potencia es[15]

$$\mathcal{P}_w(f) \triangleq \lim_{T\to\infty}\left(\frac{|W_T(f)|^2}{T}\right) \tag{2–66}$$

donde $w_T(t) \leftrightarrow W_T(f)$ y $\mathcal{P}_w(f)$ tiene unidades de watts por hertz.

Note que la PSD siempre es una función real no negativa de la frecuencia. Además, la PSD no es sensible al espectro de fase de $w(t)$ ya que esto se pierde por la operación de valor absoluto utilizada en la ecuación (2-66). A partir de la ecuación (2-65), la potencia promedio normalizada es

$$P = \langle w^2(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_w(f)\, df \tag{2–67}$$

Esto es, el área bajo la función de PSD es la potencia promedio normalizada.

Función de autocorrelación

En este apartado es conveniente definir también una función relacionada conocida como *autocorrelación*, $R(\tau)$.[16]

DEFINICIÓN. La *autocorrelación* de una forma de onda real (física) es[17]

$$R_w(\tau) \triangleq \langle w(t)w(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} w(t)w(t+\tau)\, dt \tag{2–68}$$

Aún más, puede mostrarse que la PSD y la función de autocorrelación son pares de la transformada de Fourier—es decir,

$$R_w(\tau) \leftrightarrow \mathcal{P}_w(f) \tag{2–69}$$

donde $\mathcal{P}_w(f) = \mathcal{F}[R_w(\tau)]$. Esto se conoce como *teorema de Wiener-Khintchine*, que con las propiedades para $R(\tau)$ y $\mathcal{P}(f)$ se desarrollan en el capítulo 6.

En resumen, la PSD puede evaluarse utilizando cualquiera de los siguientes dos métodos:

1. El *método directo*, empleando la definición en la ecuación (2-66).[18]
2. El *método indirecto*, evaluando primero la función de autocorrelación y después tomando la transformada de Fourier: $\mathcal{P}_w(f) = \mathcal{F}[R_w(\tau)]$.

[15] Las ecuaciones (2-66) y (2-67) resultan en una PSD y potencia promedio, ambas normalizadas (con respecto a 1 Ω), respectivamente. Por valores sin normalización (es decir, actuales), $\mathcal{P}_w(f)$ se reemplaza con la expresión adecuada como sigue: si $w(t)$ es una forma de onda de voltaje que aparece a través de una carga resistiva de R ohms, entonces la PSD sin normalización es $\mathcal{P}_w(f)/R$ W/Hz, mientras que $\mathcal{P}_w(f)$ tiene unidades de volts^2/Hz. De la misma manera, si $w(t)$ es una forma de onda de corriente que fluye a través de una carga resistiva de R ohms, entonces la PSD sin normalización es $\mathcal{P}_w(f)R$ W/Hz, donde $\mathcal{P}_w(f)$ tiene unidades de amperes^2/Hz.

[16] En este caso se utiliza el promedio de tiempo al definir la función de autocorrelación. En el capítulo 6 se utiliza el promedio conjunto (estadístico) en la definición de R(τ) y como se muestra en ese caso estas dos definiciones son equivalentes si $w(t)$ es ergódica.

[17] La autocorrelación de una forma de onda compleja es $R_w(\tau) \triangleq \langle w^*(t)w(t+\tau)\rangle$.

[18] El método directo es generalmente más difícil que el indirecto.

Aún más, la potencia promedio normalizada total para la forma de onda $w(t)$ puede evaluarse empleando cualquiera de las *cuatro* técnicas integradas en la siguiente ecuación:

$$P = \langle w^2(t) \rangle = W_{\text{rms}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_w(f)\, df = R_w(0) \tag{2–70}$$

Ejemplo 2–10 PSD DE UNA SENOIDE

Deje que

$$w(t) = A \text{ sen } \omega_0 t$$

La PSD se evaluará utilizando el método indirecto. La autocorrelación es

$$\begin{aligned} R_w(\tau) &= \langle w(t) w(t+\tau) \rangle \\ &= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \text{ sen } \omega_0 t \text{ sen } \omega_0 (t+\tau)\, dt \end{aligned}$$

Empleando una identidad trigonométrica del apéndice A se obtiene que

$$R_w(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt - \frac{A^2}{2} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau)\, dt$$

la cual se reduce a

$$R_w(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau \tag{2–71}$$

La PSD es por tanto

$$\mathcal{P}_w(f) = \mathcal{F}\left[\frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau \right] = \frac{A^2}{4} \left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) \right] \tag{2–72}$$

como se muestra en la figura 2-9. La PSD puede comparase al espectro de "voltaje" para una senoide encontrada en el ejemplo 2-4 y como muestra la figura 2-4.

La potencia promedio normalizada puede obtenerse a partir de la ecuación (2-67):

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{4} \left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) \right] df = \frac{A^2}{2} \tag{2–73}$$

Este valor, $A^2/2$, coincide con el resultado conocido para una potencia normalizada de una senoide:

$$P = \langle w^2(t) \rangle = W_{\text{rms}}^2 = (A/\sqrt{2})^2 = A^2/2 \tag{2–74}$$

También se observa que A sen $\omega_0 t$ y A cos $\omega_0 t$ tienen exactamente la misma PSD (así como su función de autocorrelación) debido a que la fase no tiene efecto alguno sobre la PSD. Esto puede verificarse evaluando la PSD para A cos $\omega_0 t$ y empleando el mismo procedimiento usado previamente para evaluar la PSD para A sen $\omega_0 t$.

Hasta este punto se han estudiado las propiedades de señales y ruido, tales como el espectro, la potencia promedio y el RMS, pero, ¿cómo se representa la forma de onda de señal o de ruido por sí misma? El enfoque directo es el de escribir una ecuación matemática de forma cerrada para la forma

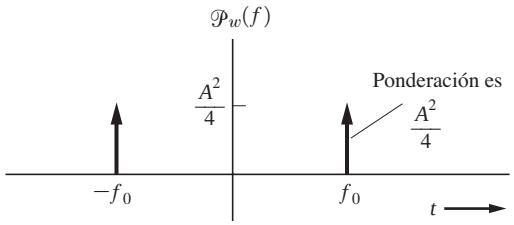


Figura 2–9 Espectro de potencia de una sinusoide.

de onda misma. Otras formas equivalentes para modelar la forma de onda también son útiles. Una de ellas, la cual el lector ya ha estudiado en aritmética, es la de representar la forma de onda empleando la expansión de una serie de Taylor (es decir, serie de potencia) alrededor de un punto a. Esto es,

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)}(a)}{n!} (t-a)^n \tag{2–75}$$

donde

$$w^{(n)}(a) = \left. \frac{d^n w(t)}{dt^n} \right|_{t=a} \tag{2–76}$$

De la ecuación (2-76), si las derivadas en $t = a$ son conocidas, entonces la ecuación (2-75) puede emplearse para reconstruir la forma de onda. La expansión de series ortogonales es otro tipo de representación por series de especial utilidad en problemas de comunicación y se discute en la siguiente sección.

2–4 REPRESENTACIÓN DE SEÑALES Y RUIDO POR MEDIO DE SERIES ORTOGONALES

Una representación de señales y ruido por medio de series ortogonales tiene varias aplicaciones significativas en los problemas de comunicación, como las series de Fourier, las series de función de muestreo y la representación de señales digitales. Su importancia amerita un estudio detallado más adelante.

Funciones ortogonales

Antes de estudiar las series ortogonales se definirán las funciones ortogonales.

DEFINICIÓN. Las funciones $\varphi_n(t)$ y $\varphi_m(t)$ son *ortogonales* con respecto a cada una sobre el intervalo $a < t < b$ si satisfacen la condición

$$\int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m^*(t)\, dt = 0, \qquad \text{donde } n \neq m \tag{2–77}$$

Más aún, si las funciones en el conjunto $\{\varphi_n(t)\}$ son ortogonales, entonces también satisfacen la relación

$$\int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m^*(t)\, dt = \begin{Bmatrix} 0, & n \neq m \\ K_n, & n = m \end{Bmatrix} = K_n \delta_{nm} \tag{2–78}$$

donde

$$\delta_{nm} \triangleq \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} \tag{2–79}$$

En este caso, δ_{nm} se conoce como la *función delta de Kronecker*. Si las constantes K_n son iguales a 1, entonces se dice que $\varphi_n(t)$ son *funciones ortonormales*.[19]

La ecuación (2-77) se emplea para verificar pares de funciones y ver si son ortogonales. Cualquiera de éstos es ortogonal sobre el intervalo (a, b) si la integral del producto de la funciones es cero. El resultado de cero implica que estas funciones son "independientes" o "están en desacuerdo". Si el resultado es diferente de cero, entonces no son ortogonales y, por consecuencia, las dos funciones tienen cierta "dependencia" de, o es "semejante" a, la otra.

Ejemplo 2–11 FUNCIONES EXPONENCIALES COMPLEJAS ORTOGONALES

Demuestre que el conjunto de funciones exponenciales complejas $\{e^{jn\omega_0 t}\}$ son ortogonales sobre el intervalo $a < t < b$, donde $b = a + T_0$, $\omega_0 = 2\pi f_0$ y n es un entero.

Solución. Sustituyendo $\varphi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$ y $\varphi_m(t) = e^{jn\omega_0 t}$ en la ecuación (2-77) se obtiene que

$$\int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m^*(t)\, dt = \int_a^{a+T_0} e^{jn\omega_0 t}\ e^{-jm\omega_0 t}\ dt = \int_a^{a+T_0} e^{j(n-m)\omega_0 t}\, dt \tag{2–80}$$

Para $m \neq n$, la ecuación (2-80) se convierte en

$$\int_a^{a+T_0} e^{j(n-m)\omega_0 t}\, dt = \frac{e^{j(n-m)\omega_0 a}\left[e^{j(n-m)2\pi} - 1\right]}{j(n-m)\omega_0} = 0 \tag{2–81}$$

debido a que $e^{j(n-m)2\pi} = \cos\left[2\pi(n-m)\right] + j \operatorname{sen}\left[2\pi(n-m)\right] = 1$. Por lo tanto, la ecuación (2-77) se satisface y las funciones exponenciales complejas son ortogonales una a otra sobre el intervalo $a < t < a + T_0$, donde a es cualquier constante real. Estas funciones exponenciales son *no ortogonales* sobre algunos otros intervalos, tal como $a < t < a + 0.5T_0$.

Además, para el caso cuando $n = m$, la ecuación (2-80) se convierte en

$$\int_a^{a+T_0} \varphi_n(t)\, \varphi_n^*(t)\ dt = \int_a^{a+T_0} 1\, dt = T_0 \tag{2–82}$$

Utilizando la ecuación (2-82) en la ecuación (2-78) se encuentra que $K_n = T_0$ para todos los valores (enteros) de n. Debido a que $K_n \neq 1$, estas funciones $\varphi_n(t)$ no son ortonormales (pero sí ortogonales). Un conjunto ortonormal de funciones exponenciales puede obtenerse al escalar el conjunto anterior, donde las funciones en el nuevo conjunto son

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}}\ e^{jn\omega_0 t}$$

[19] Para normalizar un conjunto de funciones se toma cada $\varphi_n(t)$ anterior y se divide entre $\sqrt{K_n}$ para formar la $\varphi n(t)$ normalizada.

Series ortogonales

Suponga que $w(t)$ representa una forma de onda práctica (señal, ruido o alguna combinación de ambas) y que se desea representarla sobre el intervalo $a < t < b$. Entonces puede obtenerse una representación por serie ortogonal equivalente utilizando el siguiente teorema.

TEOREMA. *$w(t)$ puede representarse sobre el intervalo (a, b) mediante la serie*

$$w(t) = \sum_n a_n \varphi_n(t) \tag{2–83}$$

donde los coeficientes ortogonales están dados por

$$a_n = \frac{1}{K_n} \int_a^b w(t)\varphi_n^*(t)\, dt \tag{2–84}$$

y el rango de n está en los valores enteros que corresponden a los subíndices que fueron usados para denotar las funciones ortogonales en el conjunto ortogonal completo.

Para que la ecuación (2-83) sea una representación válida para cualquier señal física (es decir, con energía finita), el conjunto ortogonal debe estar completo. Esto implica que el conjunto $\{\varphi_n(t)\}$ puede emplearse para representar cualquier función con un error arbitrariamente pequeño [Wylie, 1960]. En la práctica, a menudo es difícil probar que un conjunto dado de funciones está completo. Puede mostrarse que el conjunto exponencial complejo y los conjuntos senoidales harmónicos que se utilizan para las series de Fourier en la sección 2-5 están completos [Courant y Hilbert, 1953]. Muchos otros conjuntos de utilidad también están completos, como las funciones de Bessel, los polinomios de Legendre y los conjuntos de tipo (sen x)/x [descritos por la ecuación 2-161].

Demostración del teorema. Suponga que el conjunto $\{\varphi_n(t)\}$ es suficiente para representar la forma de onda. Entonces para que la ecuación (2-38) sea correcta sólo se requiere mostrar que se puede evaluar los valores de a_n. De acuerdo con esto, se opera sobre ambos lados de la ecuación con el operador de integral

$$\int_a^b [\cdot]\, \varphi_m^*(t)\, dt \tag{2–85}$$

obteniendo

$$\begin{aligned}\int_a^b [w(t)]\varphi_m^*(t)\, dt &= \int_a^b \left[\sum_n a_n \varphi_n(t)\right] \varphi_m^*(t)\, dt \\ &= \sum_n a_n \int_a^b \varphi_n(t)\varphi_m^*(t)\, dt = \sum_n a_n K_n \delta_{nm} \\ &= a_m K_m \end{aligned} \tag{2–86}$$

Por lo tanto, la ecuación (2-84) sigue.

La serie ortogonal es bastante útil en la representación de una señal, ruido o una combinación de ambas. Las funciones ortogonales $\varphi_j(t)$ son deterministas. Más aún, si la forma de onda $w(t)$ es

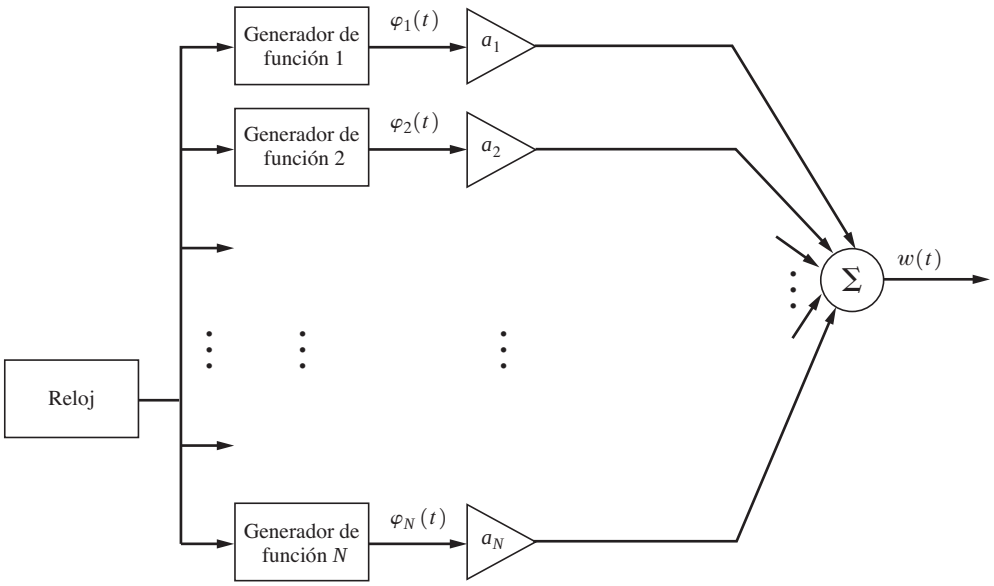


Figura 2–10 Síntesis de una forma de onda utilizando funciones ortogonales.

determinística, entonces las constantes $\{a_j\}$ también lo son y pueden evaluarse a través de la ecuación (2-84). En el capítulo 6 se observará que si $w(t)$ es estocástica (por ejemplo, en un problema con ruido), el término $\{a_j\}$ representa un conjunto de variables aleatorias que generan el proceso aleatorio deseado $w(t)$.

También es posible utilizar la ecuación (2-83) para generar $w(t)$ a partir de las funciones $\varphi_j(t)$ y los coeficientes a_j. En este caso, $w(t)$ se aproxima mediante un número razonable de funciones $\varphi_j(t)$. Como muestra la figura 2-10, para el caso de valores reales de a_j y funciones reales para $\varphi_j(t)$, $w(t)$ puede sintetizare al sumar versiones ponderadas de $\varphi_j(t)$, donde los factores de ponderación están dados por $\{a_j\}$. La operación de ponderación de suma y ganancia se realiza adecuadamente con un amplificador operacional de múltiples entradas.

2–5 SERIES DE FOURIER

La serie de Fourier es un tipo particular de series ortogonales de gran utilidad en la solución de problemas de ingeniería, especialmente de comunicación. Las funciones ortogonales utilizadas son senoidales o, en forma equivalente, funciones exponenciales complejas.[20]

Series compleja de Fourier

La serie compleja de Fourier utiliza las funciones exponenciales ortogonales

$$\varphi_n(t) = e^{jn\omega_0 t} \tag{2–87}$$

[20] Los matemáticos a menudo se refieren a cualquier serie ortogonal como una serie de Fourier.

donde n varía sobre el rango de todos los valores enteros posibles, negativos, positivos y cero, $\omega_0 = 2\pi/T_0$, donde $T_0 = (b - a)$ es la longitud del intervalo sobre el cual la serie, ecuación (2-83), es válida, y, del ejemplo 2-11, $K_n = T_0$. El teorema de la serie de Fourier sigue de la ecuación (2-83).

TEOREMA. *Una forma de onda física (es decir, de energía finita) puede representarse sobre el intervalo $a < t < a + T_0$ mediante la serie exponencial compleja de Fourier*

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \tag{2–88}$$

donde los coeficientes complejos (fasores) de Fourier son

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_a^{a+T_0} w(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt \tag{2–89}$$

y donde $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$.

Si la forma de onda $w(t)$ es periódica con un periodo de T_0, esta representación por series de Fourier es válida *durante todo el tiempo* (es decir, sobre el intervalo $-\infty < t < +\infty$), debido a que $w(t)$ y $\varphi_n(t)$ son periódicas con el mismo periodo fundamental de T_0. Para este caso de formas de onda periódicas, la opción de un valor para el parámetro a es arbitraria y a menudo se consideran los valores de $a = 0$ o $a = -T_0/2$ como conveniencia matemática. La frecuencia $f_0 = 1/T_0$ se llama frecuencia *fundamental* y la nf_0 *n*-ésima frecuencia armónica cuando $n > 1$. El coeficiente de Fourier c_0 es equivalente al valor de DC de la forma de onda $w(t)$ debido a que, cuando $n = 0$, la ecuación (2-89) es idéntica a la ecuación (2-4).

c_n es, en general, un número complejo. También es un fasor porque es el coeficiente de una función del tipo e^{jwt}. Por consecuencia, la ecuación (2-88) es una serie compleja o de fasor de Fourier.

Algunas propiedades de la serie compleja de Fourier son las siguientes:

1. Si $w(t)$ es real,

$$c_n = c_{-n}^* \tag{2–90}$$

2. Si $w(t)$ es real y par [es decir, $w(t) = w(-t)$],

$$\text{Im}[c_n] = 0 \tag{2–91}$$

3. Si $w(t)$ es real e impar [es decir, $w(t) = -w(-t)$],

$$\text{Re}[c_n] = 0$$

4. El teorema de Parseval es

$$\frac{1}{T_0} \int_a^{a+T_0} |w(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |c_n|^2 \tag{2–92}$$

(Consulte la ecuación (2-125) para la demostración.)

5. Los coeficientes de una serie compleja de Fourier de una forma de onda real están relacionados a los coeficientes de una serie de Fourier en cuadratura a través de

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\, a_n - j\frac{1}{2}\, b_n, & n > 0 \\ a_0, & n = 0 \\ \frac{1}{2}\, a_{-n} + j\frac{1}{2}\, b_{-n}, & n < 0 \end{cases} \tag{2–93}$$

[Consulte las ecuaciones (2-96), (2-97) y (2-98).]

6. Los coeficientes de una serie compleja de Fourier de una forma de onda real están relacionados con los coeficientes de una serie polar de Fourier a través de

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\, D \quad \underline{/\varphi_n}, & n > 0 \\ D_0, & n = 0 \\ \frac{1}{2}\, D_{-n} \quad \underline{/-\varphi_{-n}}, & n < 0 \end{cases} \tag{2–94}$$

[Consulte las ecuaciones (2-106) y (2-107).]

Note que estas propiedades para los coeficientes de la serie compleja de Fourier son similares a las de la transformada de Fourier como están dadas en la sección 2-2.

Series de Fourier en cuadratura

La forma *en cuadratura* de la serie de Fourier que representa a cualquier forma de onda física $w(t)$ sobre el intervalo $a < t < a + T_0$ es

$$w(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t \tag{2–95}$$

donde las funciones ortogonales son cos $n\omega_0 t$ y sen $n\omega_0 t$. Utilizando la ecuación (2-77) se encuentra que estos coeficientes de Fourier están dados por

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{T_0} \displaystyle\int_a^{a+T_0} w(t)\, dt, & n = 0 \\ \dfrac{2}{T_0} \displaystyle\int_a^{a+T_0} w(t) \cos n\omega_0 t\, dt, & n \geq 1 \end{cases} \tag{2–96}$$

y

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_a^{a+T_0} w(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t\, dt, \qquad n > 0 \tag{2–97}$$

De nuevo, debido a que estas funciones ortogonales senoidales son periódicas, la serie es también periódica con el periodo fundamental T_0, y si $w(t)$ es periódica con un periodo de T_0, la serie representará a $w(t)$ sobre la línea real entera (es decir, $-\infty < t < \infty$).

La serie compleja de Fourier [ecuación (2-88)] y la serie de Fourier en cuadratura [ecuación (2-85)] son representaciones equivalentes. Esto puede demostrarse expresando el número complejo c_n en términos de sus partes conjugadas, x_n y y_n. Esto es, utilizando la ecuación (2-89), obtenemos

$$\begin{aligned} c_n &= x_n + jy_n \\ &= \left[\frac{1}{T_0} \int_a^{a+T_0} w(t) \cos n\omega_0 t\, dt\right] + j\left[\frac{-1}{T_0} \int_a^{a+T_0} w(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t\, dt\right] \end{aligned} \tag{2–98}$$

para todos los valores enteros de n. Por lo tanto,

$$x_n = \frac{1}{T_0} \int_a^{a+T_0} w(t) \cos n\omega_0 t \, dt \tag{2–99}$$

y

$$y_n = \frac{-1}{T_0} \int_a^{a+T_0} w(t) \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt \tag{2–100}$$

Utilizando las ecuaciones (2-96) y (2-97) obtenemos las identidades

$$a_n = \begin{Bmatrix} c_0, & n = 0 \\ 2x_n, & n \geq 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_0, & n = 0 \\ 2 \ \mathrm{Re}\{c_n\}, & n \geq 1 \end{Bmatrix} \tag{2–101}$$

y

$$b_n = -2y_n = -2 \ \mathrm{Im}\{c_n\}, \ n \geq 1 \tag{2–102}$$

donde $\mathrm{Re}\{\cdot\}$ denota la parte real de $\{\cdot\}$ e $\mathrm{Im}\{\cdot\}$ denota la parte imaginaria de $\{\cdot\}$.

Series polares de Fourier

La serie de Fourier en cuadratura, en la ecuación (2-95), puede arreglarse y escribirse en una forma polar (amplitud-fase). La forma *polar* es

$$w(t) = D_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} D_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \tag{2–103}$$

donde $w(t)$ es real y

$$a_n = \begin{cases} D_0, & n = 0 \\ D_n \cos \varphi_n, & n \geq 1 \end{cases} \tag{2–104}$$

$$b_n = -D_n \operatorname{sen} \varphi_n, \quad n \geq 1 \tag{2–105}$$

Las últimas dos ecuaciones pueden invertirse, y se obtiene que

$$D_n = \begin{Bmatrix} a_0, & n = 0 \\ \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, & n \geq 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_0, & n = 0 \\ 2 \, |c_n|, & n \geq 1 \end{Bmatrix} \tag{2–106}$$

y

$$\varphi_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \angle c_n, \quad n \geq 1 \tag{2–107}$$

donde el operador de ángulo está definido por

$$\angle[\cdot] = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}[\cdot]}{\mathrm{Re}[\cdot]}\right) \tag{2–108}$$

A partir del contexto debe ser claro si $\angle$ denota el operador de ángulo o el ángulo mismo. Por ejemplo, $\angle 90°$ representa al ángulo de 90° pero $\angle[1 + j2]$ denota el operador de ángulo y es igual a 63.4° cuando se evalúa.

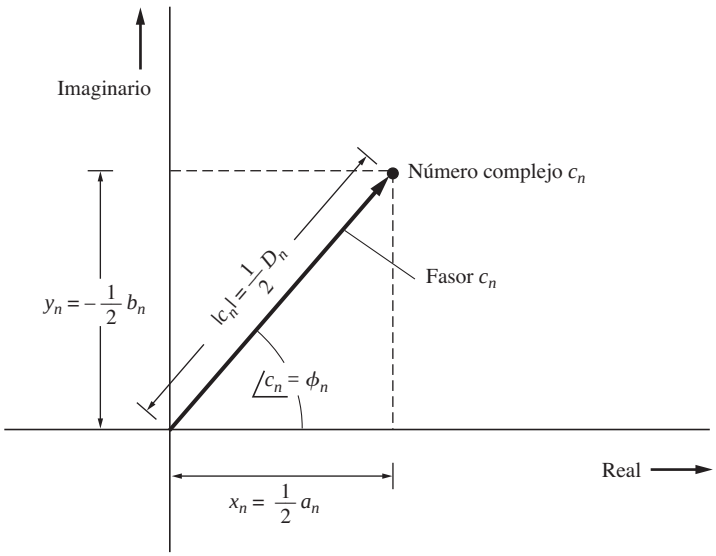


Figura 2–11 Coeficientes de serie de Fourier, $n \geq 1$.

La equivalencia entre los coeficientes de la serie de Fourier se demuestra geométricamente en la figura 2-11. Se observa que, en general, cuando una forma de onda física (real) $w(t)$ se representa mediante una serie de Fourier, el término c_n es un número complejo con una parte real x_n y una imaginaria y_n (las cuales son ambas números reales) y, por consecuencia, a_n, b_n, D_n y φ_n son números reales. Además, D_n es un número no negativo para $n \geq 1$. Más aún, todos estos coeficientes describen la cantidad de componentes de frecuencia contenidos en la señal a la frecuencia de nf_0 Hz.

En la práctica, la serie de Fourier (FS, por sus siglas en inglés) es a menudo truncada a un número finito de términos. Por ejemplo, cinco o diez harmónicas podrían utilizarse para aproximar la serie FS para una onda cuadrada. Por tanto, surge una importante cuestión: para la serie finita, ¿son iguales los valores óptimos para los coeficientes de la serie que los de los términos correspondientes en la serie infinita, o acaso deberán ajustarse los coeficientes para la serie infinita a algunos otros nuevos valores para suministrar la mejor aproximación de serie finita? La respuesta es que los valores óptimos para los coeficientes de la FS son los mismos que los de los términos correspondientes en la FS no truncada.[21]

Como se ha visto, las formas compleja, en cuadratura y polar de la serie de Fourier son todas equivalentes, pero la pregunta es: *¿cuál es la que debe utilizarse?* La respuesta depende del problema en particular a solucionar. Si éste se resolverá analíticamente, los coeficientes complejos son *generalmente* más fáciles de evaluar. Por otra parte, si se están llevando a cabo mediciones de una forma de onda en un laboratorio, entonces la forma polar es a menudo más conveniente, ya que los instrumentos de medición, como los voltímetros, osciloscopios, voltímetros vectoriales y analizadores de onda suministran lecturas de magnitud y de fase. Utilizando los resultados de laboratorio, los ingenieros pueden realizar gráficas espectrales *de un solo lado* en donde se dibujan líneas correspondientes a cada valor de D_n a $f = f_0$, donde $n \geq 0$ (es decir, sólo frecuencias positivas). Por supuesto que esta gráfica espectral puede convertirse en un espectro bilateral dado por la gráfica de c_n utilizando

[21] Consulte [Couch, 1995] para una demostración de este enunciado.

la ecuación (2-94). Se entiende que un espectro bilateral está definido como la transformada de Fourier de $w(t)$. Esto se demuestra en la figura 2-4, donde la ecuación (2-109), del siguiente teorema, puede utilizarse.

Espectros de línea para formas de onda periódicas

Para formas de onda *periódicas* las representaciones por series de Fourier son válidas durante todo el tiempo (es decir, $-\infty < t < \infty$). Por consecuencia, el espectro (bilateral), el cual depende de una forma de onda desde $t = -\infty$ hasta $t = \infty$, puede evaluarse en términos de coeficientes de Fourier.

TEOREMA. *Si una forma de onda es periódica con un periodo T_0, entonces el espectro de la forma de onda $w(t)$* es

$$W(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \, \delta(f - nf_0) \tag{2–109}$$

donde $f_0 = 1/T_0$ y c_n son los coeficientes fasores de Fourier de una forma de onda dada por la ecuación (2-89).

Demostración.

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \, e^{jn\omega_0 t}$$

Tomando la transformada de Fourier de ambos lados se obtiene que

$$W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \, e^{jn\omega_0 t} \right) e^{-j\omega t} \, dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f - nf_0)t} \, dt = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \, \delta(f - nf_0)$$

donde se utilizó la representación integral para una función delta, ecuación (2-48).

Este teorema indica que una función periódica *siempre* tiene un espectro de línea (función delta), en donde las líneas se encuentran en $f = nf_0$ y tienen una ponderación dada por los valores c_n. El ejemplo 2-4 ilustra dicha propiedad, en donde $c_1 = -jA/2$ y $c_{-1} = jA/2$ y los otros términos c_n fueron iguales a cero. Resulta obvio que no existe un componente de DC debido a que no existe una línea en $f = 0$ (es decir, $c_0 = 0$). De la misma manera, si una función no contiene componentes periódicos, entonces el espectro será continuo (sin líneas), excepto para una línea a $f = 0$ cuando la función tiene un componente de DC.

También es posible evaluar los coeficientes de Fourier muestreando la transformada de Fourier de un pulso correspondiente a $w(t)$ durante un periodo. Esto se muestra mediante el siguiente teorema:

TEOREMA. *Si $w(t)$ es una función periódica con un periodo T_0 y está representada por*

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} h(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \, e^{jn\omega_0 t} \tag{2–110}$$

donde

$$h(t) = \begin{cases} w(t), & |t| < \dfrac{T_0}{2} \\ 0, & t \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{2–111}$$

entonces los coeficientes de Fourier están dados por

$$c_n = f_0 H(nf_0) \tag{2–112}$$

donde $H(f) = \mathcal{F}[h(t)]$ *y* $f_0 = 1/T_0$

Demostración.

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t) * \delta(t - nT_0) \tag{2–113}$$

donde * denota la operación de convolución. Por lo tanto,

$$w(t) = h(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) \tag{2–114}$$

Pero el tren de impulso puede a su vez ser representado por su serie de Fourier[22] esto es,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \tag{2–115}$$

donde todos los coeficientes de Fourier son tan sólo $c_n = f_0$. Sustituyendo la ecuación (2-115) dentro de la ecuación (2-114) se obtiene que

$$w(t) = h(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0 e^{jn\omega_0 t} \tag{2–116}$$

Tomando la transformada de Fourier de ambos lados de la ecuación (2-116) se tiene que

$$\begin{aligned} W(f) &= H(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0 \, \delta(f - nf_0) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f_0 H(nf_0)] \, \delta(f - nf_0) \end{aligned} \tag{2–117}$$

Comparando la ecuación (2-117) con la ecuación (2-109) se observa que la ecuación (2-112) sigue.

Este teorema es útil en la evaluación de los coeficientes de Fourier c_n cuando la transformada de Fourier de la forma de pulso fundamental $h(t)$ para la forma de onda periódica es conocida o se obtiene fácilmente con una tabla de la transformada de Fourier (por ejemplo, la tabla 2-2).

[22] Esto se conoce como la *fórmula de suma de Poisson.*

Ejemplo 2–12 COEFICIENTES DE FOURIER PARA UNA ONDA PERIÓDICA RECTANGULAR

Encuentre los coeficientes de Fourier para la onda periódica rectangular mostrada en la figura 2-12a, donde T es el ancho de pulso y $T_0 = 2T$ es el periodo. Los coeficientes complejos de Fourier, de la ecuación (2-89), son

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} Ae^{-jn\omega_0 t}\, dt = j\,\frac{A}{2\pi n}\,(e^{-jn\pi} - 1) \tag{2–118}$$

los cuales se reducen (utilizando la regla de L'Hospital para la evaluación de la forma indeterminada para $n = 0$), a

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{A}{2}, & n = 0 \\ -j\dfrac{A}{n\pi}, & n = \text{impar} \\ 0, & n \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{2–119}$$

La ecuación (2-119) puede verificarse empleando la ecuación (2-112) y el resultado del ejemplo 2-5, en donde $T_0 = 2T$. Esto es,

$$c_n = \frac{A}{T_0}\,V(nf_0) = \frac{A}{2}\,e^{-jn\pi/2}\,\frac{\text{sen}(n\pi/2)}{n\pi/2} \tag{2–120}$$

la cual es idéntica a la ecuación (2-119). Se observa que el valor de DC de la forma de onda es $c_0 = A/2$, lo cual coincide con el resultado obtenido al utilizar la ecuación (2-4).

El espectro de la onda cuadrada se obtiene fácilmente con la ecuación (2-109). El espectro de magnitud se ilustra mediante líneas sólidas en la figura 2-12b. Las funciones delta no pueden graficarse porque tienen valores infinitos, pero sus ponderaciones sí, como lo muestra la línea rayada en la figura 2-12b.

Ahora compare el espectro para esta onda periódica rectangular (líneas sólidas en la figura 2-12b) con el espectro para el pulso rectangular mostrado en la figura 2-6a. Note que el *espectro para la onda periódica contiene líneas espectrales*, mientras que *el espectro para el pulso no periódico es continuo*. Observe además que la envolvente del espectro para ambos casos es la misma forma de $|(\text{sen } x)/x|$, en donde $x = \pi Tf$. Por consecuencia, el ancho de banda nulo (para la envolvente) es de $1/T$ para ambos casos, donde T es el ancho de pulso. Esta es la propiedad básica de la señalización digital con formas de pulso rectangulares. *El ancho de banda nulo es el recíproco del ancho de pulso.*

Los otros tipos de coeficientes de Fourier también pueden obtenerse. Utilizando las ecuaciones (2-101) y (2-102) se llega a los coeficientes en cuadratura de Fourier:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{A}{2}, & n = 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases} \tag{2–121a}$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2A}{\pi n}, & n = \text{impar} \\ 0, & n = \text{par} \end{cases} \tag{2–121b}$$

En este caso todos los $a_n = 0$, excepto para $n = 0$, debido a que si se suprime el valor de DC, entonces la forma de onda sería una función impar alrededor del origen. Utilizando las ecuaciones (2-106) y (2-107) se encuentra que los coeficientes polares de Fourier son

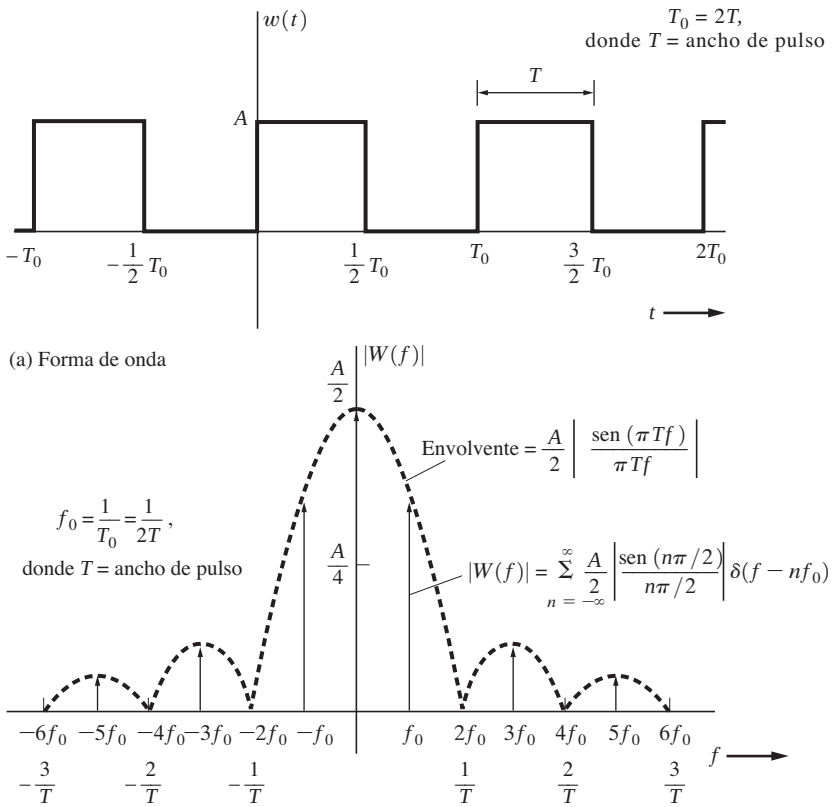


Figura 2–12 Onda periódica rectangular utilizada en el ejemplo 2-12.

$$D_n = \begin{cases} \dfrac{A}{2}, & n = 0 \\ \dfrac{2A}{n\pi}, & n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots \\ 0, & n \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{2–122}$$

y

$$\varphi_n = -90^\circ \quad \text{para } n \geq 1 \tag{2–123}$$

En los problemas de comunicación se requiere con frecuencia la potencia promedio normalizada y, para el caso de formas de onda periódicas, puede evaluarse utilizando coeficientes de series de Fourier.

TEOREMA. *Para una forma de onda periódica $w(t)$, la potencia normalizada está dada por*

$$P_w = \langle w^2(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |c_n|^2 \tag{2–124}$$

donde el conjunto de $\{c_n\}$ son los coeficientes complejos de Fourier para la forma de onda.

Demostración. Para la $w(t)$ periódica, la representación por serie de Fourier es válida sobre todo el tiempo y puede sustituirse dentro de la ecuación (2-12) para evaluar la potencia normalizada (es decir, con $R = 1$):

$$P_w = \left\langle \left(\sum_n c_n e^{jn\omega_0 t} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \sum_n \sum_m c_n c_m^* e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} \right\rangle$$

$$= \sum_n \sum_m c_n c_m^* \ \langle e^{j(n-m)\omega_0 t} \rangle = \sum_n \sum_m c_n c_m^* \delta_{nm} = \sum_n c_n c_n^*$$

o

$$P_w = \sum_n |c_n|^2 \tag{2–125}$$

La ecuación (2-124) es un caso especial del teorema de Parseval, ecuación (2-40), como se aplica a las señales de potencia.

Densidad espectral de potencia para formas de onda periódicas

TEOREMA. *Para una forma de onda periódica, la densidad espectral de potencia (PSD) está dada por*

$$\mathcal{P}(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |c_n|^2 \, \delta(f - nf_0) \tag{2–126}$$

donde $T_0 = 1/f_0$ es el periodo de la forma de onda y $\{c_n\}$ son los coeficientes de Fourier correspondientes para la forma de onda.

Demostración. Asumiendo que $w(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$. Entonces la función de autocorrelación de $w(t)$ es

$$R(\tau) = \langle w^*(t) w(t+\tau) \rangle$$

$$= \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-jn\omega_0 t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jm\omega_0 (t+\tau)} \right\rangle$$

o

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n^* c_m e^{jm\omega_0 \tau} \langle e^{j\omega_0 (m-n)t} \rangle$$

Pero $\langle e^{j\omega_0 (n-m)t} \rangle = \delta_{nm}$, así que esto se reduce a

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{jn\omega_0 \tau} \tag{2–127}$$

La PSD es entonces

$$\mathcal{P}(f) = \mathcal{F}[R(\tau)] = \mathcal{F}\left[\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 e^{jn\omega_0\tau}\right]$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \, \mathcal{F}[e^{jn\omega_0\tau}] = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \, \delta(f - nf_0) \tag{2–128}$$

La ecuación (2-126) no sólo presenta una manera de evaluar la PSD para formas de onda periódicas, sino también evalúa los anchos de banda de las formas de onda. Por ejemplo, puede encontrarse el intervalo de frecuencia en el cual 90□ de la potencia de la forma de onda está concentrado.

Ejemplo 2–13 PSD PARA UNA ONDA CUADRADA

Se deberá encontrar la PSD para la onda periódica cuadrada mostrada en la figura 2-12a. Debido a que la forma de onda es periódica, la ecuación (2-126) puede emplearse para evaluar la PSD. Consecuentemente este problema se convierte en la evaluación de los coeficientes de la FS. Más aún, los coeficientes de la FS para una onda cuadrada están dados por la ecuación (2-120). Por tanto,

$$\mathcal{P}(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A}{2}\right)^2 \left(\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2}\right)^2 \delta(f - nf_0) \tag{2–129}$$

La PSD está mostrada mediante líneas sólidas en la figura 2-13, donde las funciones delta (que tienen amplitudes infinitas) están representadas mediante líneas verticales con una longitud igual a la ponderación (es decir, área) de la función delta correspondiente.

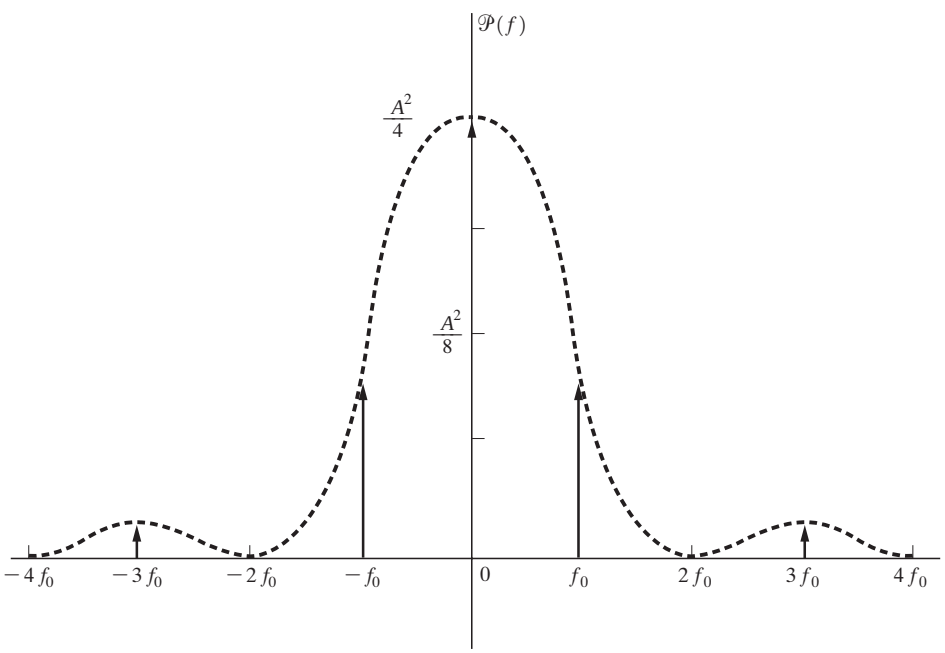
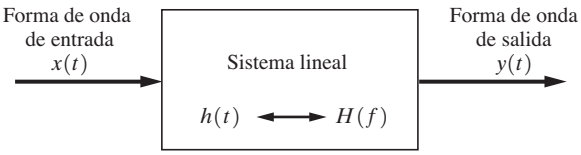


Figura 2–13 PSD para una onda cuadrada utilizada en el ejemplo 2-13.



Algunas descripciones para la entrada		Algunas descripciones para la salida
$X(f)$	Espectro de "voltaje"	$Y(f)$
$R_x(\tau)$	Función de autocorrelación	$R_y(\tau)$
$\mathcal{P}_x(f)$	Densidad espectral de potencia	$\mathcal{P}_y(f)$

Figura 2–14 Sistema lineal.

2–6 REPASO DE SISTEMAS LINEALES

Sistemas lineales invariables con el tiempo

Un filtro o sistema electrónico es *lineal* cuando se mantiene la *superposición*, esto es, cuando

$$y(t) = \mathcal{L}[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1\mathcal{L}[x_1(t)] + a_2\mathcal{L}[x_2(t)] \tag{2–130}$$

donde $y(t)$ es la salida y $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ es la entrada, como se muestra en la figura 2-14. $\mathcal{L}[\cdot]$ denota el operador de sistema lineal (ecuación diferencial) que actúa sobre $[\cdot]$. El sistema es *invariable con el tiempo* si, para cualquier entrada retrasada $x(t - t_0)$, la salida se retrasa justo por la misma cantidad $y(t - t_0)$. Esto es, la *forma* de la respuesta es la misma sin importar cuándo la entrada se aplica al sistema.

Una discusión más profunda de la teoría y práctica de los sistemas lineales va más allá del ámbito de estudio de este texto. Esto requeriría de un libro completo por sí mismo [Irwin, 1995]. Sin embargo, se repasarán algunas ideas básicas que son especialmente relevantes a los problemas de comunicación.

Respuesta de impulso

Un sistema lineal invariable con el tiempo sin bloques de retraso se describe mediante una ecuación diferencial lineal ordinaria con coeficientes constantes y puede caracterizarse por su respuesta de impulso $h(t)$. La *respuesta de impulso* es la solución a la ecuación diferencial cuando la función de fuerza es una función delta de Dirac. Esto es, $y(t) = h(t)$ cuando $x(t) = \delta(t)$. En redes físicas la respuesta de impulso debe ser *causal*. Esto es, que $h(t) = 0$ para $t < 0$.[23]

La respuesta de impulso puede utilizarse para obtener la salida del sistema cuando la entrada *no* es un impulso. En tal caso, una forma de onda general a la entrada puede aproximarse mediante[24]

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n\,\Delta t)[\delta(t - n\,\Delta t)]\,\Delta t \tag{2–131}$$

[23] El criterio de Paley-Wiener aporta la equivalencia en el dominio de frecuencia para la condición de causalidad del dominio en el tiempo. Esto es que $H(f)$ debe satisfacer la condición.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln\ |H(f)|\ |}{1 + f^2}\,df < \infty$$

[24] Δt corresponde a dx de la ecuación (2-47).

lo cual indica que las muestras de la entrada se toman a intervalos de Δt segundos. Entonces, al utilizar las propiedades de invariabilidad con el tiempo y de superposición se encuentra que la salida es aproximadamente

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n\ \Delta t)[h(t - n\ \Delta t)]\ \Delta t \tag{2–132}$$

Esta expresión se convierte en el resultado exacto conforme Δt se llega a cero. Dejando que $n\ \Delta t = \lambda$ se obtiene que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)\ d\lambda\ \equiv x(t) * h(t) \tag{2–133}$$

Una integral de este tipo se conoce como operación de *convolución*, como fue descrita por primera vez en la ecuación (2-62), de la sección 2-2. Esto es, la forma de onda de salida para una red invariable con el tiempo puede obtenerse mediante la convolución de la forma de onda de entrada con la respuesta de impulso para el sistema. Por consecuencia, la respuesta de impulso puede utilizare para caracterizar la respuesta del sistema en el dominio del tiempo, como se ilustra en la figura 2-14.

Función de transferencia

El espectro de la señal de salida se obtiene tomando la transformada de Fourier de ambos lados de la ecuación (2-133). Utilizando el teorema de convolución de la tabla 2-1 se obtiene que

$$Y(f) = X(f)H(f) \tag{2–134}$$

o

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} \tag{2–135}$$

donde $H(f) = \mathcal{F}[h(t)]$ es la *función de transferencia* o *respuesta de frecuencia* de la red. Esto es, las respuestas de impulso y de frecuencia son un par de la transformada de Fourier:

$$h(t) \leftrightarrow H(f)$$

Por supuesto que la función de transferencia $H(f)$ es, en general, una cantidad compleja y puede escribirse en forma polar como

$$H(f) = |H(f)|\ e^{j\underline{/H(f)}} \tag{2–136}$$

donde $|H(f)|$ es la respuesta de *amplitud* (o *magnitud*) y

$$\theta(f) = \underline{/H(f)} = \tan^{-1}\left[\frac{\text{Im}\{H(f)\}}{\text{Re}\{H(f)\}}\right] \tag{2–137}$$

es la respuesta de fase de la red. Más aún, debido a que $h(t)$ es una función real de tiempo (para redes reales), se sigue de las ecuaciones (2-38) y (2-39) que $|H(f)|$ es una función par de frecuencia y $\underline{/H(f)}$ una función impar de frecuencia.

La función de transferencia de una red lineal invariable con el tiempo puede medirse con una señal senoidal de prueba que se barre sobre la banda de frecuencias de interés. Por ejemplo, si

$$x(t) = A \cos \omega_0 t$$

entonces la salida de la red será

$$y(t) = A|H(f_0)| \cos\left[\omega_0 t + \angle H(f_0)\right] \tag{2–138}$$

donde la amplitud y la fase pueden evaluarse en un osciloscopio o con un voltímetro vectorial.

Si la entrada a la red es una señal periódica con un espectro dado por

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \, \delta(f - nf_0) \tag{2–139}$$

donde, de la ecuación (2-109), $\{c_n\}$ son los coeficientes complejos de Fourier de la señal de entrada, entonces el espectro de la señal periódica de salida, de la ecuación (2-134) es

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n H(nf_0) \, \delta(f - nf_0) \tag{2–140}$$

Puede también obtenerse la relación entre la densidad espectral de potencia (PSD) a la entrada, $\mathcal{P}_x(f)$, y aquélla en la salida, $\mathcal{P}_y(f)$, de una red lineal invariable con el tiempo.[25] A partir de la ecuación (2-66) se sabe que

$$\mathcal{P}_y(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |Y_T(f)|^2 \tag{2–141}$$

Utilizando la ecuación (2-134) en un sentido formal se obtiene que

$$\mathcal{P}_y(f) = |H(f)|^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

o

$$\mathcal{P}_y(f) = |H(f)|^2 \, \mathcal{P}_x(f) \tag{2–142}$$

Por consecuencia, la *función de transferencia de potencia* de la red es

$$G_h(f) = \frac{\mathcal{P}_y(f)}{\mathcal{P}_x(f)} = |H(f)|^2 \tag{2–143}$$

El capítulo 6 presenta una rigurosa demostración de este teorema.

Ejemplo 2–14 FILTRO PASABAJA *RC*

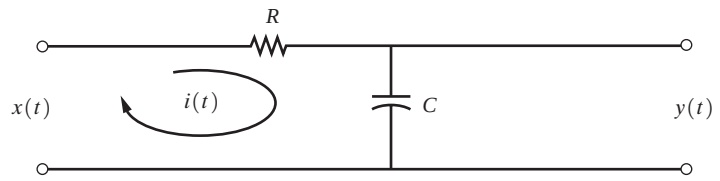
Un filtro pasabaja *RC* se muestra en la figura 2-15, donde $x(t)$ y $y(t)$ denotan las formas de onda de voltaje de entrada y salida, respectivamente. Utilizando la ley de Kirchhoff para la suma de voltajes alrededor de un bucle se obtiene que

$$x(t) = Ri(t) + y(t)$$

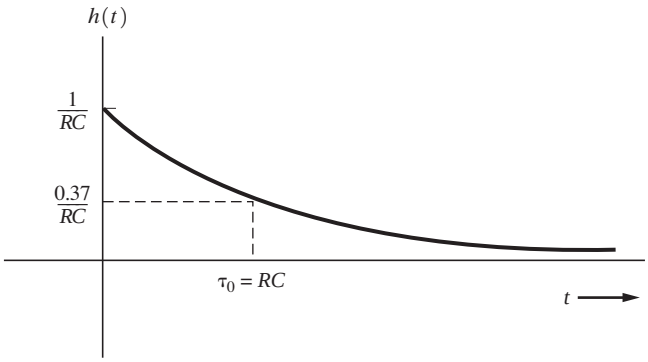
donde $i(t) = C\, dy(t)/dt$, o

$$RC \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t) \tag{2–144}$$

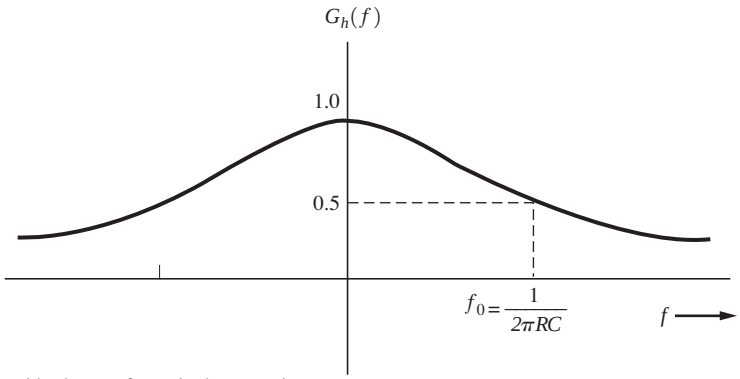
[25] La relación entre las funciones de autocorrelación de entrada y de salida $R_x(\tau)$ y $R_y(\tau)$ también pueden obtenerse, como se muestra en la ecuación (6-82).



(a) Filtro pasabaja *RC*



(b) Respuesta de impulso



(c) Función de transferencia de potencia

Figura 2–15 Características de un filtro pasabaja *RC*.

A partir de la tabla 2-1 se encuentra que la transformada de Fourier de esta ecuación diferencial es

$$RC(j2\pi f)Y(f) + Y(f) = X(f)$$

Por lo tanto, la función de transferencia para esta red es

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 + j(2\pi \mathrm{RC})f} \tag{2–145}$$

Utilizando la transformada de Fourier de la tabla 2-2 se obtiene la respuesta de impulso

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\tau_0}\, e^{-t/\tau_0}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{2–146}$$

donde $\tau_0 = RC$ es la *constante de tiempo*. Cuando se combinan las ecuaciones (2-143) y (2-145) la función de transferencia de potencia es

$$G_h(f) = |H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f/f_0)^2} \tag{2–147}$$

donde $f_0 = 1/(2\pi RC)$.

La respuesta de impulso y la función de transferencia de potencia se muestran en la figura 2-15. Note que el valor de la ganancia de potencia a $f = f_0$ (llamada la *frecuencia* a 3 dB) es $G_h(f_0) = \frac{1}{2}$. Esto es, el componente de frecuencia en la forma de onda de salida cuando $f = f_0$ se atenúa por 3 dB comparada con aquélla cuando $f = 0$. Por consecuencia, $f = f_0$ es el ancho de banda a 3 dB de este filtro. El tema sobre ancho de banda se discute con mayor detalle en la sección 2-9.

Transmisión sin distorsión

En los sistemas de comunicación a menudo se desea un *canal sin distorsión*. Esto implica que la salida del canal es justamente proporcional a la versión retrasada de la entrada

$$y(t) = Ax(t - T_d) \tag{2–148}$$

donde A es la ganancia (que puede ser menor a la unidad) y T_d es el retraso.

El requisito correspondiente en la especificación en el dominio de frecuencia se obtiene tomando la transformada de Fourier de ambos lados de la ecuación (2-148)

$$Y(f) = AX(f)e^{-j2\pi fT_d}$$

Por lo tanto, para una transmisión sin distorsión se requiere que la función de transferencia del canal esté dada por

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = Ae^{-j2\pi fT_d} \tag{2–149}$$

lo cual implica que, para que no exista distorsión a la salida de un sistema lineal invariable con el tiempo, deben satisfacerse dos requerimientos:

1. La respuesta de amplitud es plana. Esto es,

$$|H(f)| = \text{constante} = A \tag{2–150a}$$

2. La repuesta de fase es una función *lineal* de frecuencia. Esto es,

$$\theta(f) = \underline{/\, H(f)} = -2\pi fT_d \tag{2–150b}$$

Cuando se satisface la primera condición no existe *distorsión en amplitud*; cuando se satisface la segunda, no existe *distorsión en fase*. Para una trasmisión sin distorsión, ambas condiciones deben satisfacerse.

El segundo requisito a menudo se especifica de manera equivalente utilizando el retraso de tiempo. El *retraso de tiempo* del sistema se define como

$$T_d(f) = -\frac{1}{2\pi f}\,\theta(f) = -\frac{1}{2\pi f}\,\underline{/H(f)} \tag{2–151}$$

De la ecuación (2-149) se requiere que

$$T_d(f) = \text{constante} \tag{2–152}$$

para una transmisión sin distorsión. Si $T_d(f)$ no es constante, entonces habrá una distorsión en fase debido a que la respuesta de fase, $\theta(f)$, no es una función lineal de frecuencia.

Ejemplo 2–15 DISTORSIÓN CAUSADA POR UN FILTRO

Examine el efecto de distorsión causado por el filtro pasabanda *RC* estudiado en el ejemplo 2-14. A partir de la ecuación (2-145) se obtiene que la respuesta de amplitud es

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_0)^2}} \tag{2–153}$$

y la respuesta de fase es

$$\theta(f) = \underline{/H(f)} = -\tan^{-1}(f/f_0) \tag{2–154}$$

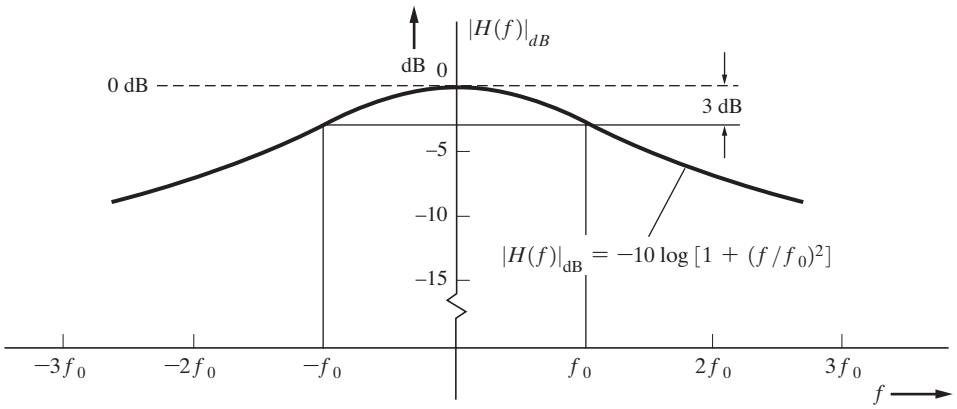
La función del retraso de tiempo correspondiente es

$$T_d(f) = \frac{1}{2\pi f}\tan^{-1}(f/f_0) \tag{2–155}$$

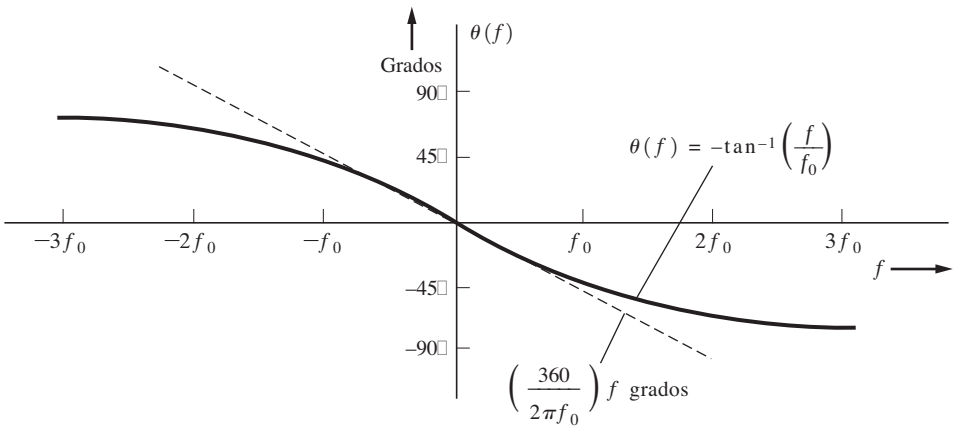
Estos resultados se grafican en la figura 2-16 y están indicados mediante las líneas sólidas. Este filtro producirá cierta distorsión debido a que las ecuaciones (2-150a) y (2-150b) no se satisfacen. Las líneas rayadas presentan los resultados equivalentes para el filtro sin distorsión. Pueden hacerse varias observaciones. Primero, si las señales involucradas tienen componentes espectrales a frecuencias menores a $0.5f_0$, entonces el filtro suministrará una transmisión casi sin distorsión, debido a que el error en la respuesta de magnitud (con respecto al caso sin distorsión) es menor a 0.5 dB y en la fase es menor a 2.1° (8□). Para $f < f_0$, el error de magnitud es menor a 3 dB y el de fase es menor a 12.3° (27□). En la ingeniería práctica, este tipo de error a menudo se considera tolerable. Las formas de onda con componentes espectrales menores a $0.50f_0$ se retrasarán aproximadamente $1/(2\pi f_0)$ s, como se muestra en la figura 2-16c. Esto es, si la frecuencia de corte del filtro fuera $f_0 = 1$ kHz, entonces el retraso sería de 0.2 ms. Para las señales de banda ancha, los componentes de más alta frecuencia serían retrasados por una menor cantidad que los de más baja frecuencia.

Distorsión de señales de audio, de video y de datos

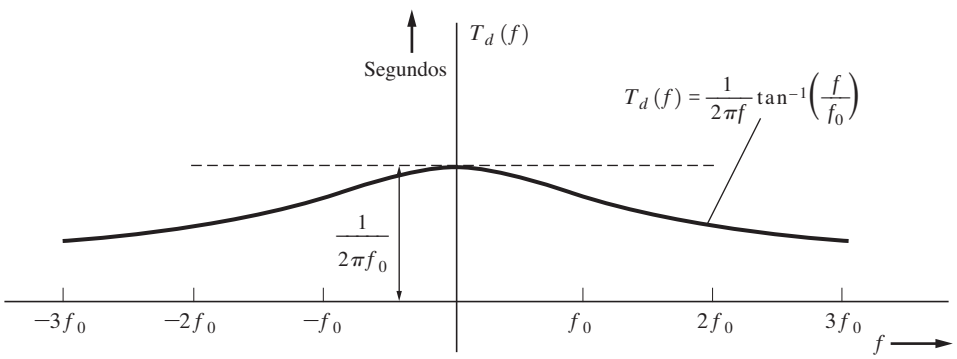
Un sistema lineal invariable con el tiempo producirá una distorsión en amplitud si la respuesta de ésta no es plana y a su vez producirá una distorsión en fase (es decir, retrasos diferenciales de tiempo) si la respuesta de fase no es una función lineal de frecuencia.



(a) Respuesta de magnitud



(b) Respuesta de fase



(c) Retraso de tiempo

Figura 2–16 Distorsión causada por un filtro pasabajas *RC*.

En aplicaciones de audio el oído humano es relativamente sensible a la distorsión de amplitud pero insensible a la de fase. Esto se debe a que el error de fase de 15° para un filtro de audio a 15 kHz producirá una variación (error) en retraso de tiempo de cerca de 3μs. Comparando este error con la duración de una sílaba hablada que está en el rango de 0.01 a 0.1 segundos, el error de retraso de tiempo es despreciable debido a una pobre respuesta de fase en el filtro. Sin embargo, un error de amplitud a 3 dB sería ciertamente detectable por el oído humano. Por lo tanto, en las especificaciones de distorsión lineal en amplificadores de audio de alta fidelidad, el principal interés está en la presencia de características de respuesta de frecuencia con magnitud no plana y no en la característica de respuesta de fase.

En aplicaciones analógicas de video, lo opuesto es verdadero: la respuesta de fase se convierte en la consideración dominante. Esto es porque el ojo humano es más sensible a errores de retraso de tiempo, los cuales resultan en bordes borrosos de los objetos, en lugar de errores en amplitud (intensidad).

Para señales de datos, un filtro lineal puede causar que un pulso de datos en una ranura de tiempo se propague a ranuras de tiempo adyacentes causando interferencia intersimbólica (ISI, por sus siglas en inglés). El diseño de filtros para obtener una ISI mínima se discute en la sección 3-6.

Si el sistema es no lineal o variable con el tiempo, entonces se producirán otros tipos de distorsión. Como resultado de esto, aparecerán nuevos componentes de frecuencia a la salida que no están a la entrada. En algunas aplicaciones de comunicación, las nuevas frecuencias son en realidad un resultado deseado y, en consecuencia, no podrán considerarse como distorsión. Se invita al lector a revisar la sección 4-3 para estudiar estos efectos. En la sección 4-5 se analiza el retraso de tiempo en filtros pasabanda y se desarrollan fórmulas para el retraso de grupo y el de fase.

2–7 SEÑALES LIMITADAS POR BANDA Y RUIDO

Una forma de onda limitada en banda tiene espectros diferentes de cero sólo dentro de una cierta banda de frecuencias. En este caso se aplican importantes teoremas, en particular el de muestreo, para procesar la forma de onda. Como se muestra en el capítulo 3, estas ideas son *especialmente aplicables a problemas de comunicación digital.*

Primero se examinan algunas propiedades de las señales limitadas en banda. Después se desarrollan los teoremas de muestreo y de dimensionalidad.

Formas de onda limitadas por banda

DEFINICIÓN. Una forma de onda $w(t)$ es (absolutamente) *limitada en banda* a B hertz si

$$W(f) = \mathcal{F}[w(t)] = 0, \quad \text{para } |f| \geq B \tag{2–156}$$

DEFINICIÓN. Una forma de onda $w(t)$ es (absolutamente) *limitada en tiempo* si

$$w(t) = 0, \quad \text{para } |t| > T \tag{2–157}$$

TEOREMA. *Una forma de onda absolutamente limitada en banda no puede ser absolutamente limitada por tiempo y viceversa.*

Este teorema se ilustra con el espectro para la forma de onda de pulso rectangular en el ejemplo 2-5. Una demostración relativamente simple del teorema se obtiene empleando contradicción [Wozencraft y Jacobs, 1965].

De este teorema surge una paradoja. Se sabe que una forma de onda limitada en banda no puede ser limitada en tiempo. Sin embargo, se cree que una forma de onda física *está* limitada por tiempo debido a que el dispositivo que genera la forma de onda se construyó en algún tiempo finito en el pasado y el dispositivo decaerá en algún tiempo futuro (produciendo, por lo tanto, una forma de onda limitada por tiempo). Esta paradoja se resuelve observando que se está modelando un proceso físico con un modelo matemático y tal vez las suposiciones no están satisfechas, aunque se considere lo contrario. Es decir, existe alguna incertidumbre sobre cómo se verán exactamente la forma de onda de tiempo real y su espectro correspondiente, especialmente a valores extremos de tiempo y de frecuencia, debido a la inexactitud de nuestros dispositivos de medición. Esta relación entre el proceso físico y nuestro modelo matemático se discute en el documento interesante de David Slepian [1976]. Aunque la señal puede no ser absolutamente limitada en banda, sí puede ser limitada en banda para propósitos prácticos en el sentido de que el espectro de amplitud tiene un nivel despreciable más allá de cierta frecuencia.

Otro teorema de interés establece que si $w(t)$ es absolutamente *limitada por banda*, entonces es una función *analítica*. Una función analítica es aquella que posee derivadas con valores finitos cuando se evalúan para cualquier valor finito de *t*. Este teorema puede demostrarse utilizando una expansión de serie de Taylor [Wozencraft y Jacobs, 1965].

Teorema de muestreo

El teorema de muestreo es uno de los de mayor utilidad porque se aplica a los sistemas digitales de comunicación, y es otra aplicación de una expansión de series ortogonales.

TEOREMA DE MUESTREO. *Cualquier forma de onda física puede representarse sobre el intervalo* $-\infty < t < \infty$ *mediante*

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n \frac{\text{sen}\{\pi f_s[t - (n/f_s)]\}}{\pi f_s[t - (n/f_s)]} \tag{2–158}$$

donde

$$a_n = f_s \int_{-\infty}^{\infty} w(t) \frac{\text{sen}\{\pi f_s[t - (n/f_s)]\}}{\pi f_s[t - (n/f_s)]}\, dt \tag{2–159}$$

y f_s *es un parámetro al cual se le asigna algún valor conveniente mayor a cero. Aún más, si* $w(t)$ *está limitada en banda a B hertz y* $f_s \geq 2B$*, entonces la ecuación* (2-158) *se convierte en la representación de la función de muestreo, donde*

$$a_n = w(n/f_s) \tag{2–160}$$

Esto es que, para $f_s \geq 2B$, los coeficientes de la serie ortogonal son simplemente los valores de la forma de onda generados cuando se obtiene una muestra cada $1/f_s$ segundos.

La serie dada por las ecuaciones (2-158) y (2-160) es llamada algunas veces *serie cardinal*. Los matemáticos han sabido de esta serie desde por lo menos 1915 [Whittaker, 1915] y los ingenieros desde el descubrimiento de Shannon, quien conectó la serie con la teoría de la información [Shannon, 1949]. Una excelente guía práctica sobre este tema se publicó en el documento *Proceedings of the IEEE* [Jerri, 1977].

Demostración. Debe saberse que

$$\varphi_n(t) = \frac{\text{sen}\{\pi f_s[t - (n/f_s)]\}}{\pi f_s[t-(n/f_s)]} \tag{2–161}$$

a partir de un conjunto de funciones ortogonales. De la ecuación (2-77) debe demostrarse que la ecuación (2-161) satisface que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\varphi_m^*(t)\, dt = K_n\, \delta_{nm} \tag{2–162}$$

Empleando el teorema de Parseval, en la ecuación (2-40) se ve que el lado izquierdo se convierte en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\varphi_m^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(f)\Phi_m^*(f)\, df \tag{2–163}$$

donde

$$\Phi_n(f) = \mathcal{F}[\varphi_n(t)] = \frac{1}{f_s}\, \Pi\left(\frac{f}{f_s}\right) e^{-j2\pi(nf/f_s)} \tag{2–164}$$

Entonces se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\varphi_m^*(t)\, dt = \frac{1}{(f_s)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\Pi\left(\frac{f}{f_s}\right)\right]^2 e^{-j2\pi(n-m)f/f_s}\, df$$

$$= \frac{1}{(f_s)^2} \int_{-f_s/2}^{f_s/2} e^{-j2\pi(n-m)(f/f_s)}\, df = \frac{1}{f_s}\, \delta_{nm} \tag{2–165}$$

Por lo tanto, los términos de $\varphi_n(t)$, como resultan de la ecuación (2-161), son funciones ortogonales con $K_n = 1/f_s$. Utilizando la ecuación (2-84) se observa que la ecuación (2-159) sigue de ella. Más aún, se demostrará que la ecuación (2-160) sigue para el caso donde $w(t)$ está absolutamente limitada en banda a B hertz con $f_s \geq 2B$. Empleando la ecuación (2-84) y el teorema de Parseval, en la ecuación (2-40), se tiene que

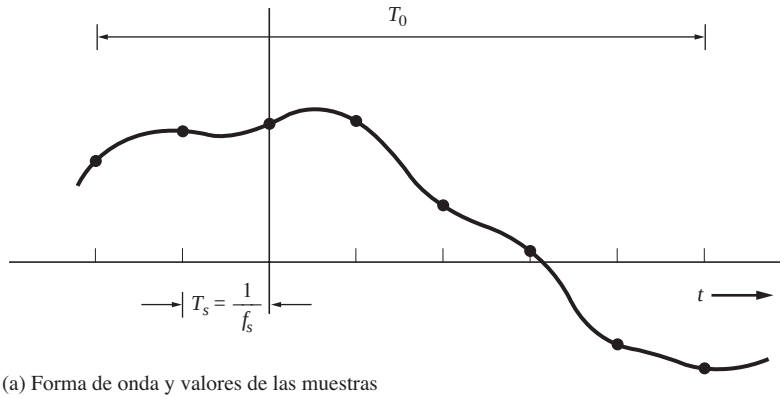
$$a_n = f_s \int_{-\infty}^{\infty} w(t)\varphi_n^*(t)\, dt$$

$$= f_s \int_{-\infty}^{\infty} W(f)\Phi_n^*(f)\, df \tag{2–166}$$

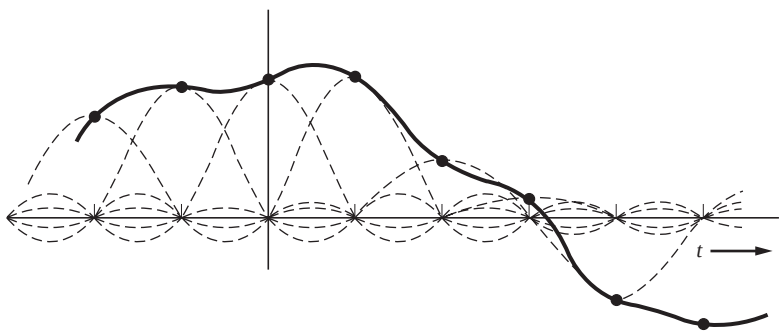
Sustituyendo (2-164) resulta en

$$a_n = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} W(f)e^{+j2\pi f(n/f_s)}\, df \tag{2–167}$$

Pero debido a que $W(f)$ es cero para $|f| > B$, donde $B \leq f_s/2$, los límites de la integral pueden extenderse a $(-\infty, \infty)$ sin cambiar el valor de la integral. Esta integral con límites infinitos es sólo la transformada inversa de Fourier de $W(f)$ evaluada a $t = n/f_s$. Por consecuencia, $a_n = w(n/f_s)$, que es igual a la ecuación (2-160).



(a) Forma de onda y valores de las muestras



(b) Forma de onda reconstruida y valores de las muestras

Figura 2–17 Teorema de muestreo.

De la ecuación (2-167) resulta obvio que la mínima velocidad de muestreo permitida para la reconstrucción de una forma de onda limitada por banda sin errores está dada por

$$(f_s)_{\text{mín}} = 2B \tag{2–168}$$

Esto se conoce como la *frecuencia de Nyquist.*

Ahora se examina el problema de la reproducción de una forma de onda de banda limitada utilizando N valores de muestra. Suponga que sólo está interesado en reproducir la forma de onda sobre un intervalo de T_0 segundos, como lo muestra la figura 2-17a. Entonces puede truncar la serie de funciones de muestreo de la ecuación (2-158), de forma tal que se incluyan sólo N funciones $\varphi_n(t)$ cuyos picos están dentro del intervalo T_0 de interés. Es decir, la forma de onda puede reconstruirse aproximadamente utilizando N muestras. La ecuación es

$$w(t) \approx \sum_{n=n_1}^{n=n_1+N} a_n \varphi_n(t) \tag{2–169}$$

donde el conjunto $\{\varphi_n(t)\}$ está descrito por la ecuación (2-161). La figura 2-17b muestra la forma de onda reconstruida (línea sólida), la cual se obtiene mediante la suma ponderada de formas de onda retrasadas por tiempo de tipo $(\text{sen } x)/x$ (líneas rayadas), donde las ponderaciones son los valores de muestra $a_n = w(n/f_s)$ denotados por los puntos. La forma de onda está limitada en banda a B

hertz con la frecuencia de muestreo de $f_s \geq 2B$. Los valores de muestra pueden almacenarse, por ejemplo, en la memoria de una computadora digital, de tal manera que la forma de onda puede reconstruirse en un futuro o los valores pueden transmitirse sobre un sistema de comunicación en donde se lleva a cabo la reconstrucción de la forma de onda en el lado receptor. En cualquiera de estos casos, la forma de onda puede reconstruirse a partir de los valores de muestra mediante la ecuación (2-169). Es decir, cada valor de muestra se multiplica por la función (sen x/x) adecuada y estas funciones (sen x/x) ponderadas se suman para generar la forma de onda original. La figura 2-17b ilustra este procedimiento. El mínimo número de valores de muestra necesarios para la reconstrucción de la forma de onda es

$$N = \frac{T_0}{1/f_s} = f_s T_0 \geq 2BT_0 \tag{2–170}$$

y existen N funciones ortogonales en el algoritmo de reconstrucción. Se puede decir que N es el número de dimensiones requeridas para la reconstrucción de la aproximación a T_0 segundos de la forma de onda.

Muestreo de impulso y procesamiento digital de señales 1DSP2

Otra serie ortogonal de utilidad es la *serie con muestreo de impulsos*, la cual se obtiene cuando las funciones ortogonales (sen x/x) del teorema de muestreo son reemplazadas por un conjunto ortogonal de funciones delta (de impulso). Esta serie es también idéntica a la forma de onda con muestreo de impulsos $w_s(t)$: ambas pueden obtenerse multiplicando la forma de onda sin muestrear por un tren de impulso de ponderación unitaria, de lo cual resulta que

$$\begin{aligned} w_s(t) &= w(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(nT_s)\, \delta(t - nT_s) \end{aligned} \tag{2–171}$$

donde $T_s = 1/f_s$, como se ilustra en la figura 2-18.[26] En la figura, la ponderación (área) de cada impulso, $w(nT_s)$, está indicada por la altura del impulso.

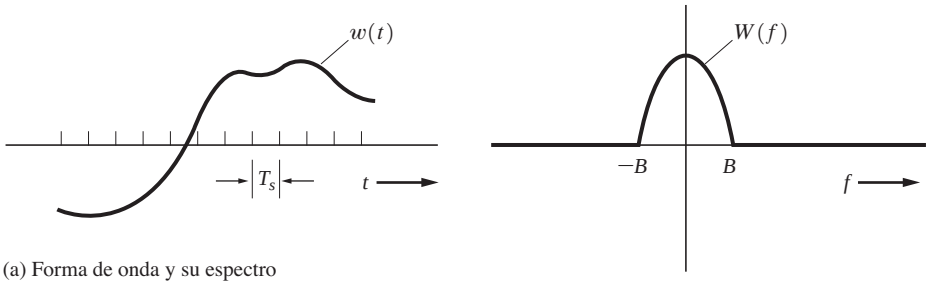
El espectro para la forma de onda con muestreo de impulsos $w_s(t)$ puede evaluarse sustituyendo la serie de Fourier del tren (periódico) de impulsos dentro de la ecuación (2-171), de donde

$$w_s(t) = w(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s}\, e^{jn\omega_s t} \tag{2–172}$$

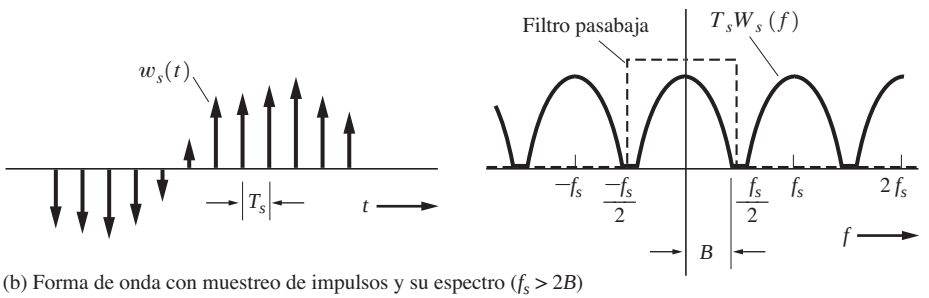
Tomando la transformada de Fourier de ambos lados de esta ecuación, se tiene que

$$\begin{aligned} W_s(f) &= \frac{1}{T_s}\, W(f) * \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t}\right] = \frac{1}{T_s}\, W(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left[e^{jn\omega_s t}\right] \\ &= \frac{1}{T_s}\, W(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s) \end{aligned}$$

[26] Para propósitos ilustrativos se asume que $W(f)$ es real.



(a) Forma de onda y su espectro



(b) Forma de onda con muestreo de impulsos y su espectro ($f_s > 2B$)

Figura 2–18 Muestreo de impulso.

o

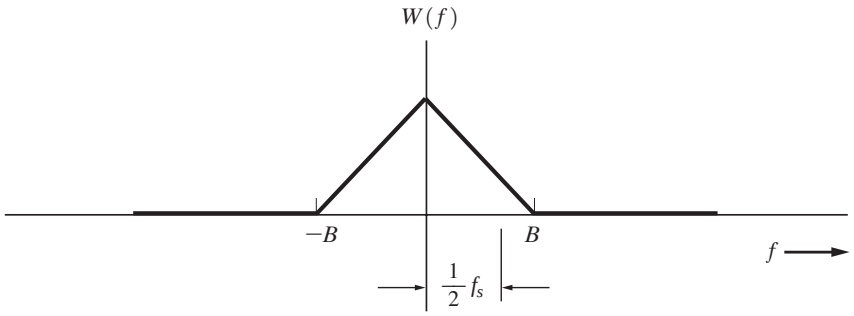
$$W_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(f - nf_s) \tag{2–173}$$

Como la figura 2-18b lo ejemplifica, *el espectro de la señal con muestreo de impulsos es el espectro de la señal sin muestreo que se repite cada f_s Hz, donde f es la frecuencia de muestreo (muestras/sec).*[27] Este resultado bastante significativo es uno de los principios básicos del *procesamiento digital de señales* (DSP).

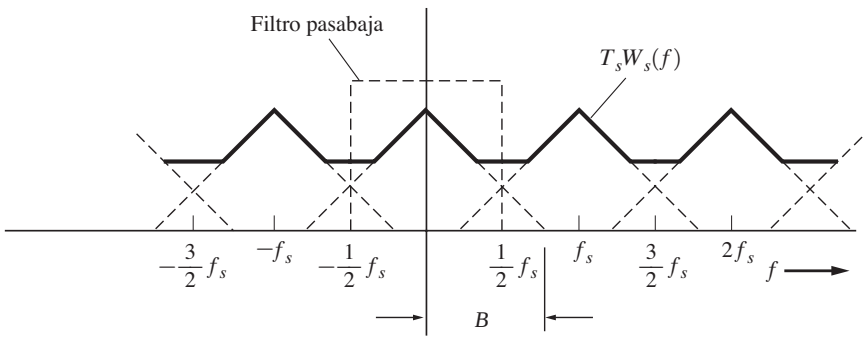
Note que esta técnica de muestreo de impulsos puede utilizarse para convertir el espectro de una señal a otra banda de frecuencias centrada en alguna harmónica de la frecuencia de muestreo. Un circuito más general que puede convertir el espectro a cualquier banda de frecuencias deseada se conoce como *mezclador*. Los mezcladores se discuten en la sección 4-11.

Si $f_s \geq 2B$, como se ilustra en la figura 2-18, entonces los espectros repetidos no están solapados, y el espectro original puede regenerarse cortando $W_s(t)$ arriba de $f_s/2$. Por lo tanto, $w(t)$ puede reproducirse a partir de $w_s(t)$ simplemente pasando $w_s(t)$ a través de un filtro pasabajas ideal que tiene una frecuencia de corte de $f_c = f_s/2$, donde $f_s \geq 2B$.

[27] En el capítulo 3 este resultado se generaliza al muestreo instantáneo con un tren de pulsos consistente en pulsos con un ancho finito y con forma arbitraria (en lugar de impulsos). Esto se conoce como modulación de amplitud de pulsos (PAM, por sus siglas en inglés) del tipo de muestreo instantáneo.



(a) Espectro de una forma de onda sin muestreo



(b) Espectro de una forma de onda con muestreo de impulsos ($f_s < 2B$)

Figura 2–19 Submuestreo y aliasing o doblez espectral.

Si $f_s < 2B$ (es decir, si la forma de onda está submuestreada), el espectro de $w_s(t)$ consistirá en espectros repetidos y solapados de $w(t)$, como se ilustra en la figura 2-19.[28] El solape espectral o inversión de cola se conoce como aliasing o *doblez espectral*.[29] En este caso, la versión de $w_s(t)$ del filtro pasabaja no será exactamente igual a $w(t)$. La $w(t)$ recuperada presentará distorsión debido al aliasing. La distorsión puede eliminarse al *prefiltrar* la $w(t)$ original antes del muestreo, de manera tal que la $w(t)$ prefiltrada no tenga componentes espectrales arriba de $|f| = f_s/2$. Esta prefiltración todavía produce distorsión en la forma de onda recuperada debido a que el prefiltro corta al espectro de la $w(t)$ original arriba de $f = f_s/2$. Sin embargo, a partir de la figura 2-19 puede mostrarse que si se utiliza un prefiltro, la forma de onda recuperada que se obtiene de la versión pasabaja de la señal de muestra tendrá la mitad de la energía de error comparada con la que resultaría al no emplear el filtro de premuestreo.

[28] Para propósitos ilustrativos se asume que $W(f)$ es real.

[29] $fs/2$ es la frecuencia de doblez, donde fs es la frecuencia de muestreo. Para el caso sin aliasing, se requiere que $fs > 2B$, donde $2B$ es la frecuencia de Nyquist.

Una forma de onda física $w(t)$ tiene energía finita. De las ecuaciones (2-42) y (2-43) se sigue que el espectro de magnitud para la forma de onda, $|W(f)|$, debe ser despreciable para $|f| > B$, donde B es un número positivo seleccionado adecuadamente. En consecuencia, desde un punto de vista práctico, la forma de onda física está esencialmente limitada por banda a B Hz, donde B se escoge de tal manera que ésta sea lo suficientemente grande para que la energía de error esté debajo de alguna cantidad especificada.

Teorema de dimensionalidad

El teorema de muestreo puede reiterarse en una forma más general conocida como el *teorema de dimensionalidad* (el cual está ilustrado en la figura 2-17).

TEOREMA. *Cuando BT_0 es grande, una forma de onda real puede especificarse completamente por*

$$N = 2BT_0 \tag{2–174}$$

piezas independientes de información que describirán la forma de onda sobre un intervalo T_0. N es el número de dimensiones requeridas para especificar la forma de onda y B el ancho de banda absoluto de la forma de onda [Shannon, 1949; Wozencraft y Jacobs, 1965; Wyner y Shamai (Shitz), 1998].

El teorema de dimensionalidad de la ecuación (2-174) establece que la información transportada por una forma de onda limitada en banda o un sistema de comunicación limitado en banda es proporcional al producto del ancho de banda del sistema y el tiempo permitido para la transmisión de la información. El *teorema de dimensionalidad presenta profundas implicaciones sobre el diseño y rendimiento de todo tipo de sistemas de comunicación.* Por ejemplo, en sistemas de radar, es bien aceptado que el producto del tiempo por el ancho de banda de la señal recibida debe ser grande para un rendimiento superior.

Existen *dos maneras distintas en las que el teorema de dimensionalidad puede aplicarse. Primero*, si cualquier forma de onda limitada en banda está dada y se desea almacenar algunos números en una tabla (o un banco de memoria en una computadora) que puede utilizarse para la reconstrucción de la forma de onda sobre un intervalo de T_0 segundos, entonces deben almacenarse *por lo menos N* números y, aún más, la velocidad promedio de muestreo debe ser de por lo menos la velocidad de Nyquist. Esto es,[30]

$$f_s \geq 2B \tag{2–175}$$

Por lo tanto, en este primer tipo de aplicaciones, el teorema de dimensionalidad se utiliza para el cálculo del número de ubicaciones de almacenamiento (cantidad de memoria) requerido para representar una forma de onda.

El *segundo* tipo de aplicaciones es el inverso del problema. En este caso el teorema de dimensionalidad se utiliza para estimar el ancho de banda de las formas de onda. Esta aplicación se discute a detalle en el capítulo 3, sección 3-4, en donde el teorema de dimensionalidad se emplea para suministrar un límite inferior al ancho de banda de señales digitales.

[30] Si el espectro de la forma de onda de la cual se están tomando muestras tiene una línea en $f = \pm B$, entonces existe alguna ambigüedad con respecto a si la línea está incluida dentro del ancho de banda B o no. La línea está incluida si se deja que $fs > 2B$ (es decir, ignorando el signo de igualdad).

2–8 TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Con la conveniencia que otorgan las computadoras personales y la disponibilidad de circuitos integrados para el procesamiento digital de señales, el espectro de una forma de onda puede fácilmente aproximarse utilizando la transformada discreta de Fourier (DFT). Aquí se demuestra cómo la DFT puede emplearse en el cálculo de muestras de una transformada continua de Fourier (CFT), ecuación (2-26), y los valores para los coeficientes complejos de la serie de Fourier de la ecuación (2-94).

DEFINICIÓN. La *transformada discreta de Fourier (DFT)* está definida mediante

$$X(n) = \sum_{k=0}^{k=N-1} x(k)e^{-j(2\pi/N)nk} \tag{2–176}$$

donde $n = 0, 1, 2, ..., N - 1$, y la *transformada discreta inversa de Fourier (IDFT)* está definida por

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{n=N-1} X(n)e^{j(2\pi/N)nk} \tag{2–177}$$

donde $k = 0, 1, 2, ..., N - 1$.

El tiempo y la frecuencia no aparecen explícitamente debido a que las ecuaciones (2-176) y (2-177) sólo son definiciones implementadas en una computadora digital para calcular N valores para la DFT y la IDFT, respectivamente. Se debe saber que otros autores utilizan definiciones diferentes e igualmente válidas. Por ejemplo, un factor de $1/\sqrt{N}$ puede utilizarse en el lado derecho de la ecuación (2-176) si el factor $1/N$ de la ecuación (2-177) se reemplaza con $1/\sqrt{N}$. Esto produce un factor de escala diferente cuando la DFT está relacionada con la CFT. Además, los signos de los exponentes en las ecuaciones (2-176) y (2-177) pueden intercambiarse. Esto invertiría las muestras espectrales a lo largo del eje de la frecuencia. La transformada rápida de Fourier (FFT) es un algoritmo rápido para evaluar la DFT [Ziemer, Tranter y Fannin, 1998].

MATLAB utiliza las definiciones para DFT e IDFT dadas por las ecuaciones (2-176) y (2-177), excepto que los elementos del vector están indexados del 1 a N en lugar del 0 a $N - 1$. Por lo tanto, los algoritmos en MATLAB para la FFT están relacionados con las ecuaciones (2-176) y (2-177) a través de[31]

$$\mathbf{X} = fft(\mathbf{x}) \tag{2–178}$$

y

$$\mathbf{x} = ifft(\mathbf{X}) \tag{2–179}$$

donde $\mathbf{x}$ es un vector de N elementos correspondiente a las muestras de la forma de onda y $\mathbf{X}$ es el vector de N elementos de la DFT. Se escoge una N que sea una potencia de 2 (es decir, $N = 2^m$, donde m es un entero positivo). Si se utiliza otro soft*w*are para la FFT, el usuario debe estar consciente de las definiciones especificas que están implementadas de tal manera que los resultados puedan interpretarse adecuadamente.

Se estudiarán dos aplicaciones importantes de la DFT. La primera utiliza la DFT para aproximar el espectro $W(f)$—esto es, la DFT se emplea para aproximar la transformada continua de Fourier de $w(t)$. La aproximación está dada por la ecuación (2-184) e ilustrada mediante el ejemplo 2-16.

[31] Los algoritmos en MATHCAD están relacionados con las ecuaciones (2-176) y (2-177) mediante las ecuaciones $\mathbf{X} = \sqrt{N}\ icfft\ (\mathbf{x})$ y $\mathbf{x} = (1/\sqrt{N})\ cfft\ (\mathbf{X})$.

La segunda aplicación utiliza la DFT para evaluar los coeficientes complejos de la serie de Fourier c_n. El resultado está dado por la ecuación (2-187) e ilustrado por el ejemplo 2-17.

Utilizando la DFT para calcular la transformada continua de Fourier

Ahora se examinará la relación entre la DFT, definida por la ecuación (2-176), y la CFT. Esto involucra tres conceptos: ventaneo, muestreo y generación periódica de muestras, mismos que se ilustran en la figura 2-20, donde el lado izquierdo es el dominio en el tiempo y el lado derecho corresponde al dominio de frecuencia. Suponga que la CFT de una forma de onda $w(t)$ se evaluará utilizando la DFT. La forma de onda de tiempo primero se ventanea (trunca) sobre el intervalo $(0, T)$ de tal manera que sólo se requiere un número finito N de muestras. La forma de onda ventaneada, denotada por el subíndice w, es

$$w_w(t) = \begin{cases} w(t), & 0 \le t \le T \\ 0, & t \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} = w(t)\ \Pi\left(\frac{t - (T/2)}{T}\right) \tag{2–180}$$

La transformada de Fourier de la forma de onda ventaneada es

$$W_w(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w_w(t) e^{-j2\pi ft}\, dt = \int_0^T w(t) e^{-j2\pi ft}\, dt \tag{2–181}$$

A continuación se aproxima la CFT utilizando una serie finita para representar la integral, donde $t = k\,\psi t$, $f = n/T$, $dt = \Delta t$ y $\Delta t = T/N$. Entonces

$$W_w(f)|_{f=n/T} \approx \sum_{k=0}^{N-1} w(k\,\Delta t) e^{-j(2\pi/N)nk}\,\Delta t \tag{2–182}$$

Comparando este resultado con la ecuación (2-176) se obtiene la relación entre la CFT y la DFT. Ésta es,

$$W_w(f)|_{f=n/T} \approx \Delta t\, X(n) \tag{2–183}$$

donde $f = n/T$ y $\Delta t = T/N$. Los valores de muestra utilizados en el cálculo de la DFT son $x(k) = w(k\,\Delta t)$, como se muestra en la parte izquierda de la figura 2-20c. También, debido a que el valor de $e^{-j(2\pi/N)nk}$ en la ecuación (2-176) es periódico en n. En otras palabras, los mismos valores se repetirán para $n = N, N + 1$, ... de la manera en que se obtuvieron para $n = 0, 1$, ..., y entonces se sigue que $X(n)$ es también periódica, aunque sólo los primeros N valores se presentarán como salida de programas en computadora para la DFT, ya que los otros son sólo repeticiones. Otra forma de establecer que la DFT y la IDFT son periódicas es reconocer que, como se están utilizando muestras, la transformada discreta es un ejemplo de muestreo de impulsos y, por lo tanto, el espectro debe ser periódico alrededor de la frecuencia de muestreo, $f_s = 1/\Delta t = N/T$, como se ilustra en la figura 2-18 y de nuevo en las figuras 2-20c y 2-20d. Aún más, si se desea el espectro para frecuencias negativas, ya que la computadora envía de salida $X(n)$ para valores positivos de n de 0, 1, ..., $N - 1$, entonces la ecuación (2-183) debe modificarse para suministrar valores espectrales sobre el entero rango fundamental de $-f_s/2 < f < f_s/2$. Por lo tanto, para frecuencias positivas se emplea

$$W_w(f)|_{f=n/T} \approx \Delta t\, X(n), \quad 0 \le n < \frac{N}{2} \tag{2–184a}$$

y para frecuencias negativas se utiliza

$$W_w(f)|_{f=(n-N)/T} \approx \Delta t\, X(n), \quad \frac{N}{2} < n < N \tag{2–184b}$$

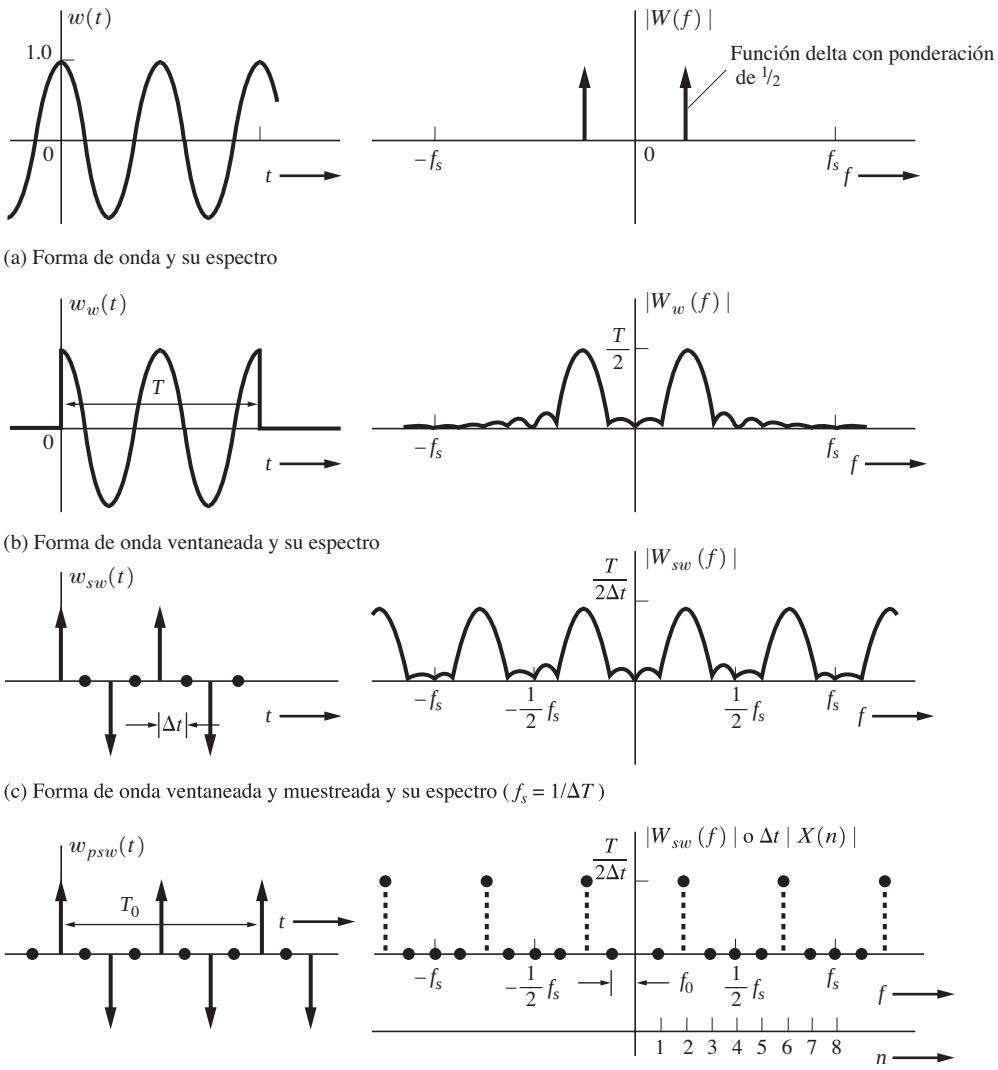


Figura 2–20 Comparación de los espectros de la CFT y la DFT.

De manera similar, la relación entre la CFT *inversa* y la DFT inversa está descrita por la ecuación (2-207).

La figura 2-20 ilustra el hecho de que si no se tiene cuidado, la DFT puede generar errores significativos cuando se utiliza para aproximar la CFT. Estos errores se deben a un número de factores que se pueden categorizar en tres efectos básicos: *fuga*, *aliasing* y el *efecto de estacas*.

El primer efecto está causado por un ventaneo en el dominio del tiempo. En el dominio de frecuencia, esto corresponde a la convolución del espectro de la forma de onda sin ventaneo con el espectro (transformada de Fourier) de la función de ventana. Esto dispersa el espectro de los componentes de frecuencia de $w(t)$, como se ilustra en la figura 2-20b, y causa que cada componente de

frecuencia se "fugue" a frecuencias adyacentes. La fuga puede producir errores cuando se compara la DFT con la CFT. El efecto puede reducirse incrementando el ancho de ventana T o, de forma equivalente, aumentando N para una ΔT dada. Las formas de ventana diferentes al rectángulo también pueden utilizarse para reducir los lóbulos laterales en el espectro de la función de ventana [Harris, 1978□Ziemer, Tranter y Fannin, 1998]. Los componentes periódicos grandes en $w(t)$ causan más fugas y si estos componentes están presentes, pueden eliminarse antes de evaluar la DFT para reducir la fuga.

A partir del estudio anterior sobre muestreo se sabe que el espectro de una forma de onda muestreada consiste en la repeteción del espectro de una forma de onda sin muestreo alrededor de harmónicas de la frecuencia de muestreo. Si $f_s < 2B$, donde $f_s = 1/\Delta t$ y B es el componente de frecuencia significativo más alto en la forma de onda sin muestreo, entonces ocurrirán errores de aliasing, que es el segundo efecto, y puede reducirse utilizando una frecuencia de muestreo más alta o un filtro pasabajas de premuestreo. Note que el componente de frecuencia más alto que puede evaluarse con una DFT de N puntos es de $f = f_s/2 = N/(2T)$.

El tercer tipo de error, el efecto de estacas, ocurre porque la DFT de N puntos no puede resolver los componentes espectrales más cercanos que al espacio de $\Delta f = 1/T$. Δf puede disminuirse si T se incrementa. Si la longitud de datos está limitada a T_0 segundos, donde $T_0 \leq T$, entonces T puede extenderse añadiendo puntos de muestreo con valor de cero. Esto se conoce como *relleno con ceros* y reducirá la Δf para producir una mejor resolución espectral.

La computadora no puede calcular valores infinitos: por lo tanto, la DFT se aproximará a las funciones delta de Dirac mediante pulsos de amplitud finita. Sin embargo, las ponderaciones de las funciones delta pueden calcularse con exactitud empleando la DFT para evaluar los coeficientes de la serie de Fourier. Esto se demuestra en el ejemplo 2-17.

En resumen, varios conceptos fundamentales se aplican cuando se utiliza la DFT en la evaluación de la CFT. Primero, la forma de onda está ventaneada sobre un intervalo de $(0, T)$ de tal manera que se obtiene un número *finito* de muestras. Segundo, la DFT y la IDFT son periódicas con periodos de $f_s = 1/\Delta t$ y T, respectivamente. Los parámetros Δt, T y N se seleccionan tomando en cuenta las siguientes consideraciones:

- Δt se escoge de tal manera que satisfaga la condición de muestreo de Nyquist, $f_s = 1/\Delta t > 2B$, donde B es la frecuencia más alta en la forma de onda. Δt es el tiempo entre muestras y se conoce como *resolución de tiempo*. Además, $t = k\Delta t$.
- T se escoge para obtener la *resolución de frecuencia* deseada, donde la resolución de frecuencia es $\Delta f = 1/T$. Además, $f = n/T$.
- N es el número de puntos de datos y está determinado por $N = T/\Delta t$.

N depende de los valores utilizados para Δt y T. La duración del cálculo aumenta conforme se incrementa N.[32] La DFT de N puntos genera los espectros de N frecuencias sobre el intervalo de frecuencia $(0, f_s)$, donde $f_s = 1/\Delta t = N/T$. La mitad de este intervalo de frecuencia representa frecuencias positivas y la otra mitad frecuencias negativas, como se describe en la ecuación (2-184). Esto también se ilustra en el siguiente ejemplo.

[32] Los algoritmos de la *transformada rápida de Fourier* (FFT) son maneras rápidas de calcular la DFT. El número de multiplicaciones complejas requeridas para la DFT es de $N2$, mientras que la FFT, donde se escoge una N tal que ésta sea una potencia de 2, requiere sólo de $(N/2)\log 2N$ multiplicaciones complejas. Por lo tanto, la FFT proporciona un factor de mejora de $2N/(\log 2N)$ comparada con la DFT, la cual otorga una mejora de 113.8 para una FFT con $N = 512$ puntos.

Ejemplo 2–16 DFT PARA UN PULSO RECTANGULAR

La tabla 2-3 presenta un listado de un archivo en MATLAB que calcula el espectro para un pulso rectangular que utiliza el algoritmo de la DFT. Los resultados calculados se muestran en la figura 2-1. Note que las ecuaciones (2-178) y (2-183) se emplean para relacionar los resultados de la DFT con el

TABLA 2–3 LISTADO EN MATLAB PARA EL CÁLCULO DEL ESPECTRO DE UN PULSO RECTANGULAR, UTILIZANDO LA DFT

```
% Archivo: FIG2_21.M
% Calcule la FFT para un escalón truncado
% Deje que tfin sea el fin del escalón.
M = 7;
N = 2^M;
n = 0:1:N-1;
tfin = 1;
T = 10;
dt = T/N;
t = n*dt;
% Creando la forma de onda de tiempo
w = zeros(length(t),1);
for (i = 1:1:length(w))
  if (t(i) <= tfin)
    w(i) = 1;
  end;
end;
% Calculando la FFT
W = dt*fft(w);
f = n/T;
% Calculando la posición del cuarto nulo (NULL)
pos = index(f,4/tfin);
plot_pr(2);
plot(t,w);
axis([0 T 0 1.5]);
xlabel('t (sec) -->');
ylabel('w(t)');
title('Forma de onda de tiempo');
pause;
subplot(311);
plot(f(1:pos),abs(W(1:pos)));
xlabel('f (Hz) -->');
ylabel('|W(f)|');
title('ESPECTRO DE MAGNITUD hasta el cuarto nulo (NULL)');
subplot(312);
plot(f(1:pos),180/pi*angle(W(1:pos)));
xlabel('f (Hz) -->');
ylabel('theta(f) (grados)');
title('ESPECTRO DE FASE hasta el cuarto nulo (NULL)');
grid;
subplot(313);
plot(f,abs(W));
xlabel('f (Hz) -->');
ylabel('|W(f)|');
title('ESPECTRO DE MAGNITUD sobre rango completo de frecuencias de la FFT');
```

espectro (es decir, la CFT). Los parámetros M, tfin y T se escogen de tal manera que los resultados calculados de los espectros de magnitud y de fase concuerden con el espectro verdadero del pulso rectangular dado por las ecuaciones (2-59) y (2-60) del ejemplo 2-5. (T en el ejemplo 2-5 es equivalente a tfin en la tabla 2-3.)

El pulso rectangular no está absolutamente limitado por banda. Sin embargo, para un ancho de pulso de tfin = 1, el espectro de magnitud se vuelve relativamente pequeño a 5/tfin = 5 Hz = B. Por lo tanto, se requiere un muestreo de la forma de onda a una velocidad de 2 B = 10 Hz o mayor. Para una $T = 10$ y $\Delta t = 0.08$ o $f_s = 1/\Delta t = 12.8$ Hz. Por lo tanto, los valores de T y N se han escogido para satisfacer la velocidad de Nyquist de $f_s > 2\ B$. La resolución de frecuencia es de $\Delta f = 1/T = 0.1$ Hz. Por consecuencia, se obtiene una buena representación espectral utilizando la DFT.

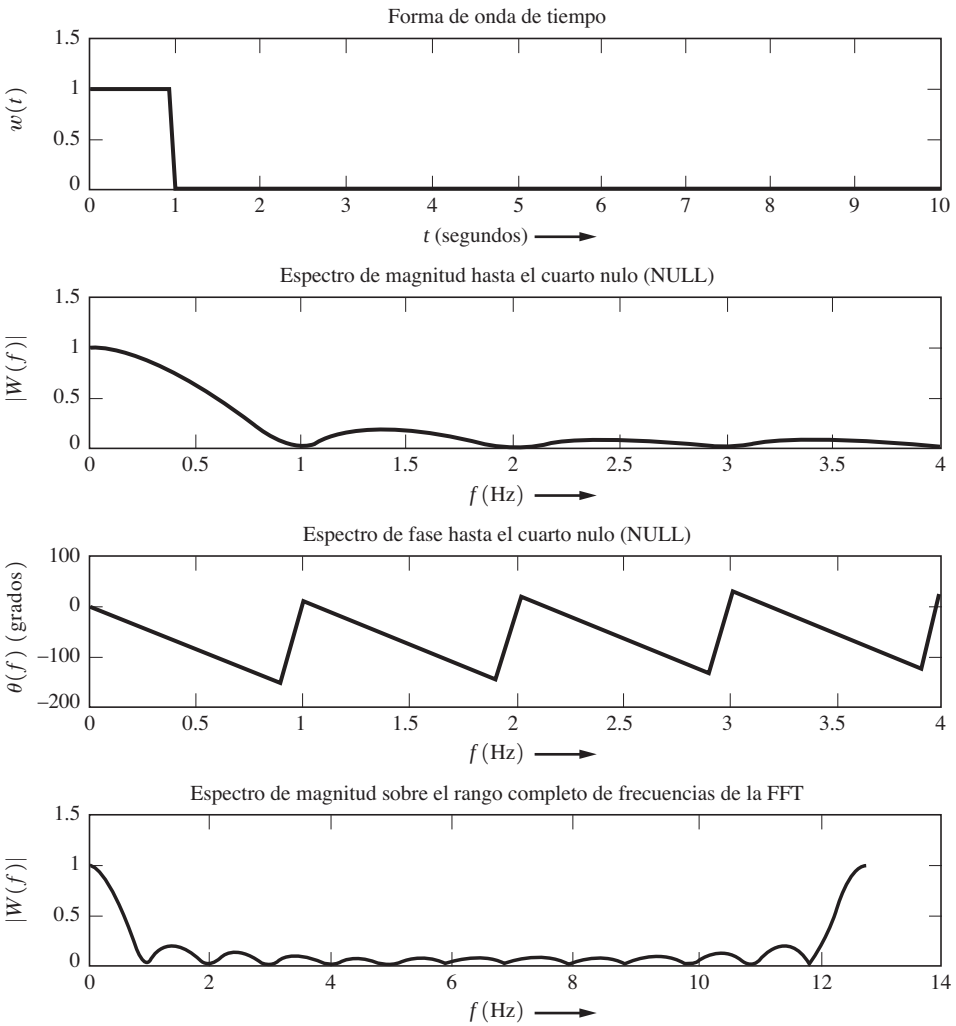


Figura 2–21 Espectro para un pulso rectangular, utilizando la DFT en MATLAB.

En la última gráfica de la figura 2-21 el espectro de magnitud se muestra sobre el rango completo del vector de la FFT, esto es, para $0 < f < f_s$, donde $f_s = 12.8$ Hz. Debido a que la ecuación (2-184b) no se utilizó en el programa para MATLAB, la gráfica para $0 < f < 6.8$ ($f_s/2 = 6.8$ Hz) corresponde al espectro de magnitud de la CFT sobre frecuencias positivas y la gráfica para $6.4 < f < 12.8$ corresponde a las frecuencias negativas de la CFT. Se sugiere que el lector pruebe otros valores de M, tfin y T para observar cómo los errores de fuga, aliasing y de efecto de cercas se hacen mayores si los parámetros no se escogen con cuidado. Note además que ocurren errores significativos si tfin = T. □Por qué?

Utilizando la DFT para calcular las series de Fourier

La DFT puede utilizarse también para evaluar los coeficientes para las series complejas de Fourier. A partir de la ecuación (2-89),

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T w(t) e^{-j2\pi n f_0 t} \, dt$$

Esta integral se aproxima empleando una serie finita, donde $t = k\,\Delta t$, $f_0 = 1/T$, $dt = \Delta t$, y $\Delta t = T/N$. Entonces

$$c_n \approx \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} w(k\,\Delta t) e^{-j(2\pi/N)nk}\,\Delta t \tag{2–185}$$

Empleando la ecuación (2-176) se encuentra que el coeficiente de la serie de Fourier está relacionado a la DFT mediante

$$c_n \approx \frac{1}{N} X(n) \tag{2–186}$$

La DFT regresa valores de $X(n)$ para $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Por consiguiente, la ecuación (2-186) debe modificarse para suministrar valores de c_n para una n negativa. Para una n positiva se utiliza

$$c_n = \frac{1}{N} X(n), \quad 0 \le n < \frac{N}{2} \tag{2–187a}$$

y para una n negativa se utiliza

$$c_n = \frac{1}{N} X(N+n), \quad -\frac{N}{2} < n < 0 \tag{2–187b}$$

Ejemplo 2–17 UTILICE LA DFT PARA CALCULAR EL ESPECTRO DE UNA SENOIDE

Estableciendo que

$$w(t) = 3\ \text{sen}(\omega_0 t + 20^\circ) \tag{2–188}$$

donde $\omega_0 = 2\pi f_0$ y $f_0 = 10$ Hz.

□a que $w(t)$ es periódica, la ecuación (2-109) se utiliza para obtener el espectro

$$W(f) = \sum c_n\, \delta(f - nf_0)$$

donde $\{c_n\}$ representa los coeficientes complejos de la serie de Fourier para $w(t)$. Aún más, debido a que $\text{sen}(x) = (e^{jx} - e^{-jx})/(2j)$,

$$3\ \text{sen}(\omega_0 t + 20^\circ) = \left(\frac{3}{2j}\ e^{j20}\right) e^{j\omega_0 t} + \left(\frac{-3}{2j}\ e^{-j20}\right) e^{-j\omega_0 t}$$

Por consecuencia, se sabe que los coeficientes de la FS son

$$c_1 = \left(\frac{3}{2j}\ e^{j20}\right) = 1.5\angle -70^\circ \tag{2–189a}$$

$$c_{-1} = \left(\frac{-3}{2j}\ e^{-j20}\right) = 1.5\angle +70^\circ \tag{2–189b}$$

y los otros valores de c_n son iguales a cero. Verifique si esta respuesta correcta conocida puede calcularse utilizando la DFT. Haciendo referencia a la tabla 2-4 y a la figura 2-22 se observa que MATLAB calcula la FFT y grafica el espectro. El resultado calculado concuerda con el resultado analítico conocido.

Note que las funciones δ no pueden graficarse ya que $\delta(0) = \infty$. En consecuencia, las ponderaciones de las funciones δ son las que se grafican para indicar los espectros de magnitud. Además, en las frecuencias donde $|W(f)| = 0$ puede utilizarse *cualquier* valor para $\theta(f)$, ya que $W(f) = |W(f)|\angle\theta(f) = 0$.

Estos resultados pueden también compararse con los del ejemplo 2-4, en donde se obtuvo el espectro para una senoide mediante la evaluación directa de la integral de la transformada de Fourier.

2–9 ANCHO DE BANDA DE SEÑALES

El ancho espectral de señales y ruido en los sistemas de comunicación es un concepto muy importante por dos principales razones. Primero, más y más usuarios están recibiendo asignaciones a bandas de RF en constante saturación, de tal manera que el ancho espectral requerido para cada uno necesita considerarse con cuidado. Segundo, el ancho espectral es importante desde el punto de vista del diseño de equipo, debido a que los circuitos necesitan contar con el suficiente ancho de banda para acomodar la señal pero rechazar al ruido. La pregunta es: ¿qué es el *ancho de banda*? Como se mostrará, existen numerosas definiciones del término.

Si se asegura que se utilizará la misma definición cuando se trabaja con varias señales y ruido, se pueden comparar sus anchos espectrales mediante la definición seleccionada del ancho de banda. Si se intercambian las definiciones, entonces se requerirán "factores de conversión" para comparar los anchos espectrales que fueron obtenidos utilizando diferentes definiciones. Desafortunadamente, los factores de conversión a menudo dependen del tipo se *forma* espectral involucrada [como por ejemplo, el tipo $(\text{sen } x)/x$ de espectro o un espectro rectangular].

En las definiciones para ingeniería, el ancho de banda se considera el ancho de una banda de frecuencias *positivas*. (Se describe el ancho de banda de señales reales o el ancho de banda de un filtro físico que cuenta con una respuesta de impulso real y, por consiguiente, los espectros de magnitud de estas formas de onda son pares alrededor del origen donde $f = 0$.) En otras palabras, el ancho de banda sería de $f_2 - f_1$, donde $f_2 > f_1 \geq 0$ y f_2 y f_1 están determinadas por la definición utilizada en particular. Para las formas de onda o redes de banda base, f_1 generalmente se considera como cero, ya que el espectro se extiende hacia abajo hasta DC $(f = 0)$. Para señales pasabanda, $f_1 > 0$ y la banda $f_1 < f < f_2$ incluye a la frecuencia de portadora f_c de la señal. Recuerde que conforme se aumenta la "velocidad de señalización" de la señal (es decir, T se decrementa) el espectro ensancha (véase figura 2-6). Por consecuencia, para las definiciones en ingeniería de ancho de banda se requiere que el ancho de banda varíe como $1/T$.

A continuación se presentarán seis definiciones en ingeniería y una definición legal de ancho de banda que se usan a menudo:

TABLA 2–4 LISTADO EN MATLAB PARA EL CÁLCULO DEL ESPECTRO DE UNA SENOIDE, UTILIZANDO LA DFT

```
% Archivo: TABLA2_4.M
% Utilizando la FFT, calcule el espectro para una senoide.
M = 4;
N = 2^M;
fo = 10;
wo = 2*pi*fo;
n = 0:1:N-1;
T = 1/fo;
dt = T/N;
t = n*dt;
% Creando la forma de onda de tiempo
w = 3*sin(wo*t + (pi/180*20));
% Calcule los puntos de la FFT
W = fft(w);
W = W(:);
% DEBIDO A QUE LA FORMA DE ONDA ES PERIÓDICA,
%      UTILICE SERIE COMPLEJA DE FOURIER PARA OBTENER EL ESPECTRO.
% ==> Calcule los coeficientes de la FS a partir de los datos de la FFT, utilizando ec.
(2–186)
% Después utilice la ec. (2-109) para obtener el espectro.
n1 = -N/2:1:N/2;
fn1 = n1/T;
fs = 1/dt;
% Generando coeficientes complejos de serie de Fourier
cn = 1/N * W;
% Generando fase
Theta = (180/pi)*angle(cn + 0.001);
% Convirtiendo muestras 0,1,2,3,...,N-1 a positivos y negativos
% Note que la ec. (2-187) es un comando de MATLAB: fftshift
cn = fftshift(cn)';
Theta = fftshift(Theta)';
cn = [cn cn(1)];
Theta = [Theta Theta(1)];
cn = cn(:);
Theta = Theta(:);
% Graficando resultados
plot_pr(4);
plot(t,w);
xlabel('t (sec) -->');
ylabel('w(t)');
title('Forma de onda de tiempo');
pause;
plot(n,abs(W),'o');
for (i = 1:1:length(n))
  line([n(i) n(i)], [0 abs(W(i))]);
end;
xlabel('n');
ylabel('|W(n)|');
title('Puntos de la FFT');
axis([0 16 0 25])
pause;
subplot(211)
```

TABLA 2–4 LISTADO EN MATLAB PARA EL CÁLCULO DEL ESPECTRO DE UNA SENOIDE, UTILIZANDO LA DFT *(cont.)*

```
plot(fn1,abs(cn),'o');
for (i = 1:1:length(n1))
  line([fn1(i) fn1(i)], [0 abs(cn(i))]);
end;
xlabel('f  (Hz) -->');
ylabel('|c(n)|');
title('ESPECTRO DE MAGNITUD, |W(f)|');
axis([-80 80 0 2])
subplot(212)
plot(fn1,zeros(length(fn1),1),'w',fn1,Theta,'o');
for (i = 1:1:length(n1))
  line([fn1(i) fn1(i)], [0 Theta(i)]);
end;
xlabel('f  (Hz) -->');
ylabel('theta(f) (degrees)');
title('ESPECTRO DE FASE, Theta(f)');
```

1. El *ancho de banda absoluto* es $f_2 - f_1$, donde el espectro es cero fuera del intervalo $f_1 < f < f_2$ a lo largo del eje positivo de frecuencia.
2. El *ancho de banda a 3 dB* (o ancho de banda de media potencia) es $f_2 - f_1$, donde para las frecuencias dentro de la banda $f_1 < f < f_2$ los espectros de magnitud, es decir, $|H(f)|$, no caen más abajo que $1/\sqrt{2}$ veces el máximo valor de $|H(f)|$, y el máximo valor ocurre a una frecuencia dentro de la banda.
3. El *ancho de banda equivalente* es el ancho de un espectro rectangular ficticio tal que la potencia en esa banda rectangular es igual a la potencia asociada con el espectro real sobre frecuencias positivas. A partir de la ecuación (2-142) se observa que la PSD es proporcional al cuadrado de la magnitud del espectro. Deje que f_0 sea la frecuencia a la cual el espectro de magnitud tiene un máximo. Entonces la potencia en la banda rectangular equivalente es proporcional a

$$\text{potencia equivalente} = B_{\text{eq}}|H(f_0)|^2 \tag{2–190}$$

donde B_{eq} es el ancho de banda equivalente que debe determinarse. La potencia real para las frecuencias positivas es proporcional a

$$\text{potencia real} = \int_0^\infty |H(f)|^2 \, df \tag{2–191}$$

Si se iguala la ecuación (2-190) a la ecuación (2-191), la fórmula para el *ancho de banda de ruido equivalente* es

$$B_{\text{eq}} = \frac{1}{|H(f_0)|^2} \int_0^\infty |H(f)|^2 \, df \tag{2–192}$$

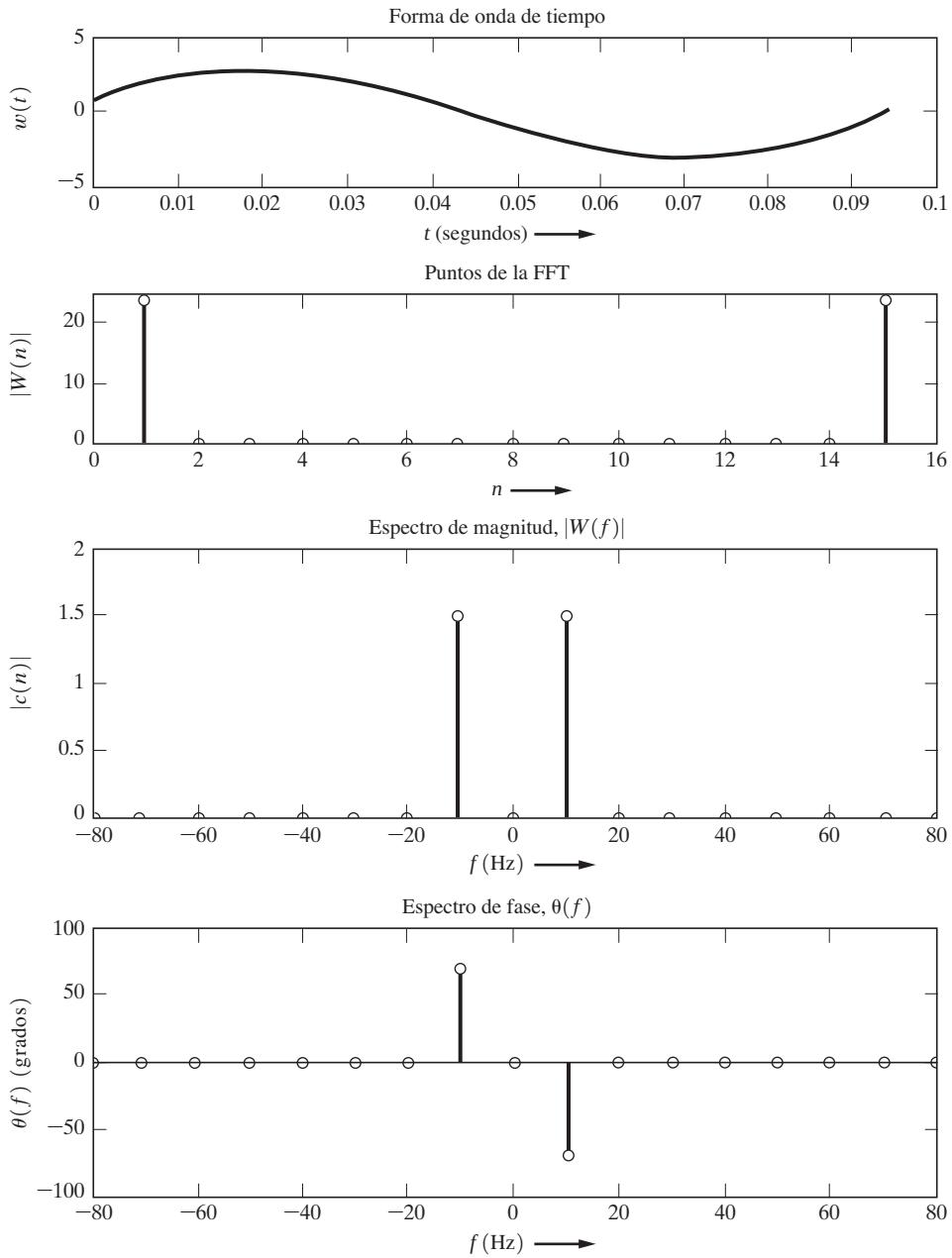


Figura 2–22 Espectro de una senoide obtenida mediante la DFT en MATLAB.

4. El *ancho de banda de nulo a nulo* (o ancho de banda de cruce con cero) es $f_2 - f_1$, donde f_2 es el primer valor nulo en la envolvente del espectro de magnitud arriba de f_0 y, para sistemas pasabanda, f_1 es el primer valor nulo en el envolvente debajo de f_0, donde f_0 es la frecuencia donde el espectro de magnitud es un máximo.[33] Para los sistemas de banda base f_1 es generalmente cero.

5. El *ancho de banda de espectro limitado* es $f_2 - f_1$ tal que para valores fuera de la banda $f_1 < f < f_2$, la PSD, que es proporcional a $|H(f)|^2$, debe estar por lo menos cierta cantidad, por ejemplo 50 dB, debajo del valor máximo para la densidad espectral de potencia.

6. El *ancho de banda de potencia* es $f_2 - f_1$, donde $f_1 < f < f_2$ define la banda de frecuencias en la cual reside 99□ de la potencia total. Esto es similar a la definición de la FCC de *ancho de banda ocupado*, la cual establece que la potencia por encima del límite superior de la banda f_2 es de $\frac{1}{2}$□ y la potencia por debajo del límite inferior de la banda es de $\frac{1}{2}$□, dejando 99□ de la potencia total dentro de la banda ocupada (*FCC Rules and Regulations*, sección 2.202, búsqueda por Internet: 47 CFR 2.202).

7. El *ancho de banda de la FCC* es un parámetro de ancho de banda autorizado y asignado por la FCC para especificar el espectro permitido en los sistemas de comunicación. Cuando el parámetro de ancho de banda de la FCC se sustituye dentro de la fórmula de la FCC, la mínima atenuación para el nivel de potencia permitido en una banda de 4 kHz se suministra en el límite de la banda con respecto a la potencia promedio total de la señal. La sección 21.106 (búsqueda por Internet: 47 CFR 21.106) en el documento *FCC Rules and Regulations* establece que: "Para frecuencias en operación debajo de 15 GHz, en cualquier banda de 4 kHz, de la cual se elimina la frecuencia central de la frecuencias asignada por más de 50 por ciento hasta e incluyendo 250 por ciento del ancho de banda autorizado, como se especifica mediante la siguiente ecuación, pero no menos de 50 dB en ningún caso":

$$A = 35 + 0.8(P - 50) + 10 \log_{10}(B) \tag{2–193}$$

(No se requiere una atenuación mayor a 80 dB.) En esta ecuación,

A = atenuación (en decibles) por debajo del nivel medio de potencia de salida,

P = porcentaje eliminado de la frecuencia de portadora,

y

B = ancho de banda autorizado en megahertz.

La definición de la FCC, como muchas otras reglas y regulaciones, es un tanto confusa pero se interpretará en el ejemplo 2-18. En realidad ésta define una máscara espectral. Esto es, que el espectro de la señal debe ser menor o igual a los valores dados por esa máscara espectral en todas las frecuencias. El parámetro de ancho de banda de la FCC, B, no es compatible con las otras definiciones mencionadas en el sentido de que no es proporcional a $1/T$, lo cual representa la "velocidad de señalización" de la señal correspondiente [Amoroso, 1980]. Por lo tanto, el parámetro de ancho de banda B de la FCC es una definición *legal* en lugar de una definición de ingeniería. El *ancho de banda RMS*, el cual es bastante útil en los problemas analíticos, se define en el capítulo 6.

[33] En los casos donde no existe un valor nulo definitivo en el espectro de magnitud, esta definición no se aplica.

Ejemplo 2–18 ANCHOS DE BANDA PARA UNA SEÑAL CON BPSK

Una señal con modulación por desplazamiento de fase binaria (BPSK) se utilizará para ilustrar cómo se evalúa el ancho de banda para las diferentes ecuaciones que se acaban de presentar.

La señal con BPSK está descrita por

$$s(t) = m(t) \cos \omega_c t \tag{2–194}$$

donde $\omega_c = 2\pi f_c$, f_c es la frecuencia de portadora (hertz) y $m(t)$ es una forma de onda modulante serial binaria (valores de ± 1) originada de una fuente digital de información como una computadora digital y como se ilustra en la figura 2-23a. Se evaluará el espectro de $s(t)$ para el peor de los casos, el ancho de banda más ancho.

El espectro en el peor de los casos (ancho de banda más ancho) ocurrirá cuando la forma de onda digital modulante presenta transiciones que ocurren muy a menudo. En este caso $m(t)$ sería una onda cuadrada, como lo muestra la figura 2-23a. En este caso el valor binario 1 está representado mediante +1 V y el valor binario 0 es de −1 V, mientras que la velocidad de señalización es de $R = 1/T_b$ bits/s. El espectro de potencia de la modulación de onda cuadrada puede evaluarse a través del análisis de una serie de Fourier. Las ecuaciones (2-126) y (2-120) resultan en

$$\mathcal{P}_m(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \, \delta(f - nf_0) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n\pi/2}\right]^2 \delta\left(f - n\frac{R}{2}\right) \tag{2–195}$$

donde $f_0 = 1/(2T_b) = R/2$. La PSD de $s(t)$ puede expresarse en términos de la PSD de $m(t)$ si se evalúa la autocorrelación de $s(t)$, es decir,

$$\begin{aligned} R_s(\tau) &= \langle s(t)s(t+\tau)\rangle \\ &= \langle m(t)m(t+\tau) \cos \omega_c t \cos \omega_c(t+\tau)\rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\langle m(t)m(t+\tau)\rangle \cos \omega_c \tau + \tfrac{1}{2}\langle m(t)m(t+\tau) \cos (2\omega_c t + \omega_c \tau)\rangle \end{aligned}$$

o

$$R_s(\tau) = \tfrac{1}{2}R_m(\tau) \cos \omega_c \tau + \tfrac{1}{2} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} m(t)m(t+\tau) \cos (2\omega_c t + \omega_c \tau)\, dt \tag{2–196}$$

La integral es despreciable debido a que $m(t)m(t+\tau)$ es constante sobre intervalos de tiempo pequeños, pero el $\cos (2\omega_c t + \omega_c \tau)$ tiene muchos ciclos de oscilación, ya que $f_c \gg R$.[34] Cualquier área pequeña que se acumula por la integral se vuelve despreciable cuando se divide entre T, $T \to \infty$. Por tanto,

$$R_s(\tau) = \tfrac{1}{2}R_m(\tau) \cos \omega_c \tau \tag{2–197}$$

La PSD se obtiene al tomar la transformada de Fourier de ambos lados de la ecuación (2-197). Utilizando el teorema de la transformada de la frecuencia de señal real (tabla 2-1) se tiene que

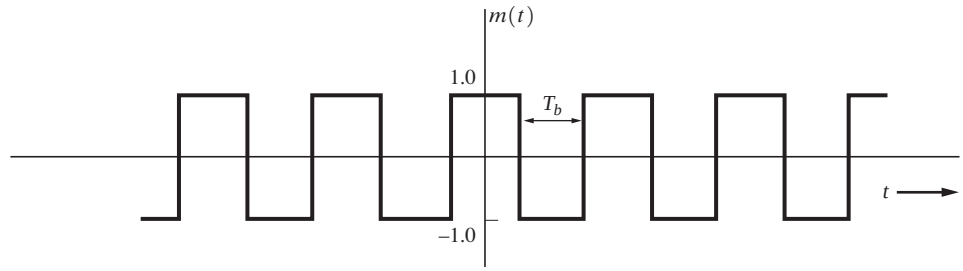
$$\mathcal{P}_s(f) = \tfrac{1}{4}[\mathcal{P}_m(f - f_c) + \mathcal{P}_m(f + f_c)] \tag{2–198}$$

Sustituyendo la ecuación (2-195) dentro de la ecuación (2-198) se obtiene la PSD de la señal con BPSK:

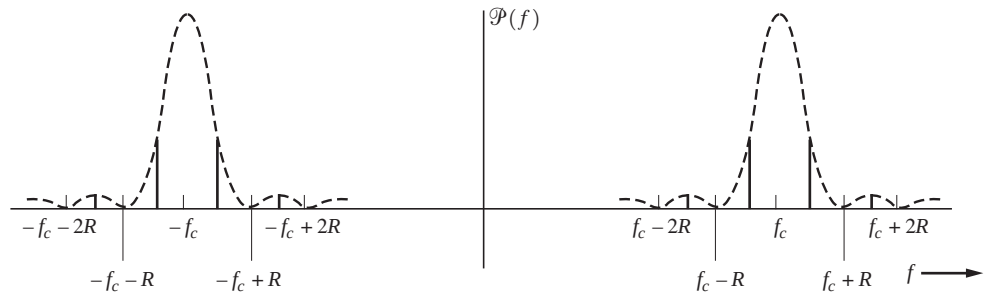
$$\begin{aligned} \mathcal{P}_s(f) = \tfrac{1}{4} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} &\left[\frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n\pi/2}\right]^2 \\ &\times \{\delta[f - f_c - n(R/2)] + \delta[f + f_c - n(R/2)]\} \end{aligned} \tag{2–199}$$

Este espectro se muestra en la figura 2-23b.

[34] Esto es una consecuencia del lema de Riemann-Lebesque en el cálculo integral [Olmsted, 1961].



(a) Forma de onda digital modulante



(b) Espectro con BPSK resultante

Figura 2–23 Espectro de una señal con BPSK.

La forma espectral que resulta de la utilización de la modulación determinística del peor de los casos es esencialmente la misma que la que se obtiene cuando se utilizan datos aleatorios; sin embargo, para el caso aleatorio, el espectro es continuo. El resultado para el caso con datos aleatorios, como se trabaja en el capítulo 3 donde $\mathcal{P}_m(f)$ está dada por la ecuación (3-41), es

$$\mathcal{P}(f) = \tfrac{1}{4} T_b \left[\frac{\text{sen } \pi T_b(f - f_c)}{\pi T_b(f - f_c)}\right]^2 + \tfrac{1}{4} T_b \left[\frac{\text{sen } \pi T_b(f + f_c)}{\pi T_b(f + f_c)}\right]^2 \tag{2–200}$$

donde la velocidad de datos es de $R = 1/T_b$ bits/sec. Esto se muestra mediante la curva rayada en la figura 2-23b.

La derivación anterior demuestra que a menudo se pueden emplear señales de prueba de onda cuadrada (determinísticas) como ayuda en el análisis de un sistema de comunicación digital, en lugar de utilizar un modelo de datos aleatorios más complicado.

El ancho de banda para la señal con BPSK se evaluará a continuación para cada una de las definiciones para ancho de banda presentadas anteriormente. Para lograr esto, se requiere de la forma de la PSD para las frecuencias positivas. Basándose en la ecuación (2-200), ésta es

$$\mathcal{P}(f) = \left[\frac{\text{sen } \pi T_b(f - f_c)}{\pi T_b(f - f_c)}\right]^2 \tag{2–201}$$

Sustituyendo la ecuación (2-201) dentro de las definiciones se obtienen los anchos de banda con BPSK resultantes, como se muestran en la tabla 2-5, excepto para el ancho de banda de la FCC.

TABLA 2–5 ANCHOS DE BANDA PARA SEÑALIZACIÓN CON BPSK DONDE LA VELOCIDAD DE BIT ES DE $R = 1/T_B$ BITS/S.

Definición empleada	Ancho de banda	Ancho de banda (kHz2 para R = 9,600 bits/s
1. Ancho de banda absoluto	∞	∞
2. Ancho de banda a 3 dB	$0.88R$	8.45
3. Ancho de banda equivalente de ruido	$1.00R$	9.60
4. Ancho de banda de nulo a nulo	$2.00R$	19.20
5. Ancho de banda de espectro limitado (50 dB)	$201.04R$	1,930.0
6. Ancho de banda de potencia	$20.56R$	197.4

La relación entre el espectro y el parámetro de ancho de banda de la FCC es un poco más complicada de evaluar. Para llevar esto a cabo se requiere calcular la atenuación en decibeles

$$A(f) = -10 \log_{10} \left[\frac{P_{4\text{kHz}}(f)}{P_{\text{total}}} \right] \tag{2–202}$$

donde $P_{4\text{kHz}}(f)$ es la potencia en una banda de 4 kHz centrada en la frecuencia f y P_{total} la potencia de señal total. La potencia en una banda de 4 kHz, asumiendo que la PSD es aproximadamente constante a lo largo del ancho de banda de 4 kHz, es

$$P_{4\text{kHz}}(f) = 4000\ \mathcal{P}(f) \tag{2–203}$$

y, empleando la definición del ancho de banda equivalente, se encuentra que la potencia total es

$$P_{\text{total}} = B_{\text{eq}} \mathcal{P}(f_c) \tag{2–204}$$

donde el espectro tiene un valor máximo cuando $f = f_c$. Mediante el uso de estas dos ecuaciones, la ecuación (2-202) se convierte en

$$A(f) = -10 \log_{10} \left[\frac{4000\ \mathcal{P}(f)}{B_{\text{eq}} \mathcal{P}(f_c)} \right] \tag{2–205}$$

donde $A(f)$ es la atenuación en decibeles de potencia medida en una banda de 4 kHz a una frecuencia f comparada con el nivel de potencia promedio total de la señal. Para el caso de señalización con BPSK, si se utiliza la ecuación (2-201) se encontrará que la atenuación en decibeles es

$$A(f) = -10 \log_{10} \left\{ \frac{4000}{R} \left[\frac{\text{sen}\ \pi T_b (f - f_c)}{\pi T_b (f - f_c)} \right]^2 \right\} \tag{2–206}$$

donde $R = 1/T_b$ es la velocidad de datos. Si se intenta encontrar el valor de R tal que $A(f)$ cae debajo de la envolvente espectral especificado por la FCC mostrado en la figura 2-24 ($B = 30$ MHz), se encontrará que la R es tan pequeña que habrán numerosos ceros en la función $(\text{sen}\ x)/x$ de la ecuación (2-206) dentro del rango deseado de frecuencias, $-50\ \text{MHz} < (f - f_c) < 50\ \text{MHz}$. Esto es difícil de graficar, así que al reemplazar sen $\pi T(f - f_c)$ con su valor máximo (unitario) se graficará el envolvente de $A(f)$ en su lugar. La curva de envolvente con BPSK resultante para la atenuación en decibeles se muestra en la figura 2-24, donde $R = 0.0171$ Mbits/s.

Resulta obvio que la velocidad de datos permitida para que una señal con BPSK cumpla con la especificación de la FCC de $B = 30$ MHz es ridículamente baja, ya que el parámetro de ancho de banda de la FCC especifica un espectro absolutamente limitado por banda. Para llevar a cabo una señalización con una velocidad de datos razonable, la forma del pulso utilizando en la señal transmitida debe modificarse de su forma rectangular original, la cual genera la señal con BPSK, a un pulso redondo de tal manera que el ancho de banda de la señal transmitida estará casi absolutamente limitado por banda. Recordando el estudio del teorema de muestreo se observa que formas de pulso de $(\text{sen } x)/x$ son candidatos primordiales, ya que poseen un espectro absolutamente limitado por banda. Sin embargo, los pulsos de $(\text{sen } x)/x$ no son absolutamente limitados por tiempo, así que no puede utilizarse esta forma de pulso exacta. Frank Amoroso y otros han estudiado el problema y se ha propuesto una versión casi limitada por banda de la forma de pulso de $(\text{sen } x)/x$ [Amoroso, 1980]. La curva de atenuación en decibeles para este tipo de señalización, mostrado en la figura 2-24, se adhiere adecuadamente a la curva de envolvente espectral permitida por la FCC para el caso donde $R = 25$ Mbits/s. Esta velocidad permitida de datos de 25 Mbits/s es una fantástica mejora sobre el valor de $R = 0.0171$ Mbits/s permitida para la BPSK. Resulta de interés notar que las formas de pulso analógicas [del tipo $(\text{sen } x)/x$] son necesarias en lugar de la forma de pulso (rectangular) digital, lo cual es otra manera de establecer que *es vital para los ingenieros en comunicaciones digitales ser capaces de analizar y diseñar sistemas analógicos, así como sistemas digitales.*

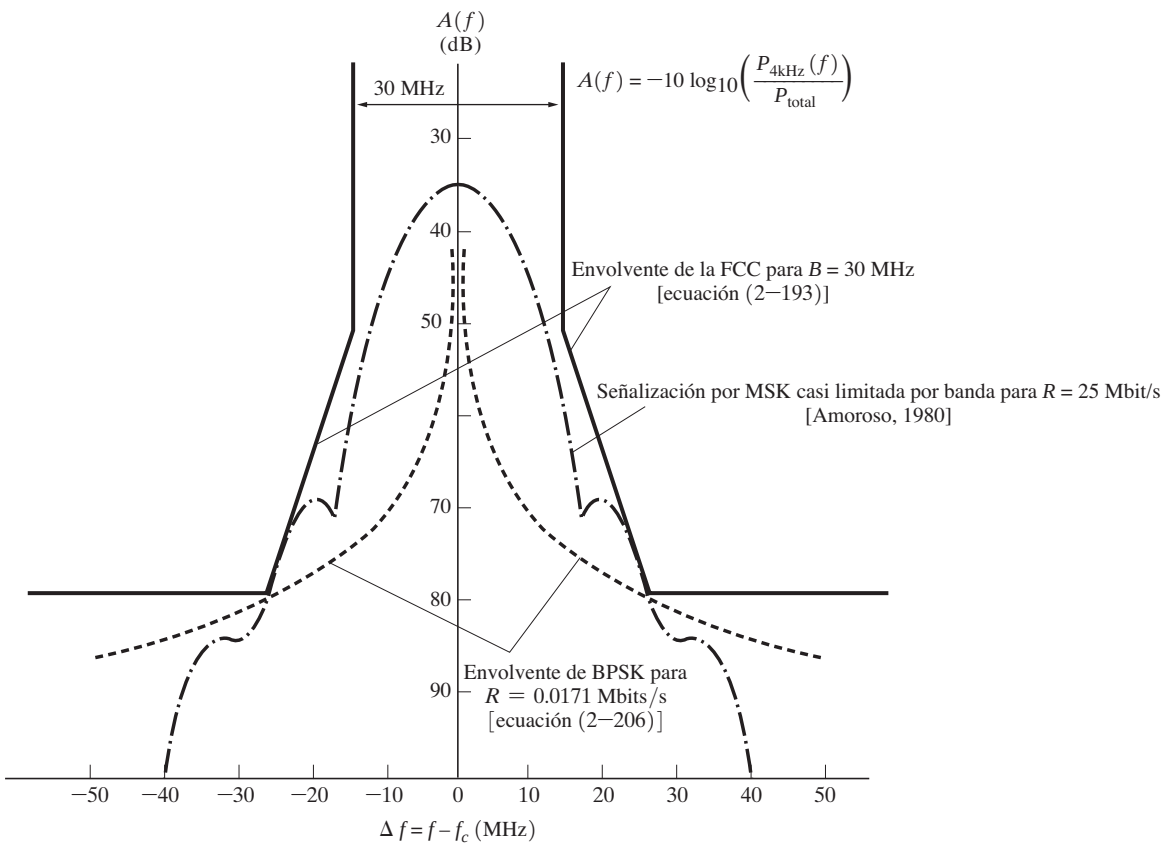


Figura 2–24 Envolvente permitido por la FCC para $B = 30$ MHz.

2–10 RESUMEN

- Tanto las señales como el ruido pueden ser determinísticas (su forma de onda es desconocida), donde la señal es la parte deseada y el ruido la parte indeseada□o pueden ser estocásticas (su forma de onda es desconocida pero sus estadísticas acerca de la forma de onda son conocidas). Las propiedades de las señales y el ruido son sus espectros, valor de DC, valor RMS y potencia asociada.
- Las transformadas y espectros de Fourier se estudiaron a detalle. La FT se emplea para obtener el espectro de una forma de onda. El espectro proporciona las frecuencias de los componentes senoidales de la forma de onda. Se definieron y examinaron la PSD y la función de autocorrelación.
- Las señales y el ruido pueden representarse mediante expansiones de series ortogonales. La serie de Fourier y la serie de funciones de muestreo se consideraron de especial utilidad.
- Se repasaron los sistemas lineales y se encontró la condición para una transmisión sin distorsión.
- Se desarrollaron las propiedades de las señales y ruido limitados por banda. Esto resultó en el teorema de muestreo y el teorema de dimensionalidad. La DFT se estudió mediante ejemplos en MATLAB.
- Se discutió el concepto de ancho de banda y se presentaron siete definiciones populares.
- El ancho de banda nulo de un pulso rectangular con un ancho de T es $1/T$. Este es el concepto básico empleado en los sistemas digitales de comunicación.

2–11 EJEMPLOS DE ESTUDIO

SA2–1 Valores de DC y RMS para señales exponenciales Suponga que $v(t)$ es una forma de onda periódica de voltaje, como se muestra en la figura 2-25. Sobre el intervalo de tiempo $0 < t < 1$, $v(t)$ está descrita por e^t. Encuentre el valor de DC y el RMS para esta forma de onda de voltaje.

Solución. Para las formas de onda periódicas, el valor de DC es

$$V_{\text{dc}} = \langle v(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} v(t)\, dt = \int_0^1 e^t dt = e^1 - e^0$$

o

$$V_{\text{dc}} = e - 1 = 1.72 \text{ V}$$

De la misma manera,

$$V_{\text{rms}}^2 = \langle v^2(t) \rangle = \int_0^1 (e^t)^2\, dt = \frac{1}{2}(e^2 - e^0) = 3.19$$

□ por lo tanto,

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{3.19} = 1.79 \text{ V}$$

SA2–2 Potencia y valor dBm para señales exponenciales La forma de onda periódica de voltaje mostrada en la figura 2-25 aparece a través de una carga resistiva de 600 Ω. Calcule la potencia promedio disipada en la carga y su valor dBm correspondiente.

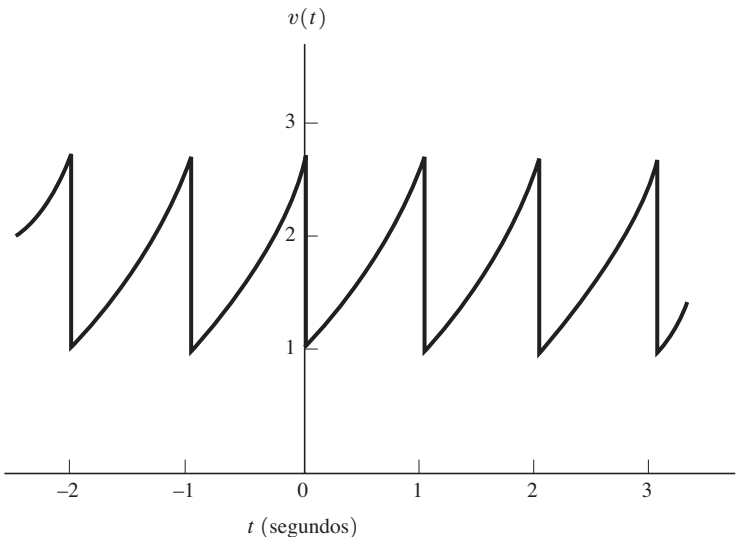


Figura 2–25

Solución.

$$P = V_{\text{rms}}^2/R = (1.79)^2/600 = 5.32 \text{ mW}$$

y

$$10 \log\left(\frac{P}{10^{-3}}\right) = 10 \log\left(\frac{5.32 \times 10^{-3}}{10^{-3}}\right) = 7.26 \text{ dBm}$$

Nota: La potencia instantánea pico es

$$\text{máx}[p(t)] = \text{máx}[v(t)\ i(t)] = \text{máx}[v^2(t)/R]$$
$$= \frac{(e)^2}{600} = 12.32 \text{ mW}$$

SA2–3 Evaluación de espectros mediante superposición Encuentre el espectro para la forma de onda

$$w(t) = \Pi\left(\frac{t-5}{10}\right) + 8 \text{ sen}(6\pi t)$$

Solución. El espectro de $w(t)$ es la superposición del espectro del pulso rectangular con el espectro de la senoide. Utilizando las tablas 2-1 y 2-2 se tiene que

$$\mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{t-5}{10}\right)\right] = 10\,\frac{\text{sen}(10\pi f)}{10\pi f}\,e^{-j2\pi f5}$$

y utilizando el resultado del ejemplo 2-4 se obtiene

$$\mathcal{F}[8 \text{ sen}(6\pi t)] = j\frac{8}{2}\,[\delta(f+3) - \delta(f-3)]$$

Por lo tanto,

$$W(f) = 10\,\frac{\text{sen}(10\pi f)}{10\pi f}\,e^{-j10\pi f} + j4[\delta(f+3) - \delta(f-3)]$$

SA2–4 Evaluación de espectros mediante integración Encuentre el espectro para $w(t) = 5 - 5e^{-2t}u(t)$.

Solución.

$$W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 5e^{-j2\pi ft}\,dt - 5\int_{0}^{\infty} e^{-2t}e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= 5\delta(f) - 5\,\frac{e^{-2(1+j\pi f)t}}{-2(1+j\pi f)}\Bigg|_{0}^{\infty}$$

o

$$W(f) = 5\delta(f) - \frac{5}{2 + j2\pi f}$$

SA2–5 Evaluación de la FT mediante superposición Suponga que $w(t)$ es la forma de onda mostrada en la figura 2-26. Encuentre la transformada de Fourier de $w(t)$.

Solución. Con referencia a la figura 2-26, $w(t)$ puede expresarse como la superposición (es decir, suma) de dos pulsos rectangulares:

$$w(t) = \Pi\left(\frac{t-2}{4}\right) + 2\Pi\left(\frac{t-2}{2}\right)$$

Empleando las tablas 2-2 y 2-1 se encuentra que la FT es

$$W(f) = 4Sa(\pi f4)e^{-j\omega 2} + 2(2)Sa(\pi f2)e^{-j\omega 2}$$

o

$$W(f) = 4[Sa(4\pi f) + Sa(2\pi f)]e^{-j4\pi f}$$

SA2–6 Funciones ortogonales Muestre que $\varphi_1(t) = \Pi(t)$ y $\varphi_2(t) = \text{sen } 2\pi t$ son funciones ortogonales sobre el intervalo de $-0.5 < t < 0.5$.

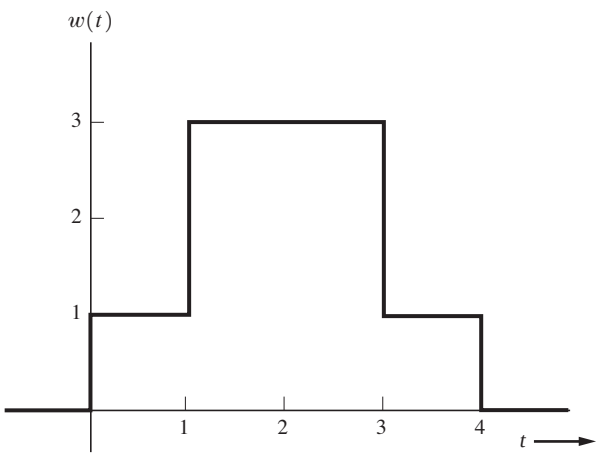


Figura 2–26

Solución.

$$\int_a^b \varphi_1(t)\ \varphi_2(t)\ dt = \int_{-0.5}^{0.5} 1 \text{ sen } 2\pi t dt = -\frac{\cos 2\pi t}{2\pi}\Bigg|_{-0.5}^{0.5}$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\left[\cos\ \pi - \cos(-\pi)\right] = 0$$

La ecuación (2-77) se satisface debido a que la integral es cero. En consecuencia, $\Pi(t)$ y sen $2\pi t$ son ortogonales sobre $-0.5 < t < 0.5$. [*Nota:* $\Pi(t)$] y sen $2\pi t$ no son ortogonales sobre el intervalo de $0 < t < 1$ ya que $\Pi(t)$ es cero para $t > 0.5$. Esto es, la integral es $1/\pi$, la cual es diferente de cero.]

SA2–7 Utilice la FT para evaluar la PSD Encuentre la serie de Fourier y la PSD para la forma de onda mostrada en la figura 2-25. Sobre el intervalo de $0 < t < 1$, $v(t)$ está descrita por e^t.

Solución. Utilizando las ecuaciones (2-88) y (2-89), donde $T_0 = 1$ y $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi$, se obtiene que

$$c_n = \int_0^1 e^t e^{-jn2\pi t}\, dt = \frac{e^{(1-j2\pi n)t}}{1\ -\ j2\pi n}\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{e\ -\ 1}{1\ -\ j2\pi n} = 1.72\ \frac{1}{1\ -\ j6.28n}$$

□ por lo tanto,

$$v(t) = 1.72 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1\ -\ j6.28n}\, e^{j2\pi nt}$$

Debido a que $v(t)$ es periódica, la PSD consiste de funciones deltas como está dado por la ecuación (2-126), donde $f_0 = 1/T_0 = 1$. Es decir,

$$\mathcal{P}(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2\ \delta(f - nf_0)$$

o

$$\mathcal{P}(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2.95}{1\ +\ (39.48)n^2}\, \delta(f - n)$$

SA2–8 Propiedad de la FS Deje que $w(t)$ sea una función periódica con un periodo de T_0 y que $w(t)$ sea *rotacionalmente simétrica*. Esto es, que $w(t) = -w(t \pm T_0/2)$. Demuestre que $c_n = 0$ para las harmónicas pares.

Solución. Utilizando la ecuación (2-89) y $w(t) = -w(t - T_0/2)$ se obtiene que

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} w(t)\ e^{-jn\omega_0 t}\, dt - \frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T} w(t - T_0/2)\ e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

A continuación se realiza un cambio de variables. Asumiendo que $t_1 = t$ en la primera integral y que $t_1 = t - T_0/2$ en la segunda. Entonces

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} w(t_1)\ e^{-jn\omega_0 t}\, dt_1 - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} w(t_1) e^{-jn\omega_0 (t_1 + T_0/2)}\, dt_1$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} w(t_1) e^{jn\omega_0 t_1} \left(1 - e^{-jn\pi}\right) dt_1$$

Pero $(1 - e^{jn\pi}) = 0$ para $n = ...-2, 0, 2, ...$ Por lo tanto, $c_n = 0$ si n es par y $w(t) = w(t - T_0/2)$. De la misma manera puede mostrarse que $c_n = 0$ si n es par y $w(t) = -w(t + T_0/2)$.

SA2–9 Evaluación de la FT inversa por medio de la FFT inversa La ecuación (2-184) describe cómo los elementos del vector de la transformada rápida de Fourier (FFT) pueden utilizarse para aproximar la transformada continua de Fourier (CFT):

a. De una manera similar, derive una fórmula que muestre cómo los elementos del vector de la *transformada inversa discreta de Fourier* (IDFT) puede utilizarse para aproximar la *transformada inversa continua de Fourier* (ICFT).

b. Dada la función de transferencia de un filtro pasabajas de *RC*

$$H(f) = \frac{1}{1 + j(f/f_0)}$$

donde $f_0 = 1$ Hz, utilice la inversa de la transformada rápida de Fourier (IFFT) de MATLAB para calcular la respuesta de impulso $h(t)$.

Solución. (a) De la ecuación (2-30), la ICFT es

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(f) e^{j2\pi ft}\, df$$

Si se refiere a la discusión que lleva hasta la ecuación (2-184), la ICFT se aproxima a través de

$$w(k\Delta t) \approx \Sigma W(n\Delta f) e^{j2\pi n\Delta f k\Delta t}\, \Delta f$$

Pero $\Delta t = T/N$, $\Delta f = 1/T$, y $f_s = 1/\Delta t$, así que

$$w(k\Delta t) \approx N\left[\frac{1}{N}\Sigma W(n\Delta f) e^{j(2\pi/N)nk}\right]\Delta f$$

Empleando la definición de la IDFT dada por la ecuación (2-177) se encuentra que la ICFT está relacionada a la IDFT a través de

$$w(k\Delta t) \approx f_s x(k) \tag{2–207}$$

donde $x(k)$ es el k-ésimo elemento del vector de la IDFT de N elementos. Como se indica en la discusión que lleva a la ecuación (2-184), los elementos del vector **X** se escogen de tal manera que los primeros $N/2$ elementos son muestras de los componentes de frecuencias positivas de $W(f)$, donde $f = n\Delta f$ y los siguientes $N/2$ elementos son muestras de los componentes de frecuencias negativas.

(b) Ejecute el archivo *SA 2_9.M* para obtener una gráfica de $h(t)$ como se calcula al utilizar la IFFT y la ecuación (2-207). Compare esta $h(t)$ calculada a través de la IFFT con la $h(t)$ analítica que se muestra en la figura 2-15b, donde $\tau_0 = RC = 1/(2\pi f_0)$.

PROBLEMAS

★ **2–1** Para una forma de onda senoidal con un valor pico de A y una frecuencia de f_0, utilice el operador de promedio de tiempo para mostrar que el valor RMS para esta forma de onda es de $A/\sqrt{2}$.

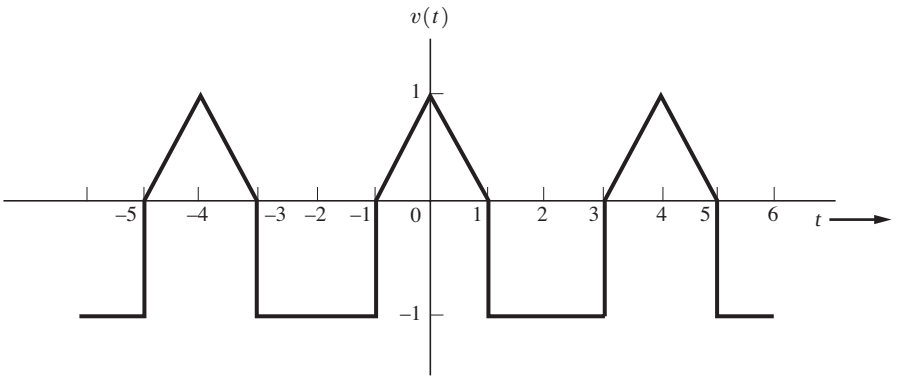


Figura P2–2

2–2 Un generador de funciones produce la forma de onda periódica de voltaje mostrada en la figura P2-2.
(a) Encuentre el valor para el voltaje de DC.
(b) Encuentre el valor para el voltaje RMS.
(c) Si esta forma de onda de voltaje se aplica a través de una carga de 1,000 Ω, ¿cuál es la potencia disipada en la carga?

2–3 El voltaje a través de una carga está dado por $v(t) = A_0 \cos \omega_0 t$, y la corriente que fluye por la carga es una onda cuadrada,

$$i(t) = I_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\Pi\left(\frac{t - nT_0}{T_0/2} \right) - \Pi\left(\frac{t - nT_0 - (T_0/2)}{T_0/2} \right) \right]$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T_0$, $T_0 = 1$ sec, $A_0 = 10$ V e $I_0 = 5$ mA.
(a) Encuentre la expresión para la potencia instantánea y haga un diagrama de este resultado como una función de tiempo.
(b) Encuentre el valor de la potencia promedio.

★ **2–4** El voltaje a través de una carga resistiva de 50 Ω es la porción positiva de una onda cosenoidal. Esto es,

$$v(t) = \begin{cases} 10 \cos \omega_0 t, & |t - nT_0| < T_0/4 \\ 0, & t \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde n es cualquier entero.
(a) Haga un diagrama de las formas de onda de voltaje y de corriente.
(b) Evalúe los valores de DC para el voltaje y la corriente.
(c) Encuentre los valores RMS para el voltaje y la corriente.
(d) Encuentre la potencia promedio total disipada en la carga.

2–5 Para el problema 2-4, encuentre la energía disipada en la carga durante un intervalo de 1 h si $T_0 = 1$ segundo.

2–6 Determine si cada una de las siguientes señales es de energía o de potencia, y evalúe su energía o potencia normalizadas, según sea el caso:
(a) $w(t) = \Pi(t/T_0)$.

(b) $w(t) = \Pi(t/T_0) \cos \omega_0 t$.
(c) $w(t) = \cos^2 \omega_0 t$.

2–7 Un medidor que lee la potencia promedio está conectado al circuito de salida de un transmisor. La salida del transmisor se alimenta a una carga resistiva de 75 Ω, y el wattímetro lee 67 W.
(a) ¿Cuál es la potencia en unidades dBm?
(b) ¿Cuál es la potencia en unidades dBk?
(c) ¿Cuál es el valor en unidades dBmV?

2–8 Suponga que una forma de onda con un valor RMS conocido de V_{rms} se aplica a través de una carga de 50 Ω. Derive una fórmula que pueda utilizarse para calcular el valor dBm a partir de V_{rms}.

★ **2–9** Un amplificador está conectado a una carga de 50 Ω y está controlado por una fuente de corriente senoidal, como se muestra en la figura P2-9. La resistencia de salida del amplificador es de 10 Ω y la resistencia de entrada es de 2 kΩ. Evalúe la ganancia verdadera en decibeles para este circuito.

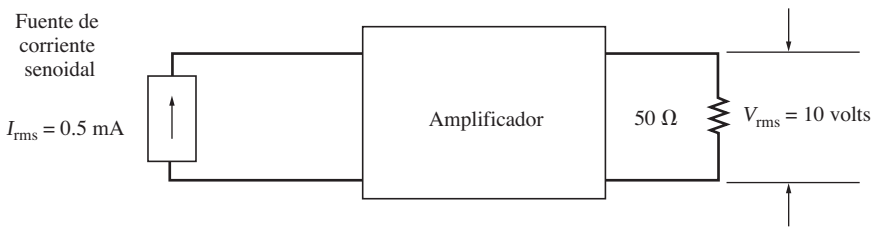


Figura P2–9

★ **2–10** El voltaje (RMS) a través de las terminales de entrada de 300 Ω de una antena en un receptor de FM es de 3.5 μV.
(a) Encuentre la potencia de entrada (en watts).
(b) Evalúe la potencia de entrada como se mide en decibeles por debajo de 1 mW (dBm).
(c) ¿Cuál sería el voltaje de entrada (en microvolts) para la misma potencia de entrada si la resistencia de entrada fuera de 75 Ω en lugar de 300?

2–11 ¿Cuál es el valor para el fasor que corresponde a la forma de onda de voltaje $v(t) = 12 \text{ sen } (\omega_0 t - 25°)$, donde $\omega_0 = 2000\pi$?

2–12 Una señal es $w(t) = 3 \text{ sen } (100\pi t - 30°) + 4 \cos(100\pi t)$. Encuentre el fasor correspondiente.

★ **2–13** Evalúe la transformada de Fourier de

$$w(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 1 \\ 0, & t < 1 \end{cases}$$

2–14 Encuentre el espectro para la forma de onda $w(t) = e^{-\pi(t/T)^2}$ en términos del parámetro T. ¿Qué puede decir acerca del ancho de $w(t)$ y de $W(f)$ conforme aumenta T?

2–15 Utilizando la propiedad de convolución, encuentre el espectro para

$$w(t) = \text{sen } 2\pi f_1 t \cos 2\pi f_2 t$$

★ **2–16** Encuentre el espectro (transformada de Fourier) de la forma de onda triangular

$$s(t) = \begin{cases} At, & 0 < t < T_0 \\ 0, & t \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

en términos de A y de T_0.

2–17 Encuentre el espectro para la forma de onda mostrada en la figura P2-17.

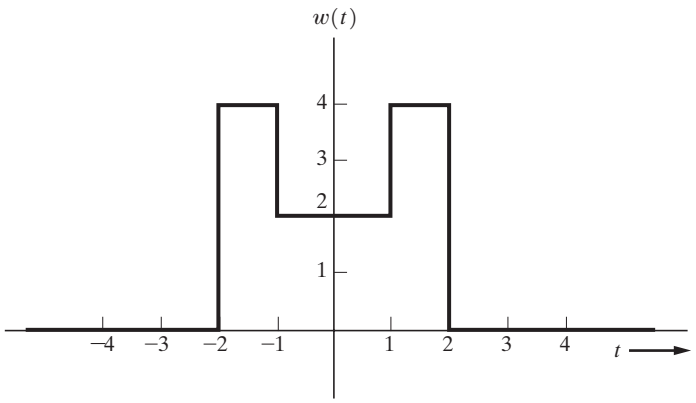


Figura P2–17

2–18 Si $w(t)$ tiene la transformada de Fourier

$$W(f) = \frac{j2\pi f}{1 + j2\pi f}$$

encuentre $X(f)$ para las siguientes formas de onda:

(a) $x(t) = w(2t + 2)$.

(b) $x(t) = e^{-jt}w(t - 1)$.

(c) $x(t) = 2\,\dfrac{dw(t)}{dt}$.

(d) $x(t) = w(1 - t)$.

2–19 A partir de la ecuación (2-30), encuentre $w(t)$ y $W(f) = A\Pi(f/2B)$ y verifique sus respuestas empleando la propiedad de dualidad.

2–20 Encuentre las funciones espectrales en cuadratura $X(f)$ y $Y(f)$ para la forma de onda senoidal amortiguada

$$w(t) = u(t)e^{-at}\ \text{sen}\ \omega_0 t$$

donde $u(t)$ es una función escalón unitario, $a > 0$ y $W(f) = X(f) + jY(t)$.

2–21 Derive el espectro de $w(t) = e^{-|t|/T}$.

★ **2–22** Encuentre las transformadas de Fourier para las siguientes formas de onda. Grafique las formas de onda y sus espectros de magnitud. [*Sugerencia:* utilice la ecuación (2-184).]

(a) $\Pi\left(\dfrac{t - 3}{4}\right)$.

(b) 2.

(c) $\Lambda\left(\dfrac{t - 5}{5}\right)$.

2–23 Utilizando la ecuación (2-184), encuentre la transformada de Fourier aproximada para la siguiente forma de onda:

$$x(t) = \begin{cases} \text{sen}(2\pi t/512) + \text{sen}(70\pi t/512), & 5 < t < 75 \\ 0, & t \text{ en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

2–24 Evalúe el espectro para el pulso trapezoidal mostrado en la figura P2-24.

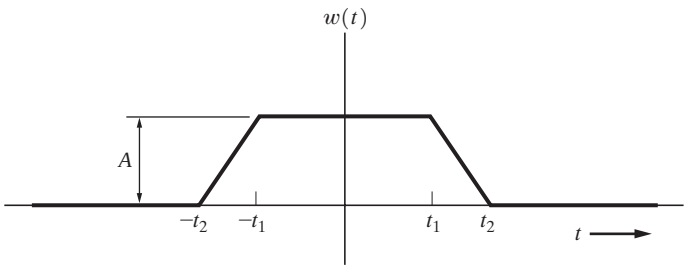


Figura P2–24

2–25 Muestre que

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[w(t)]\} = w(t)$$

[*Sugerencia:* utilice la ecuación (2-33).]

2–26 Empleando la definición de la transformada inversa de Fourier, muestre que el valor de $w(t)$ en $t = 0$ es igual al área bajo $W(f)$. Es decir, muestre que

$$w(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W(f)\, df$$

2–27 Demuestre que
(a) Si $w(t)$ es real y una función par de t, entonces $W(f)$ es real.
(b) Si $w(t)$ es real y una función impar de t, entonces $W(f)$ es imaginaria.

2–28 Suponga que el espectro de una forma de onda como una función de frecuencia en hertz es

$$W(f) = \frac{1}{2}\,\delta(f-4) + \frac{1}{2}\,\delta(f+4) + \frac{j\pi f}{2 + j2\pi f}\, e^{j\pi f}$$

Encuentre el espectro correspondiente como una función de frecuencia en radianes, $W(\omega)$.

2–29 El impulso unitario también puede definirse como

$$\delta(t) = \lim_{a\to\infty}\left[Ka\left(\frac{\text{sen } at}{at}\right)\right]$$

Encuentre el valor de K requerido y muestre que esta definición es congruente con aquellas dadas en el texto. Describa otro ejemplo de una función ordinaria de manera que, en el límite de algún parámetro, la función se convierta en una función delta de Dirac.

★ **2–30** Utilice $v(t) = ae^{-at}$, $a > 0$, para aproximar a $\delta(t)$ conforme $a \to \infty$.
(a) Grafique $v(t)$ para $a = 0.1$, 1 y 10.
(b) Grafique $V(f)$ para $a = 0.1$, 1 y 10.

2–31 Muestre que

$$\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$$

[*Sugerencia:* utilice la ecuación (2-30) y $\int_0^{\infty} (\text{sen } x)/x\, dx = \pi/2$ del apéndice A.]

2–32 Muestre que

$$u(t) \leftrightarrow \tfrac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

[*Sugerencia:* utilice el teorema de linealidad (superposición) y el resultado del problema 2-31.]

2–33 Muestre que la propiedad de desplazamiento de las funciones δ, ecuación (2-47), puede generalizarse para la evaluación de integrales que involucran derivadas de la función delta. Es decir, muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\ \delta^{(n)}(x-x_0)dx = (-1)^n w^{(n)}(x_0)$$

donde el superíndice (n) denota la *n*-ésima derivada. (*Sugerencia:* utilice integración por partes.)

2–34 Sea $x(t) = \Pi\left(\dfrac{t-0.05}{0.1}\right)$. Grafique el espectro de $x(t)$ empleando MATLAB con la ayuda de las ecuaciones (2-59) y (2-60). Verifique sus resultados mediante el uso de la FFT y la ecuación (2-184).

★ **2–35** Si $w(t) = w_1(t)w_2(t)$, muestre que

$$W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(\lambda)W_2(f-\lambda)\ d\lambda$$

donde $W(f) = \mathcal{F}[w(t)]$

2–36 Muestre que
(a) $\int_{-\infty}^{t} w(\lambda)d\lambda = w(t) * u(t)$.
(b) $\int_{-\infty}^{t} w(\lambda)d\lambda \leftrightarrow (j2\pi f)^{-1}\ W(f) + \frac{1}{2}W(0)\ \delta(f)$.
(c) $w(t) * \delta(t-a) = w(t-a)$.

2–37 Muestre que

$$\frac{dw(t)}{dt} \leftrightarrow (j2\pi f)W(f)$$

[*Sugerencia:* utilice la ecuación (2-26) e integración por partes. Considere que $w(t)$ es absolutamente integrable.]

2–38 Como se discutió en el ejemplo 2-8, muestre que

$$\frac{1}{T}\ \Pi\left(\frac{t}{T}\right) * \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

2–39 Dada la forma de onda $w(t) = A\Pi(t/T)$ sen $\omega_0 t$, encuentre el espectro de $w(t)$ empleando el teorema de multiplicación, como se discutió en el ejemplo 2-9.

★ **2–40** Evalúe las siguientes integrales.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } 4\lambda}{4\lambda}\ \delta(t-\lambda)\ d\lambda.$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda^3 - 1)\ \delta(2-\lambda)\ d\lambda.$

2–41 Demuestre que

$$M(f) * \delta(f-f_0) = M(f-f_0)$$

2–42 Evalué $y(t) = w_1(t) * w_2(t)$, donde

$$w_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_0 \\ 0, & t \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

y

$$w_2(t) = \begin{cases} [1 - 2|t|], & |t| < \frac{1}{2}T_0 \\ 0, & t \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

2–43 Dada una $w(t) = 5 + 12 \cos w_0 t$, donde $f_0 = 10$ Hz, encuentre
(a) $R_w(\tau)$.
(b) $\mathcal{P}_w(f)$.

2–44 Dada la forma de onda

$$w(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$$

donde A_1, A_2, θ_1, θ_2, θ_1 y θ_2 son constantes,
(a) Encuentre la autocorrelación para $w(t)$ como una función de las constantes.
(b) Encuentre la función de PSD para $w(t)$.
(c) Haga un diagrama de la PSD para el caso donde $\omega_1 \neq \omega_2$.
(d) Haga un diagrama de la PSD para el caso donde $\omega_1 = \omega_2$ y $\theta_1 = \theta_2 + 90°$.
(e) Haga un diagrama de la PSD para el caso donde $\omega_1 = \omega_2$ y $\theta_1 = \theta_2$.

★ **2–45** Dada la forma de onda periódica de voltaje mostrada en la figura P2-45,
(a) Encuentre el valor de DC para esta forma de onda.
(b) Encuentre el valor RMS para esta forma de onda.
(c) Encuentre la serie exponencial compleja de Fourier.
(d) Encuentre el espectro de voltaje para esta forma de onda.

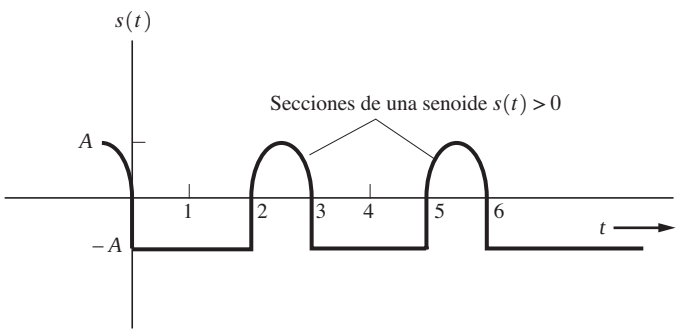


Figura P2–45

2–46 Determine si $s_1(t)$ y $s_2(t)$ son ortogonales sobre el intervalo $(-\frac{5}{2}T_2 < t < \frac{5}{2}T_2)$, donde $s_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$, $s_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$, y $\omega_2 = 2\pi/T_2$ para los siguientes casos.
(a) $\omega_1 = \omega_2$ y $\varphi_1 = \varphi_2$.
(b) $\omega_1 = \omega_2$ y $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi/2$.
(c) $\omega_1 = \omega_2$ y $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$.
(d) $\omega_1 = 2\omega_2$ y $\varphi_1 = \varphi_2$.
(e) $\omega_1 = \frac{4}{5}\omega_2$ y $\varphi_1 = \varphi_2$.
(f) $\omega_1 = \pi\omega_2$ y $\varphi_1 = \varphi_2$.

★ **2–47** Deje que $s(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$. Determine el valor RMS de $s(t)$ en términos de A_1 y A_2 para los siguientes casos.
(a) $\omega_1 = \omega_2$ y $\varphi_1 = \varphi_2$.
(b) $\omega_1 = \omega_2$ y $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi/2$.
(c) $\omega_1 = \omega_2$ y $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$.
(d) $\omega_1 = 2\omega_2$ y φ_1 y φ_2.
(e) $\omega_1 = 2\omega_2$ y $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$.

2–48 Muestre que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \leftrightarrow f_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0)$$

donde $f_0 = 1/T_0$. [*Sugerencia:* obtenga la expansión de $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$ a una serie de Fourier y después tome la transformada de Fourier.]

★ **2–49** La figura P2-49 muestra tres funciones.

(a) Muestre que estas funciones son ortogonales sobre el intervalo $(-4, 4)$.

(b) Encuentre el conjunto de funciones ortonormales correspondiente.

(c) Expanda la forma de onda siguiente

$$w(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 4 \\ 0, & t \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

a una serie ortonormal utilizando el conjunto ortonormal encontrado en la parte (b).

(d) Evalúe el error cuadrático medio para la serie ortogonal obtenida en la parte (c) mediante la evaluación de

$$\varepsilon = \int_{-4}^{4} \left[w(t) - \sum_{j=1}^{3} a_j \varphi_j(t) \right]^2 dt$$

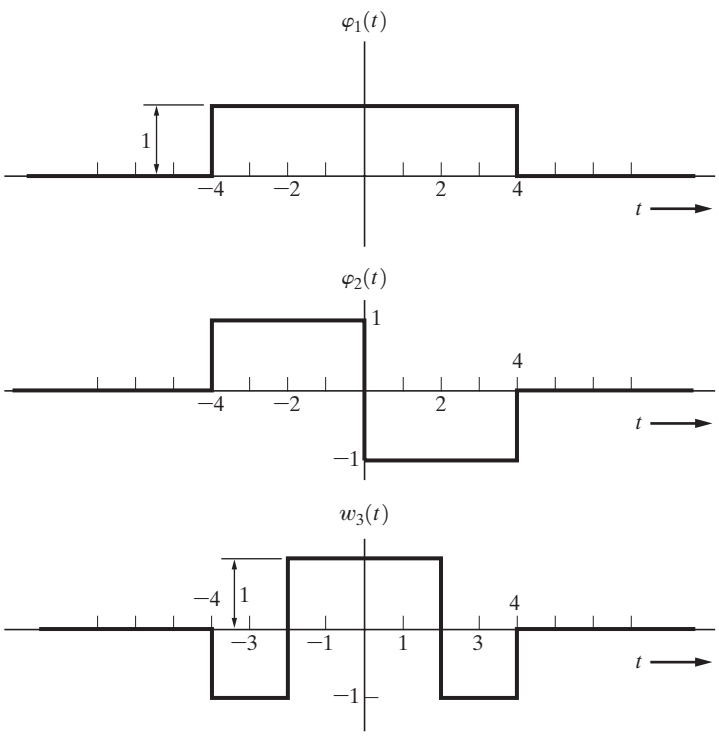


Figura P2–49

(e) Repita las partes (c) y (d) para la forma de onda

$$w(t) = \begin{cases} \cos(\frac{1}{4}\pi t), & -4 \le t \le 4 \\ 0, & t \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

¿Son estas tres funciones un conjunto ortonormal completo?

2–50 Muestre que las funciones base de una serie en cuadratura de Fourier $\cos(n\omega_0 t)$ y $\text{sen}(n\omega_0 t)$ dadas por la ecuación (2-95) son ortogonales sobre el intervalo $a < t < a + T_0$, donde $\omega_0 = 2\pi/T_0$.

2–51 Encuentre las expresiones para los coeficientes de la serie compleja de Fourier que representan la forma de onda mostrada en la figura P2-51.

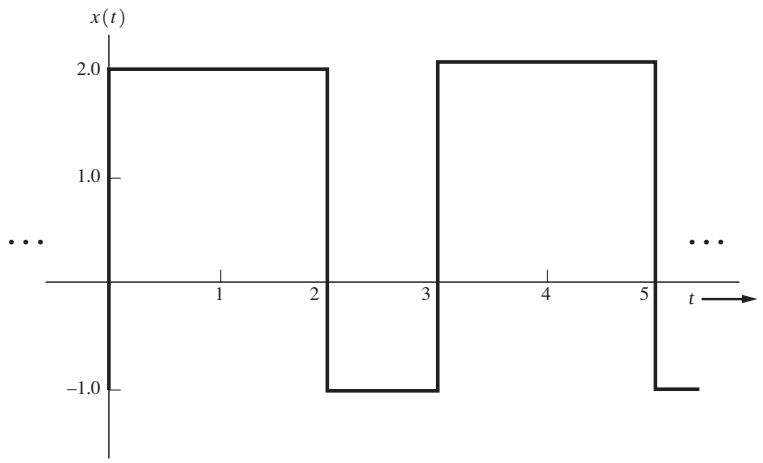


Figura P2–51

2–52 La señal periódica mostrada en la figura P2-51 se pasa a través de un filtro lineal que tiene una respuesta de impulso $h(t) = e^{-\alpha t}u(t)$, donde $t > 0$ y $\alpha > 0$.

(a) Encuentre las expresiones para los coeficientes de una serie compleja de Fourier asociadas con la forma de onda de salida $y(t) = x(t) * h(t)$.

(b) Encuentre una expresión para la potencia normalizada de la salida, $y(t)$.

2–53 Encuentre la serie compleja de Fourier para la forma de onda periódica dada en la figura P2-2.

★ **2–54** Encuentre los coeficientes de la serie compleja de Fourier para la forma de onda periódica rectangular mostrada en la figura P2-54 como una función de A, T, b y τ_0. [*Sugerencia:* la respuesta puede reducirse a la forma $(\text{sen } x)/x$ multiplicada por un factor de desplazamiento de fase, $e^{j\theta_n(\tau_0)}$.]

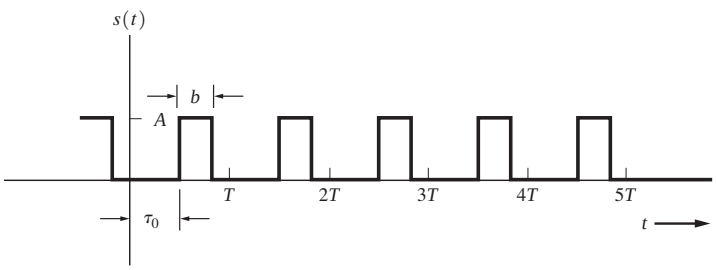


Figura P2–54

2–55 Para la forma de onda mostrada en la figura P2-55, encuentre
(a) La serie compleja de Fourier.
(b) La serie en cuadratura de Fourier.

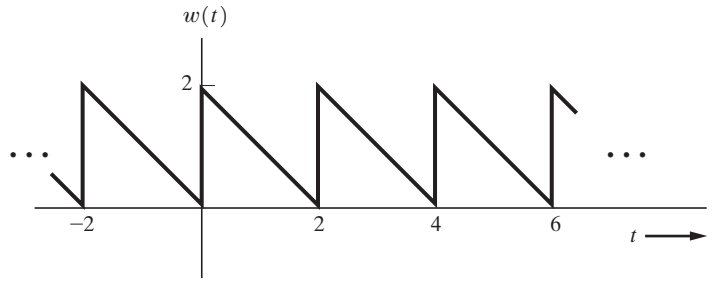


Figura P2-55

★ **2–56** Dada una forma de onda periódica $s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p(t - nT_0)$, donde

$$p(t) = \begin{cases} At, & 0 < t < T \\ 0, & t \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

y $T \leq T_0$,
(a) Encuentre los coeficientes c_n de la serie de Fourier.
(b) Encuentre los coeficientes $\{x_n, y_n\}$ de la serie de Fourier.
(c) Encuentre los coeficientes $\{D_n, \varphi_n\}$ de la serie de Fourier.

2–57 Demuestre que la forma polar de la serie de Fourier, ecuación (2-103), puede obtenerse al reestructurar los términos en la serie compleja de Fourier, ecuación (2-88).

2–58 Demuestre que la ecuación (2-93) es correcta.

2–59 Asumiendo que dos números complejos c_1 y c_2 estén representados por $c_1 = x_1 + jy_1$ y $c_2 = x_2 + jy_2$, donde x_1, x_2, y_1 y y_2 son números reales. Muestre que $\text{Re}\{\cdot\}$ es un operador lineal demostrando que

$$\text{Re}\{c_1 + c_2\} = \text{Re}\{c_1\} + \text{Re}\{c_2\}$$

2–60 Suponga que $y(t) = s_1(t) + 2s_2(t)$, donde $s_1(t)$ está dado por la figura P2-45 y $s_2(t)$ está dado por la figura P2-54. Deje que $T = 3$, $b = 1.5$ y $\tau_0 = 0$. Encuentre los coeficientes complejos de Fourier $\{c_n\}$ para $y(t)$.

2–61 Evalúe la PSD para la forma de onda mostrada en la figura P2-2.

★ **2–62** Suponga que $v(t)$ es una forma de onda triangular, como se muestra en la figura P2-62.

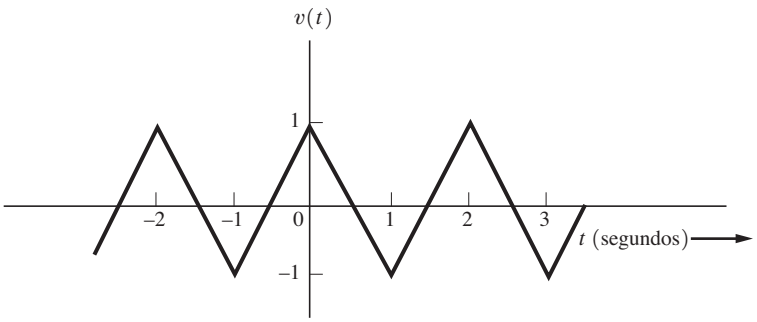


Figura P2–62

(a) Encuentre la serie compleja de Fourier para $v(t)$.
(b) Calcule la potencia promedio normalizada.
(c) Calcule y grafique el espectro de voltaje.
(d) Calcule y grafique la PSD.

2–63 Asumiendo que cualquier número complejo esté representado por $c = x + jy$, donde x y y son números reales. Si c^* denota el conjugado complejo de c, entonces muestre que

(a) $\text{Re}\{c\} = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c^*$.

(b) $\text{Im}\{c\} = \dfrac{1}{2j}\,c - \dfrac{1}{2j}\,c^*$.

Note que cuando $c = e^{jz}$, la parte (a) da la definición de cos z y la parte (b) la definición de sen z.

★ **2–64** Calcule y grafique la PSD para la senoide de media onda rectificada descrita en el problema 2-4.

2–65 Las definiciones básicas para las ondas de seno y de coseno son

$$\text{sen } z_1 \triangleq \frac{e^{jz_1} - e^{-jz_1}}{2j} \quad \text{y} \quad \cos z_2 \triangleq \frac{e^{jz_2} + e^{-jz_2}}{2}.$$

Muestre que

(a) $\cos z_1 \cos z_2 = \frac{1}{2}\cos(z_1 - z_2) + \frac{1}{2}\cos(z_1 + z_2)$.

(b) $\text{sen } z_1 \text{ sen } z_2 = \frac{1}{2}\cos(z_1 - z_2) - \frac{1}{2}\cos(z_1 + z_2)$.

(c) $\text{sen } z_1 \cos z_2 = \frac{1}{2}\,\text{sen}(z_1 - z_2) + \frac{1}{2}\,\text{sen}(z_1 + z_2)$.

2–66 Asumiendo que dos números complejos estén representados, respectivamente, por $c_1 = x_1 + jy_1$ y $c_2 = x_2 + jy_2$, donde x_1, x_2, y_1 y y_2 son números reales. Muestre que

$$\text{Re}\{c_1\}\,\text{Re}\{c_2\} = \tfrac{1}{2}\,\text{Re}\{c_1 c_2^*\} + \tfrac{1}{2}\,\text{Re}\{c_1 c_2\}$$

Note que esta es una generalización de la identidad de cos z_1 cos z_2 del problema 2-65, donde, para la identidad cos z_1 cos z_2, $c_1 = e^{jz_1}$ y $c_2 = e^{jz_2}$.

2–67 Demuestre que la transformada de Fourier es un operador lineal. Esto es, muestre que

$$\mathcal{F}[ax(t) + by(t)] = a\mathcal{F}[x(t)] + b\mathcal{F}[y(t)]$$

2–68 Grafique las respuestas de amplitud y de fase para la función de transferencia

$$H(f) = \frac{j10f}{5 + jf}$$

2–69 Dado el filtro mostrado en la figura P2-69, donde $w_1(t)$ y $w_2(t)$ son formas de onda de voltaje,

(a) Encuentre la función de transferencia.
(b) Grafique las respuestas de magnitud y de fase.
(c) Encuentre la función de transferencia de potencia.
(d) Grafique la función de transferencia de potencia.

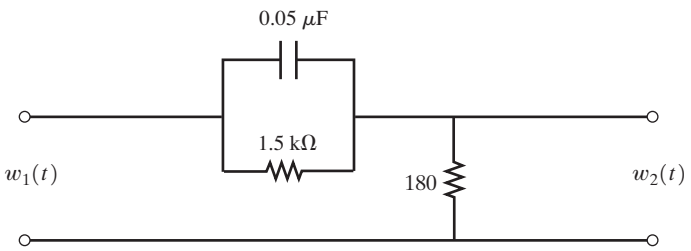


Figura P2–69

2–70 Una señal con una PSD de

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{2}{(1/4\pi)^2 + f^2}$$

se aplica a la red mostrada en la figura P2-70.
(a) Encuentre la PSD para $y(t)$.
(b) Encuentre la potencia promedio normalizada para $y(t)$.

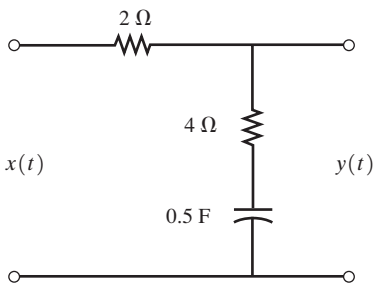


Figura P2–70

2–71 Una señal $x(t)$ tiene una PSD de

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{K}{[1 + (2\pi f/B)^2]^2}$$

donde $K > 0$ y $B > 0$.
(a) Encuentre el ancho de banda a 3 dB en términos de B.
(b) Encuentre el ancho de banda de ruido equivalente en términos de B.

★ **2–72** La señal $x(t) = e^{-400\pi t}u(t)$ se aplica a un filtro pasabaja de "pared de ladrillos" cuya función de transferencia es

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \le B \\ 0, & |f| > B \end{cases}$$

Encuentre el valor de B tal que el filtro pase la mitad de la energía de $x(t)$.

2–73 Muestre que la potencia promedio normalizada de una forma de onda puede encontrarse mediante la evaluación de la autocorrelación $R_w(\tau)$ cuando $\tau = 0$. Esto es que $P = R_w(0)$.
[*Sugerencia:* consulte las ecuaciones (2-69) y (2-70).]

2–74 La señal $x(t) = 0.5 + 1.5\cos[(\frac{2}{3})\pi t] + 0.5\,\text{sen}[(\frac{2}{3})\pi t]$ V se pasa a través de un filtro pasabajas *RC* (vea la figura 2-15a) donde $R = 1\ \Omega$ y $C = 1$ F.
(a) ¿Cuál es la PSD de entrada, $\mathcal{P}_x(f)$?
(b) ¿Cuál es la PSD de salida, $\mathcal{P}_y(f)$?
(c) ¿Cuál es la potencia promedio normalizada de salida, P_y?

2–75 La entrada al filtro pasabajas *RC* mostrado en la figura 2-15 es

$$x(t) = 0.5 + 1.5\cos\omega_x t + 0.5\,\text{sen}\,\omega_x t$$

Suponga que la frecuencia de corte es $f_0 = 1.5f_x$.
(a) Encuentre la PSD de entrada, $\mathcal{P}_x(f)$.
(b) Encuentre la PSD de salida, $\mathcal{P}_y(f)$.
(c) Encuentre la potencia promedio normalizada de la salida, $y(t)$.

★ **2–76** Utilizando MATLAB, grafique las respuestas de magnitud y de fase de frecuencia para el filtro pasabajas mostrado en la figura P2-76, donde $R_1 = 7.5\ \text{k}\Omega$, $R_2 = 15\ \text{k}\Omega$ y $C = 0.1\ \mu\text{F}$.

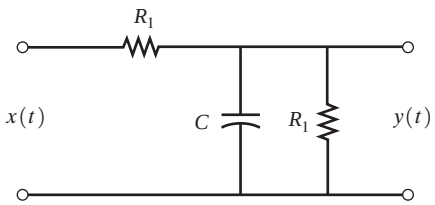


Figura P2–76

2–77 Un filtro en forma de peine se muestra en la figura P2-77. Deje que $T_d = 0.1$.
(a) Grafique la magnitud de la función de transferencia para este filtro.
(b) Si la entrada es $x(t) = \Pi(t/T)$, donde $T = 1$, grafique el espectro de la salida $|Y(f)|$.

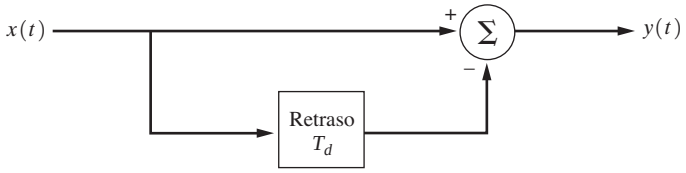


Figura P2–77

2–78 Una señal $x(t) = \Pi(t - 0.5)$ pasa a través de un filtro que tiene una función de transferencia $H(f) = \Pi(f/B)$. Grafique la forma de onda de salida cuando
(a) $B = 0.6$ Hz.
(b) $B = 1$ Hz.
(c) $B = 50$ Hz.

★ **2–79** Examine el efecto de distorsión sobre un filtro pasabajas *RC*. Suponga que una onda periódica cuadrada de amplitud unitaria con un ciclo de trabajo de 50□ está presente a la entrada del filtro y que éste tiene un ancho de banda de 1,500 Hz a 3 dB. Utilizando una computadora, encuentre y grafique la forma de onda de salida si la onda cuadrada tiene una frecuencia de
(a) 300 Hz.
(b) 500 Hz.
(c) 1,000 Hz.
(*Sugerencia:* represente la onda cuadrada mediante una serie de Fourier.)

2–80 Dado que la PSD de una señal es plana [es decir, $\mathcal{P}_s(f) = 1 = 1$], diseñe un filtro pasabajas *RC* que atenuará esta señal por 20 dB a 15 kHz. Esto es, encuentre el valor para el *RC* de la figura 2-15 de manera tal que se satisfagan las especificaciones de diseño.

2–81 El ancho de banda de $g(t) = e^{-0.1t}$ es de aproximadamente 0.5 Hz□por lo tanto, la señal puede muestrearse con una frecuencia de muestreo de $f_s = 1$ Hz sin aliasing significativo. Tome muestras a_n sobre el intervalo de tiempo $(0, 14)$. Empleando el teorema de muestreo, ecuación $(2\text{-}158)$, para reconstruir la señal. Grafique y compare la señal reconstruida con la señal original. □Se asemejan? □Qué ocurre cuando se reduce la frecuencia de muestreo?

★ **2–82** Una forma de onda, $20 + 20\ \text{sen}(500t + 30°)$, será muestreada periódicamente y reproducida a partir de estas muestras.
(a) Encuentre el intervalo de tiempo máximo permitido entre las muestras.
(b) □Cuántas muestras se requieren almacenar para reproducir 1 segundo de esta forma de onda?

2–83 Utilizando un programa de computadora, calcule la DFT de un pulso rectangular, $\Pi(t)$. Tome cinco muestras del pulso y rellénelas con 59 ceros de manera tal que un algoritmo de FFT de 64 puntos pueda utilizarse. Haga un diagrama del espectro de magnitud resultante. Compare este resultado con el espectro real para el pulso. Intente otras combinaciones de número de muestras del pulso y rellénelos con ceros para observar cómo cambia la FFT resultante.

★ **2–84** Utilizando la DFT, calcule y grafique el espectro de $\Lambda(t)$. Verifique sus resultados con aquellos dados en la figura 2-6c.

2–85 Utilizando la DFT, calcule y grafique $|W(f)|$ para el pulso mostrado en la figura P2-24, donde $A = 1$, $t_1 = 1$s y $t_2 = 2$s.

2–86 Deje que cierta forma de onda esté dada por

$$w(t) = 4\ \text{sen}(2\pi f_1 t + 30^\circ) + 2\ \cos(2\pi f_2 t - 10^\circ),$$

donde $f_1 = 10$ Hz y $f_2 = 25$ Hz,

(a) Utilizando la DFT, calcule y grafique $|W(f)|$ y $\theta(f)$.

(b) Asumiendo que $\mathcal{P}_w(f)$ represente la PSD de $w(t)$. Utilizando la DFT, calcule y grafique $\mathcal{P}_w(f)$.

(c) Verifique sus resultados calculados en las partes (a) y (b) con resultados correctos conocidos que usted ha evaluado mediante métodos analíticos.

2–87 Utilizando la DFT, calcule y grafique $|S(f)|$ para la señal periódica mostrada en la figura P2-45, donde $A = 5$.

2–88 La función de transferencia de un filtro de coseno elevado es

$$H(f) = \begin{cases} 0.5[1 + \cos(0.5\pi f/f_0)], & |f| \le 2f_0 \\ 0, & f \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Deje que $f_0 = 1$ Hz. Utilizando la IFFT, calcule la respuesta de impulso $h(t)$ para este filtro. Compare sus resultados calculados con los que se muestran en la figura 3-26b para el caso cuando $r = 1$.

2–89 Dado el filtro pasabajas mostrado en la figura 2-15,

(a) Encuentre el ancho de banda equivalente en términos de R y C.

(b) Encuentre el primer ancho de banda con cruce con cero (nulo) del filtro.

(c) Encuentre el ancho de banda absoluto del filtro.

2–90 Suponga que la PSD de una señal está dada por

$$\mathcal{P}_s(f) = \left[\frac{\text{sen}(\pi f/B_n)}{\pi f/B_n}\right]^2$$

donde B_n es el ancho de banda nulo. Encuentre la expresión para el ancho de banda equivalente en términos del ancho de banda nulo.

2–91 La tabla 2-5 presenta los anchos de banda para una señal con BPSK en términos de seis diferentes definiciones. Empleando estas definiciones junto a la ecuación (2-201), muestre que los resultados en la tabla son correctos.

★ **2–92** Dada una señal de pulso triangular

$$s(t) = \Lambda(t/T_0)$$

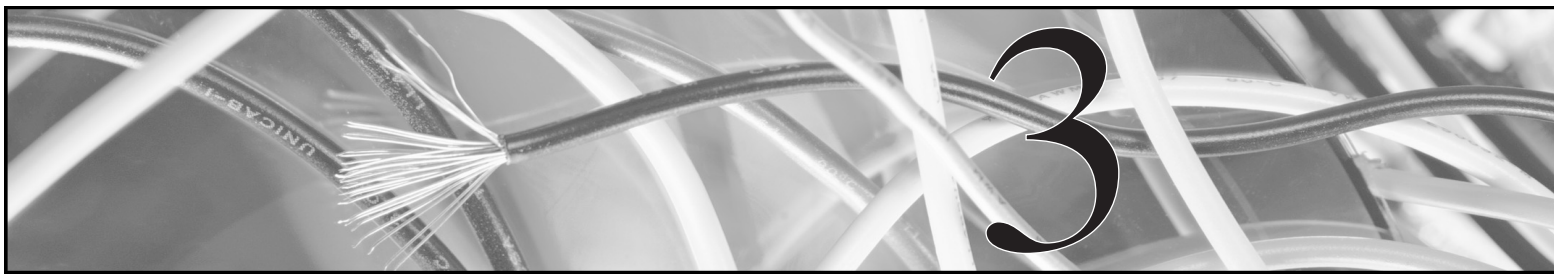
(a) Encuentre el ancho de banda absoluto de la señal.

(b) Encuentre el ancho de banda a 3 dB en términos de T_0.

(c) Encuentre el ancho de banda equivalente en términos de T_0.

(d) Encuentre el ancho de banda con cruces con cero en términos de T_0.

Capítulo



3

PULSO DE BANDA BASE Y SEÑALIZACIÓN DIGITAL

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Señalización analógica a digital (modulación por codificación de pulsos y modulación delta)
- Señales digitales binarias y multinivel
- Espectros y anchos de banda de señales digitales
- Prevención de la interferencia intersimbólica
- Multiplexión por división de tiempo
- Transmisión de paquetes

3–1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo explica cómo codificar formas de onda analógicas (a partir de fuentes analógicas) dentro de señales digitales de banda base. Como se verá, la aproximación digital a la señal analógica puede hacerse tan precisa como se desee. Además, el lector aprenderá cómo emitir señales digitales de banda base de tal manera que su ancho de banda se minimice.

El uso de la señalización digital está generalizado porque los circuitos digitales son baratos y por la flexibilidad del enfoque digital, que se da porque los datos de fuentes digitales pueden combinarse con datos digitalizados derivados de fuentes analógicas para ofrecer un sistema de comunicación de propósito general.

Las señales involucradas en el problema de la conversión analógica a digital son de *banda base*. También se observa que las señales digitales *pasabanda* de comunicación se producen con señales digitales de banda base para la modulación de una portadora, como se describió en el capítulo 1.

Los siguientes son los cuatro objetivos principales de este capítulo:

- Estudiar cómo las formas de onda analógicas pueden convertirse en digitales. La técnica más popular se conoce como *modulación por codificación de pulsos* (PCM).
- Aprender a calcular el espectro para señales digitales.
- Examinar cómo el filtrado de señales de pulso afecta la habilidad para recuperar la información digital en el receptor. Este filtrado puede producir lo que se conoce como *interferencia intersimbólica* (ISI, por sus siglas en inglés) en la señal de datos recuperada.
- Comprender cómo puede realizarse una *multiplexión* (combinación) de datos de varios flujos digitales de bits dentro de un solo flujo digital de alta velocidad para su transmisión sobre un sistema digital. Una de estas técnicas, llamada *multiplexión por división de tiempo* (TDM, por sus siglas en inglés), se estudiará en este capítulo.[1]

Otro problema de gran importancia en los sistemas digitales de comunicación es el efecto del ruido, el cual puede causar que el receptor digital produzca algunos errores de bit en su salida. Esto se estudiará en el capítulo 7, ya que implica el uso de conceptos estadísticos que se enfatizan en la segunda parte de este texto.

3–2 MODULACIÓN DE AMPLITUD DE PULSOS

La *modulación de amplitud de pulsos* (PAM, por sus siglas en inglés) es un término de ingeniería que describe la conversión de la señal analógica a una señal del tipo de pulso en la cual la amplitud del pulso representa la información analógica. La PAM se estudiará antes debido a que el proceso de conversión de analógica a PAM es el primer paso en la conversión de una forma de onda analógica a una señal PCM (digital). En ciertas aplicaciones la señal PAM se utiliza directamente y no se requiere una conversión a PCM.

El teorema de muestreo estudiado en el capítulo 2 provee una manera de reproducir una forma de onda analógica mediante muestras de ésta y con la ayuda de funciones ortogonales (sen x)/x. El propósito de la señalización por PAM es suministrar *otra* forma de onda que se asemeja a los pulsos, y sin embargo contiene la información presente en la forma de onda analógica. Debido a que se utilizan pulsos, se espera que el ancho de banda de la forma de onda PAM sea más ancho que el de la forma de onda analógica. No obstante, los pulsos son más prácticos de usar en los sistemas digitales. Se verá que la velocidad de pulso, f_s, para la PAM es la misma que la requerida por el teorema de muestreo, es decir, $f_s \geq 2B$, donde B es la frecuencia más alta en la forma de onda analógica y $2B$ se conoce como la *velocidad de Nyquist*.

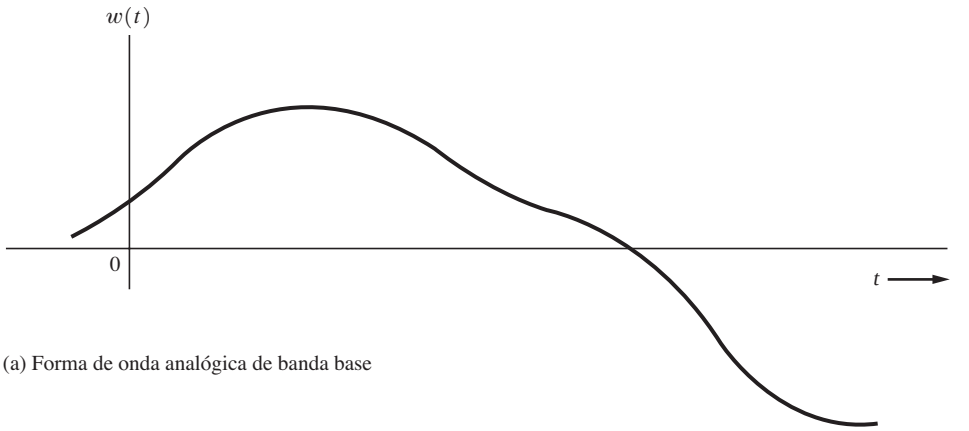
Existen dos clases de señales PAM: la que utiliza *muestreo natural* (por compuerta) y la que usa un *muestreo instantáneo* para producir un pulso plano. Estas señales se ilustran en las figuras 3-1 y 3-5, respectivamente. El tipo de PAM plana es de mayor utilidad en la conversión a PCM□sin embargo, el tipo por muestreo natural es más fácil de generar y se utiliza en otras aplicaciones.

Muestreo natural (por compuerta)

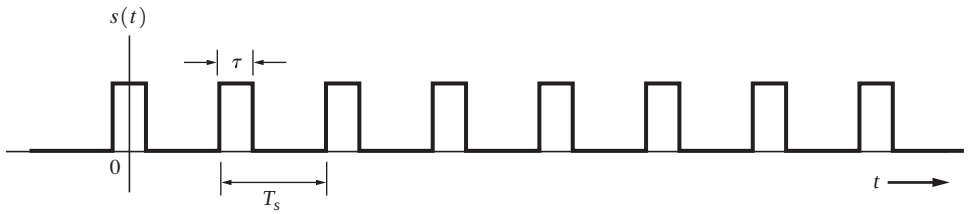
DEFINICIÓN. Si $w(t)$ es una forma de onda analógica limitada por banda a B hertz, entonces la señal *PAM* que utiliza *muestreo natural* (por compuerta) es

$$w_s(t) = w(t)\,s(t) \tag{3–1}$$

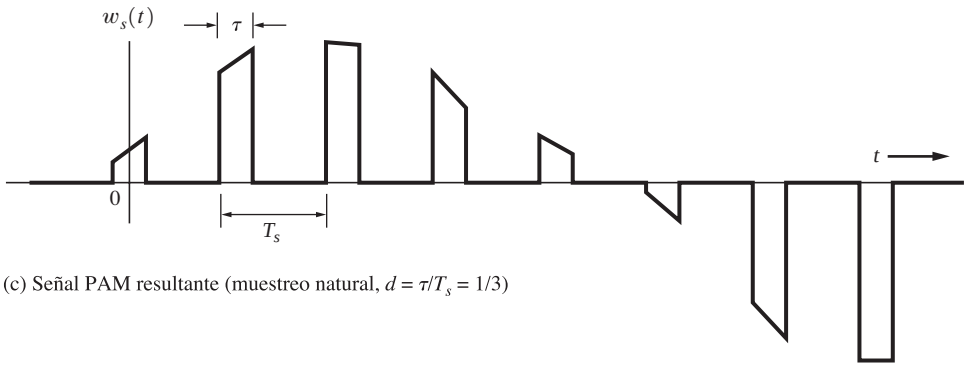
[1] Otras técnicas, como la multiplexión por división de frecuencias o la multiplexión por división de código, se cubren en los capítulos 5 y 8.



(a) Forma de onda analógica de banda base



(b) Forma de onda de conmutación con ciclo de trabajo $d = \tau/T_s = 1/3$



(c) Señal PAM resultante (muestreo natural, $d = \tau/T_s = 1/3$)

Figura 3–1 Señal PAM con muestreo natural.

donde

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t - kT_s}{\tau}\right) \tag{3–2}$$

es una forma de onda de conmutación de ondas rectangulares y $f_s = 1/T_s \geq 2B$.

Teorema. *El espectro para una señal PAM naturalmente muestreada es*

$$W_s(f) = \mathcal{F}[w_s(t)] = d \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \pi nd}{\pi nd} W(f - nf_s) \tag{3–3}$$

donde $f_s = 1/T_s$, $\omega_s = 2\pi f_s$, el ciclo de trabajo de $s(t)$ es $d = \tau/T_s$, y $W(f) = \mathcal{F}[w(t)]$ es el espectro de la forma de onda original sin muestreo.

Demostración. Tomando la transformada de Fourier de la ecuación (3-1) se tiene que

$$W_s(f) = W(f) * S(f) \tag{3–4}$$

$s(t)$ puede representarse por la serie de Fourier

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_s t} \tag{3–5a}$$

donde

$$c_n = d \frac{\text{sen } n\pi d}{n\pi d} \tag{3–5b}$$

Debido a que $s(t)$ es periódica la ecuación (2-109) puede utilizarse para obtener el espectro:

$$S(f) = \mathcal{F}[s(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - nf_s) \tag{3–6}$$

Entonces la ecuación (3-4) se convierte en

$$W_s(f) = W(f) * \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - nf_s) \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n W(f) * \delta(f - nf_s)$$

o

$$W_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n W(f - nf_s) \tag{3–7}$$

La anterior se convierte en la ecuación (3-3) al sustituir la ecuación (3-5b).

La forma de onda PAM con muestreo natural es relativamente fácil de generar, ya que sólo requiere el uso de un conmutador analógico que está listo y disponible en hardware de CMOS (como, por ejemplo, el CMOS 4016 con cuatro conmutadores bilaterales). Este hardware se muestra en la figura 3-2, donde las formas de onda asociadas $w(t)$, $s(t)$ y $w_s(t)$ son como se ilustran en la figura 3-1.

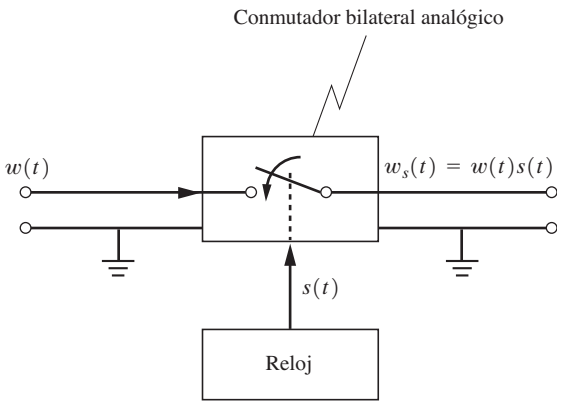
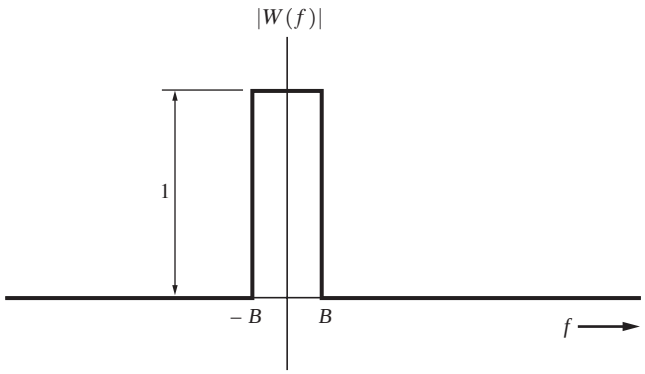


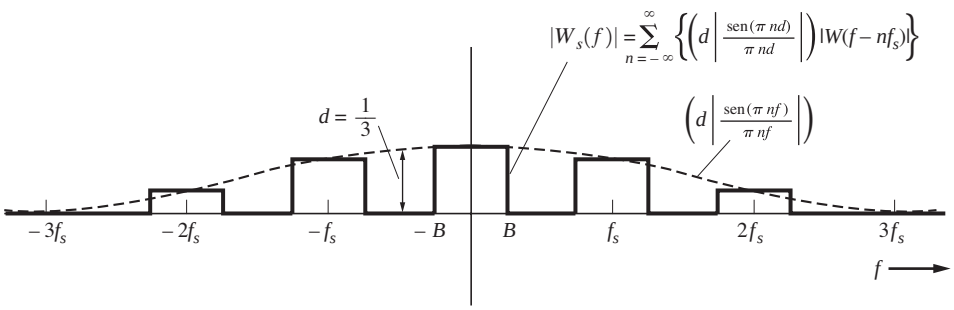
Figura 3–2 Generación de PAM con muestreo natural (por compuerta).

El espectro de la señal PAM con muestreo natural está dada por la ecuación (3-3) como una función del espectro de la forma de onda analógica de entrada. Esta relación se ilustra en la figura 3-3 para el caso de una forma de onda de entrada que posee un espectro rectangular, donde el ciclo de trabajo de la forma de onda de conmutación es $d = \tau/T_s = \frac{1}{3}$ y la velocidad de muestreo es de $f_s = 4B$. Como se espera, el espectro de la forma de onda analógica de entrada se repite en las armónicas de la frecuencia de muestreo. Esto es parecido al espectro para el muestreo por impulsos que se estudió en la sección 2-7□por ejemplo, compare la figura 2-18 con la figura 3-3. Para este caso, donde $d = \frac{1}{3}$, el espectro de PAM es cero para $\pm 3f_s$, $\pm 6f_s$ y así sucesivamente, debido a que el espectro en esta banda de armónicas se nulifica por la función de (sen x)/x. A partir de la figura puede observarse que el ancho de banda de la señal PAM es mucho mayor que el de la señal analógica original. De hecho, para el ejemplo ilustrado en la figura 3-3b, el ancho de banda nulo para el envolvente de la señal PAM es $3f_s = 12B$□esto es, el ancho de banda nulo de esta señal PAM es 12 veces el de la señal analógica.

En el receptor, la forma de onda analógica original, $w(t)$, puede recuperarse a partir de la señal PAM, $w_s(t)$, si ésta se pasa a través de un filtro pasabajas en donde la frecuencia de corte es de $B < f_{corte} < f_s - B$. Esto se observa al comparar la figura 3-3b con la figura 3-3a. Debido a que el espectro a la salida del filtro pasabajas tendría la misma forma que la de la señal analógica original mostrada en la figura 3-3a, la forma de la onda a la salida del filtro pasabajas sería idéntica a la de



(a) Espectro de magnitud de la forma de onda analógica de entrada



(b) Espectro de magnitud de la PAM (muestreo natural) con d = 1/3 y f_s = 4 B

Figura 3–3 Espectro de una forma de onda PAM con muestreo natural.

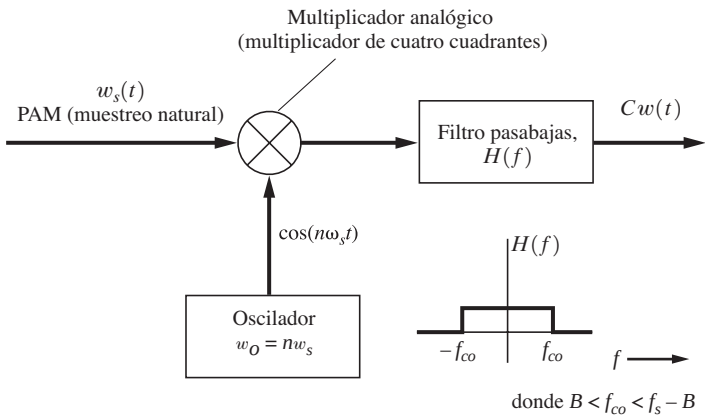


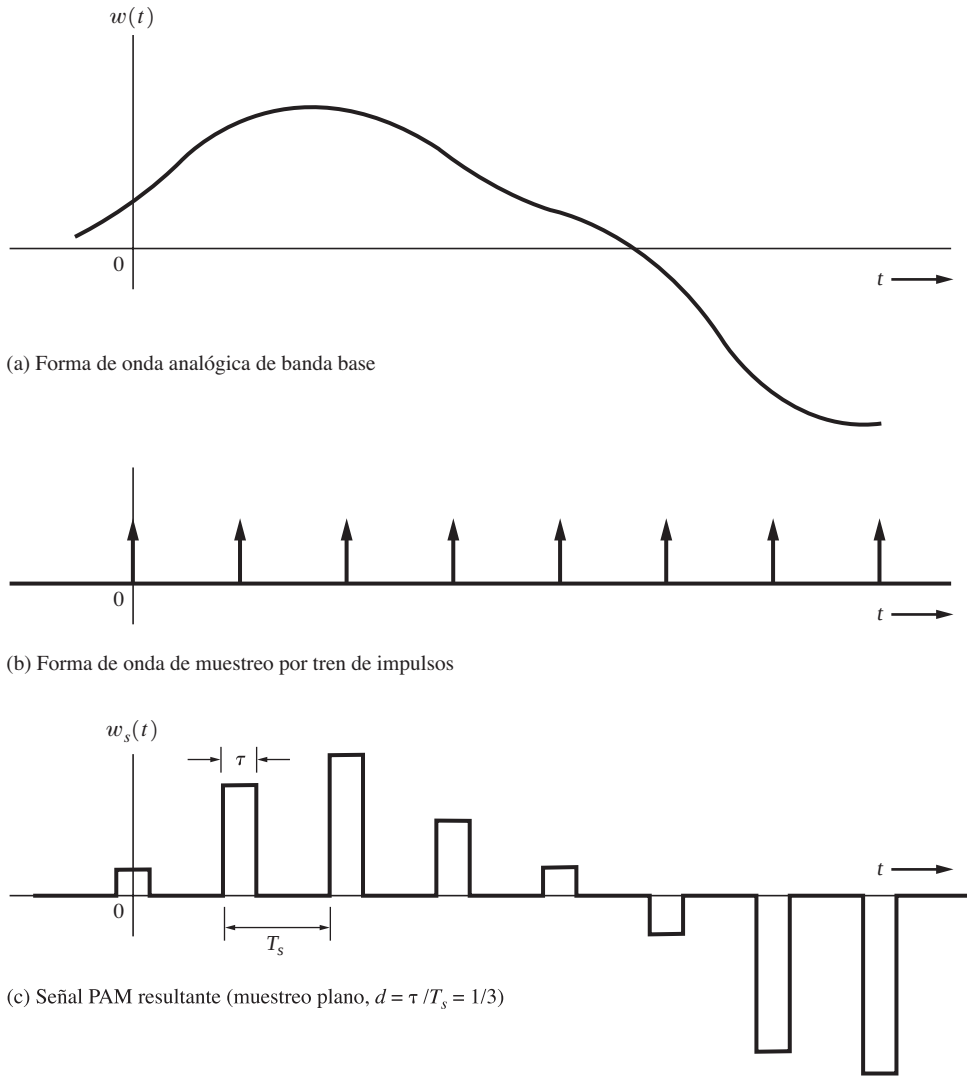
Figure 3–4 Demodulation of a PAM signal (naturally sampled).

la señal analógica original, excepto para un factor de ganancia de d, el cual puede compensarse mediante un amplificador. Como se observa en la figura 3-3b, el espectro a la salida del filtro pasabajas tendrá la misma forma que el espectro de la señal analógica original sólo cuando $f_s \geq 2B$, ya que de otra manera los componentes espectrales en las bandas armónicas de f_s se solaparán. Esta es otra ilustración del requerimiento en la velocidad de muestreo de Nyquist. Si la señal analógica está *submuestreada* $(f_s < 2B)$, entonces el efecto de solape espectral se conoce como *aliasing*. Esto resulta en una señal analógica recuperada que está distorsionada en comparación a la forma de onda original. En la práctica, las señales físicas generalmente se consideran limitadas por tiempo y, por lo tanto, como se presentó en el capítulo 2, no pueden ser absolutamente limitadas por banda. Por consiguiente, existirá cierto aliasing en la señal PAM. A menudo se hace un prefiltrado de la señal analógica antes de introducirla al circuito de PAM, de tal manera que este problema no es preocupante□sin embargo, se ha estudiado el efecto de ruido aliasing [Spilker, 1977].

Se aprecia además (consulte el problema 3-4) que la forma de onda analógica puede recuperarse de la señal PAM empleando una detección de *producto*, como se muestra en la figura 3-4. En este caso, la señal PAM se multiplica con una señal senoidal de frecuencia $\omega_0 = n\omega_s$. Esto desplaza la banda de frecuencia de la señal PAM, cuyo centro estaba alrededor de nf_s, a la banda base (es decir, $f = 0$) a la salida del multiplicador. El detector de producto se estudiará en el capítulo 4. Para $n = 0$, esto es idéntico a la filtración pasabajas, como se acaba de discutir. Por supuesto que el lector se preguntará, □para qué usar un detector de producto cuando un simple filtro pasabajas tiene el mismo efecto? La razón es que existe ruido en la señal PAM debido al ruido de la fuente de poder o debido a la vibración mecánica en el circuito, y puede caer en la banda correspondiente a $n = 0$ y otras bandas pueden ser relativamente libres de ruido. En este caso, un detector de producto podría usarse para evitar el problema.

Muestreo instantáneo (PAM plana)

Las formas de onda analógicas pueden también convertirse a señalización por pulsos mediante el uso de la señalización *plana* con muestreo instantáneo, como se muestra en la figura 3-5. Esta es otra generalización de la técnica de muestreo por tren de impulsos que se estudió en la sección 2-7.



(a) Forma de onda analógica de banda base

(b) Forma de onda de muestreo por tren de impulsos

(c) Señal PAM resultante (muestreo plano, $d = \tau / T_s = 1/3$)

Figura 3–5 Señal PAM con muestreo plano.

DEFINICIÓN. Si $w(t)$ es una forma de onda analógica limitada por banda a B hertz, entonces la señal PAM por *muestreo instantáneo* está dada por

$$w_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT_s) \tag{3–8}$$

donde $h(t)$ denota la forma del pulso de muestreo y, para muestreo plano, la forma del pulso es

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases} \tag{3–9}$$

donde $\tau \leq T_s = 1/f_s$ y $f_s \geq 2B$.

TEOREMA. *El espectro para una señal PAM plana es*

$$W_s(f) = \frac{1}{T_s} H(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(f - kf_s) \tag{3–10}$$

donde

$$H(f) = \mathcal{F}[h(t)] = \tau\left(\frac{\text{sen } \pi\tau f}{\pi\tau f}\right) \tag{3–11}$$

Este tipo de señal PAM es consistente a las muestras instantáneas, ya que $w(t)$ se muestrea cuando $t = kT_s$ y las muestras $w(kT_s)$ determinan la amplitud de los pulsos planos rectangulares, como se muestra en la figura 3-5c. La señal PAM plana puede generarse empleando un circuito electrónico del tipo de muestreo y almacén.

Otra forma de pulso, en lugar de la rectangular, puede utilizarse en la ecuación (3-8), pero la forma de onda PAM resultante no sería plana. Note que si la $h(t)$ es del tipo (sen x)/x con pulsos solapados, la ecuación (3-8) se vuelve idéntica al teorema de muestreo de la ecuación (2-158), y por lo tanto esta señal muestreada se vuelve también idéntica a la forma de onda analógica original sin muestreo, $w(t)$.

Demostración. El espectro para la PAM plana puede obtenerse tomando la transformada de Fourier de la ecuación (3-8). Primero se reescribe dicha fórmula, empleando una forma más conveniente que implica la operación de convolución:

$$\begin{aligned} w_s(t) &= \sum_k w(kT_s)\, h(t) * \delta(t - kT_s) \\ &= h(t) * \sum_k w(kT_s)\, \delta(t - kT_s) \end{aligned}$$

□ de aquí se obtiene que,

$$w_s(t) = h(t) * \left[w(t) \sum_k \delta(t - kT_s) \right]$$

El espectro es

$$W_s(f) = H(f) \left[W(f) * \sum_k e^{-j2\pi f k T_s} \right] \tag{3–12}$$

Pero la suma de las funciones exponenciales es equivalente a la expansión de una serie de Fourier (en el dominio de frecuencia) cuando la función periódica es un tren de impulsos. Esto es,

$$\frac{1}{T_s} \sum_k \delta(f - kf_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j(2\pi n T_s) f}, \tag{3–13a}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{f_s} \int_{-f_s/2}^{f_s/2} \left[\sum_k \delta(f - kf_s) \right] e^{-j2\pi n T_s f} \, df = \frac{1}{f_s} \tag{3–13b}$$

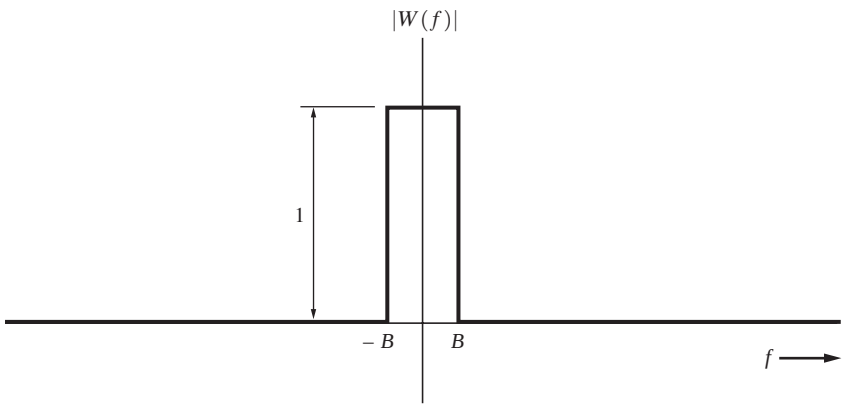
Utilizando la ecuación (3-13a) se encuentra que la ecuación (3-12) se convierte en

$$W_s(f) = H(f) \left[W(f) * \frac{1}{T_s} \sum_k \delta(f - kf_s) \right]$$

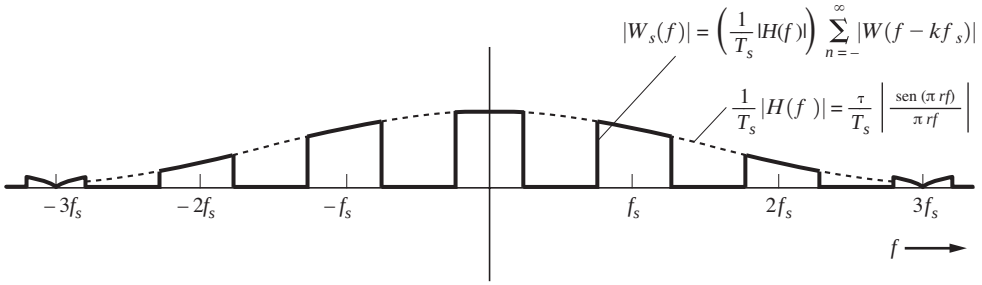
$$= \frac{1}{T_s} H(f) \left[\sum_k W(f) * \delta(f - kf_s) \right]$$

la cual se reduce a la ecuación (3-10).

El espectro de la señal PAM plana se ilustra en la figura 3-6 para el caso de una forma de onda analógica de entrada que tiene un espectro rectangular. La señal analógica puede recuperarse a partir de la señal PAM plana empleando un filtro pasabajas. No obstante, existe una pérdida de alta frecuencia en la forma de onda analógica recuperada debido al efecto de filtrado, $H(f)$, causado por la forma del pulso plano. Esta pérdida, si es significativa, puede reducirse al disminuir τ, o si se utiliza alguna ganancia adicional en las altas frecuencias en la función de transferencia del filtro pasa-



(a) Espectro de magnitud de la forma de onda analógica de entrada



(b) Espectro de magnitud de la PAM (muestreo plano), $\tau/T_s = 1/3$ y $f_s = 4B$

Figura 3–6 Espectro de una forma de onda PAM con muestreo plano.

bajas. En tal caso, el filtro pasabajas se conocería como un filtro de *ecualización* y tendría una función de transferencia de $1/H(f)$. El ancho de pulso τ también se conoce como *apertura*, ya que τ/T_s determina la ganancia de la señal analógica recuperada, la cual es pequeña si τ es pequeña en relación a T_s. También es posible el uso de la detección por producto parecida a la mostrada en la figura 3-4, excepto que en este caso se podrá requerir de un prefiltrado antes del multiplicador para hacer que el espectro sea plano en una banda centrada en $f = nf_s$, y para compensar por la pérdida espectral debida al efecto de apertura. Para reiterar, f_s debe seleccionarse tal que $f_s \geq 2B$ para la prevención de aliasing.

La transmisión por PAM con muestreo natural o instantáneo a través de un canal requiere una respuesta de frecuencia bastante ancha debido a lo estrecho del ancho del pulso, la cual impone estrictos requisitos sobre la respuesta de magnitud y de fase del canal. El ancho de banda requerido es mucho mayor que para la señal analógica original y el rendimiento del ruido del sistema PAM nunca puede ser mejor que aquel logrado mediante la transmisión directa de la señal analógica. Por lo tanto, la PAM no es muy buena opción para el caso de una transmisión a larga distancia. Pero sí provee de un medio para la conversión de una señal analógica a una señal PAM, como se discute en la siguiente sección. La PAM también proporciona un medio para dividir la señal en ranuras de tiempo de tal manera que multiplique señales PAM que portan información de distintas fuentes que puedan entrelazarse para transmitir toda la información a través de un solo canal. Esto se conoce como multiplexión por división de tiempo y se estudiará en la sección 3-9.

3–3 MODULACIÓN POR CODIFICACIÓN DE PULSOS

DEFINICIÓN. La *modulación por codificación de pulsos* (PCM) es, en esencia, una conversión analógica a digital de un tipo especial en donde la información contenida en las muestras instantáneas de una señal analógica está representada mediante palabras digitales en un *flujo serial de bits*.

Si suponemos que cada una de las palabras digitales cuenta con n dígitos binarios, entonces existen $M = 2^n$ palabras de codificación únicas y posibles, además de que cada palabra de codificación corresponde a cierto nivel de amplitud. Sin embargo, cada muestra de la señal analógica puede ser cualquier valor en un número infinito de niveles de tal manera que la palabra digital que representa la amplitud más cercana al valor muestreado es la que se utiliza. Esto se conoce como *cuantificación*. O sea, en lugar de utilizar el valor exacto de la muestra de la forma de onda analógica $w(kT_s)$, la muestra se sustituye por el valor más cercano permitido, donde existen M valores permitidos y cada uno corresponde a una de las palabras de codificación. Otros tipos populares de conversión analógica a digital, como la modulación delta (DM, por sus siglas en inglés) y modulación por codificación de pulsos diferencial (DPCM, por sus siglas en inglés), se discutirán en secciones posteriores.

La PCM es muy popular gracias a las múltiples ventajas que ofrece, como las siguientes:

- En el sistema, pueden utilizarse ampliamente circuitos digitales relativamente económicos.
- Las señales PCM derivadas de todos los tipos de fuentes analógicas (audio, video, etc.) pueden combinarse con señales de datos (de computadoras digitales, por ejemplo) y transmitirlas a través del mismo sistema digital de comunicación de alta velocidad. Esta combinación se conoce como multiplexión por división de tiempo y se discutirá a detalle en una sección posterior.

- En los sistemas telefónicos digitales de larga distancia que necesitan repetidores, una forma de onda PCM *limpia* puede regenerarse a la salida de cada repetidor, donde la entrada consiste en una forma de onda PCM con ruido. Sin embargo, el ruido a la entrada puede causar errores de bit en la señal PCM recuperada en la salida.
- El rendimiento de ruido de un sistema digital puede ser superior al de uno analógico. Además, la probabilidad de error para la salida del sistema puede reducirse aún más mediante técnicas de codificación apropiadas, como se discutió en el capítulo 1.

Estas ventajas generalmente superan la principal desventaja de la PCM: un ancho de banda mucho más ancho que el de la señal analógica correspondiente.

Muestreo, cuantización y codificación

La señal PCM se genera al realizar tres operaciones básicas: muestreo, cuantización y codificación (figura 3-7). La operación de muestreo genera una señal PAM plana.

La operación de cuantificación se ilustra en la figura 3-8 para cuando $M = 8$ niveles. Este cuantizador es *uniforme* porque todos los escalones son del mismo tamaño. □a que se están aproximando los valores de las muestras analógicas con un número finito de niveles ($M = 8$ en este caso), se introduce un *error* en la señal analógica recuperada a la salida por causa del efecto de cuantización. La forma de onda de error se ilustra en la figura 3-8c. El error de cuantización resulta de la diferencia entre la señal analógica a la entrada del muestreo y la salida del cuantizador. Note que el valor pico del error (± 1) es la mitad del tamaño de un paso del cuantizador (2). Si se muestrea a la velocidad de Nyquist ($2B$) o a una más rápida, y existe un ruido despreciable en el canal, éste seguirá presente, y se conoce como *ruido de cuantización*, en la forma de onda analógica recuperada debido a este error. El ruido de cuantización puede también considerarse como un error de redondeo. En la sección 7-7 se evalúan las estadísticas de este ruido de cuantización y se desarrolla una fórmula para la relación señal a ruido en el sistema PCM. La salida del cuantizador es una señal PAM *cuantizada*.

La señal PAM se obtiene de la PAM cuantizada al codificar dentro de cada palabra digital cada una de las muestras. El diseñador del sistema tiene la responsabilidad de especificar la palabra de codificación exacta que representará un nivel cuantizado en particular. Para un código Gray tomado de la tabla 3-1, la señal PCM resultante se muestra en la figura 3-8d, donde la palabra PCM para cada muestra cuantizada se envía al codificador antes del siguiente pulso de reloj. Se seleccionó el código Gray debido a que tiene un solo cambio de bit para cada cambio de paso en el nivel cuantizado. En consecuencia, los errores individuales en la palabra de codificación PCM recibida causarán un mínimo de errores en el nivel analógico recuperador, siempre y cuando el bit de signo no sea erróneo.

Hemos descrito a los sistemas PCM que representan a las muestras analógicas cuantizadas mediante palabras de codificación *binarias*. En general, por supuesto, es posible representar a las muestras analógicas cuantizadas mediante palabras digitales con una base distinta a la base 2 o, de forma equivalente, convirtiendo la señal binaria a una multinivel, como se discute en la sección 3-4. Las señales multinivel tienen la ventaja de poseer un ancho de banda mucho más pequeño que las binarias, pero su inconveniente es que requieren circuitos multinivel en lugar de binarios.

Circuitos prácticos de PCM

Se emplean seis técnicas para implementar la operación de codificación de un convertidor analógico a digital (ADC): la de *conteo o rampa, serial o aproximación sucesiva*, *conversión directa o rápida*, *codificación delta*, *segmentación (*en inglés, *pipeline*) y codificadores *sigma-delta*. Para una descripción de cada uno de estos métodos de codificación, visite http://en.wikipedia.org. Estas técnicas se discutirán en los siguientes párrafos.

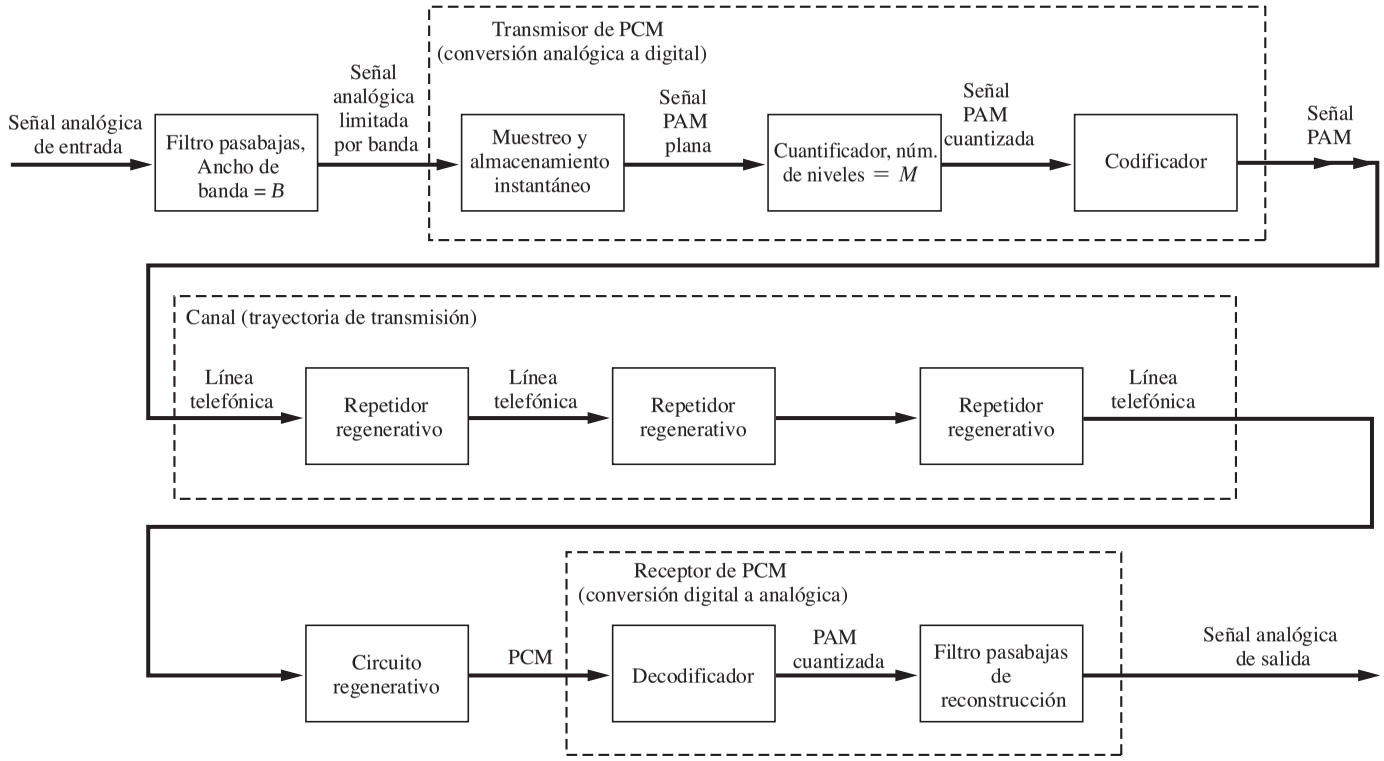
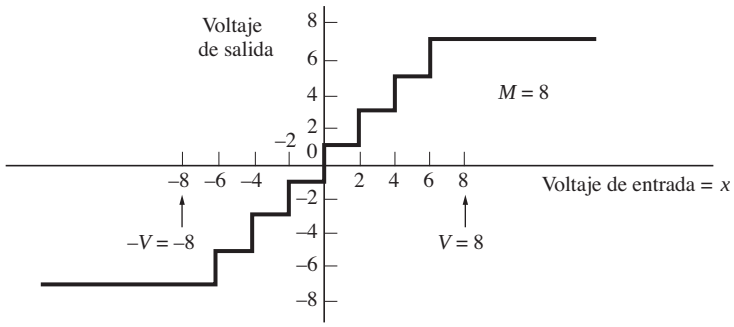
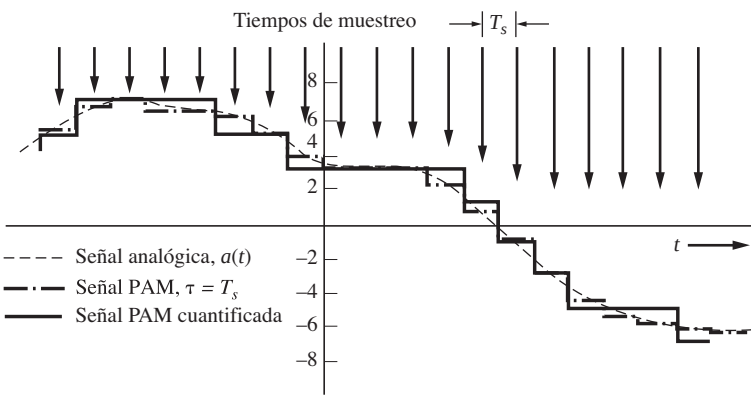


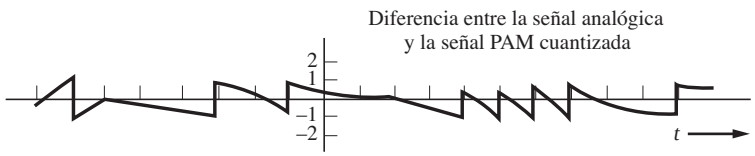
Figura 3–7 Sistema de transmisión por PCM.



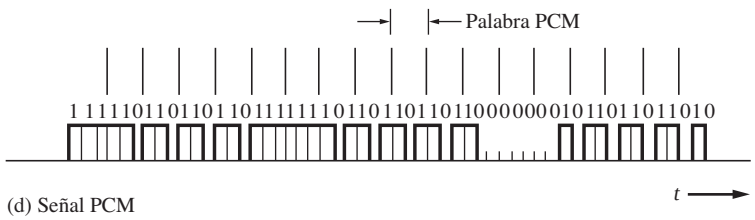
(a) Características de entrada y salida del cuantizador



(b) Señal analógica, señal PAM plana y señal PAM cuantizada



(c) Señal de error



(d) Señal PCM

Figura 3–8 Ilustración de las formas de onda en un sistema PCM.

En el codificador por conteo, al mismo tiempo en que se toma una muestra, se inicializa un generador de rampa, así como un contador binario. La salida del generador de rampa se compara continuamente a la muestra□cuando el valor de la rampa se vuelve igual al de la muestra, entonces el valor binario se lee del contador. Este conteo se considera la palabra PCM. El contador binario y

TABLA 3–1 CÓDIGO GRAY DE TRES BITS PARA $M = 8$ NIVELES

Voltaje de muestra cuantificado	Palabra en código Gray (salida PCM)	
+7	110	
+5	111	
+3	101	
+1	100	
		Imagen reflejada excepto por el bit de signo
−1	000	
−3	001	
−5	011	
−7	010	

el generador de rampa son entonces reinicializados a cero y están listos para volverse a energizar en el siguiente tiempo de muestreo. Esta técnica requiere sólo de unos cuantos componentes, pero la velocidad de este tipo de ADC está a menudo limitada por la del contador. El circuito integrado ADC Maxim ICL7106 con salida a LCD utiliza un codificador por conteo.

El codificador serial compara el valor de la muestra con valores cuantificados de prueba. Las pruebas sucesivas dependen de si las salidas anteriores del comparador son positivas o negativas. Los valores de prueba se escogen primero en escalones grandes y después en pequeños, de tal manera que el proceso convergerá rápidamente. Una serie de divisores de voltaje configurados por conmutadores (de encendido-apagado) controlados por lógica digital genera los voltajes de prueba. Después de que el proceso converge, el valor de la configuración del conmutador se lee como la palabra PCM. Esta técnica requiere de componentes de mayor precisión, para los divisores de voltaje, que los utilizados en la técnica por rampa. La velocidad de la técnica ADC de retroalimentación está determinada por la de los conmutadores. Los dispositivos AD7923 y ADC de 12 bits de Analog Devices utilizan la codificación serial.

El codificador por conversión directa o rápida utiliza un conjunto de comparadores en paralelo con niveles de referencia que son los valores cuantificados permitidos. El valor de la muestra se alimenta simultáneamente a todos los comparadores en paralelo. El nivel alto o bajo de las salidas del comparador determina la palabra PCM binaria con ayuda de cierta lógica digital. Esta es una técnica de ADC rápida pero requiere de más hardware que las otras dos. El circuito integrado Maxim MAX104 ADC de 8 bits es un ejemplo de esta técnica.

Algunos convertidores analógicos a digitales tienen una salida en paralelo (como el MAX104). En este caso, para la generación de PCM, la salida en paralelo (palabra digital) requiere convertirse a forma serial para su transmisión a través de un canal de dos hilos. Esta conversión se lleva a cabo con un circuito integrado de convertidor paralelo a serial, el cual a menudo se conoce como chip de *entrada-salida serial* (SIO, por sus siglas en inglés). El chip de SIO incluye un registro de desplazamiento que se inicializa con el contenido de los datos en paralelo, generalmente de 8 o 16 líneas de entrada. Después, la información se desplaza fuera de la última etapa del registro de desplazamiento

bit por bit hacia una sola línea de salida para producir el formato serial. Aún más, los chips de SIO son generalmente full duplex, esto es, poseen dos conjuntos de registros de desplazamiento, uno para cada dirección. Un registro de desplazamiento convierte los datos en paralelo de entrada a datos seriales de salida para su transmisión a través del canal y, simultáneamente, el otro registro de desplazamiento convierte los datos seriales recibidos de otra entrada a datos en paralelo que están disponibles en otra salida. Existe tres tipos de chips de SIO: el *receptor/transmisor asíncrono universal* (UART, por sus siglas en inglés), el *receptor/transmisor síncrono universal* (USRT, por sus siglas en inglés) y el *receptor/transmisor síncrono/asíncrono universal* (USART, por sus siglas en inglés). El UART transmite y recibe datos seriales asíncronos□el USRT síncronos y el USART combina un UART y un USRT en un solo chip. (Consulte la sección 3-9 para una discusión acerca de las líneas de datos seriales asíncronas y síncronas.) Un ejemplo de un UART es el PC16550D de National Semiconductor. Este UART proporciona una interfaz entre datos paralelos de 8 bits y los datos seriales asíncronos en el puerto serial de una PC.

En el lado del receptor, la señal PCM se decodifica de regreso a una analógica a través de un chip convertidor digital a analógico (DAC). Si el chip de DAC tiene una entrada de datos en paralelo, entonces los datos seriales PCM recibidos primero se convertirán a una forma en paralelo, utilizando un chip de SIO, como se describió anteriormente. Los datos en paralelo a continuación se convierten en una aproximación de la muestra analógica mediante el chip DAC. Esta conversión se logra generalmente utilizando una palabra digital en paralelo para inicializar la configuración de los conmutadores electrónicos de una red de divisores resistivos de corriente (o de voltaje) para producir la salida analógica. A este chip se le llama DAC *multiplicador* debido a que el voltaje de salida "analógico" es directamente proporcional al voltaje de referencia del divisor multiplicado por el valor de la palabra digital. El chip DAC de 8 bits DAC0808 de National Semiconductor es un ejemplo de esta técnica y genera muestras como salida de la señal analógica cuantificada, que es una aproximación de las muestras analógicas. Por lo tanto, conforme este chip se dispara por reloj, genera una señal PAM cuantificada que después se suaviza mediante un filtro pasabajas de reconstrucción para producir la salida analógica, como se ilustra en la figura 3-7.

Las compañías de semiconductores producen cientos de tipos de circuitos de ADC y DAC, y las hojas de datos para los IC pueden encontrarse en las páginas Web de sus fabricantes. Muchos de los IC están diseñados para su uso en aplicaciones específicas. Por ejemplo, el AD1861 de Analog Devices es un DAC de audio por PCM que genera audio analógico de los datos PCM en los discos compactos. El TP3056B de Texas Instruments es un codec de PCM para la codificación y decodificación de señales de datos PCM para aplicaciones de audio analógico de telefonía, como se muestra más adelante en el ejemplo 3-1.

Ancho de banda de señales PCM

□Cuál es el espectro de una forma de onda de datos (seriales) PCM? Para la señalización por PAM, puede obtenerse como una función del espectro de la señal analógica de entrada, ya que la señal PAM es una función lineal de la analógica. Este no es el caso para la PCM. Como se muestra en las figuras 3-7 y 3-8, la PCM es una función *no lineal* de la señal analógica de entrada. Por consecuencia, el espectro de la señal PCM no está relacionado directamente al espectro de la señal analógica de entrada, como se mostrará en las secciones 3-4 y 3-5.

El ancho de banda de formas de onda binarias (seriales) PCM depende de la velocidad de bit y el pulso de la forma de onda utilizado para representar los datos. A partir de la figura 3-8 se obtiene que la velocidad de bit es

$$R = nf_s \tag{3–14}$$

donde n es el número de bits en la palabra PCM ($M = 2^n$) y f_s es la velocidad de muestreo. Para que no exista aliasing se requiere que $f_s \geq 2B$, donde B es el ancho de banda de la señal analógica que será convertida a una señal PCM. En la sección 3-4 se observará que el teorema de dimensionalidad muestra que el ancho de banda de la forma de onda PCM codificada en binario está limitada por

$$B_{\text{PCM}} \geq \tfrac{1}{2}R = \tfrac{1}{2}nf_s \tag{3–15a}$$

el ancho de banda mínimo de $\frac{1}{2}R = \frac{1}{2}nf_s$ se obtiene sólo cuando una forma de pulso de tipo (sen x)/x se emplea para generar la forma de onda PCM. Sin embargo, generalmente se utiliza una forma de pulso de un tipo más rectangular y, por consecuencia, el ancho de banda de la forma de onda PCM codificada en binario será más grande que este mínimo. Los detalles acerca de las líneas de código y la selección de la forma de pulso se estudiarán más tarde en las secciones 3-5 y 3-6. El ancho de banda exacto obtenido dependerá de la selección hecha. Por ejemplo, en referencia a la figura 3-15, suponga que se selecciona el caso típico de una forma de pulso rectangular y se emplea una forma de onda NRZ unipolar, una NRZ polar o una RZ bipolar, como se muestra en las figuras 3-15b, 3-15c y 3-15e. Éstas son formas de ondas típicas generadas por circuitos integrados de PCM populares. Entonces, como se muestra en las figuras 3-16a, 3-16b y 3-16d, el ancho de banda nulo será el recíproco del ancho de pulso, lo cual es $1/T_b = R$ para el caso de la señalización binaria. Por lo tanto, para los pulsos rectangulares, el primer ancho de banda nulo es

$$B_{\text{PCM}} = R = nf_s \quad \text{(primer ancho de banda nulo)} \tag{3–15b}$$

La tabla 3-2 presenta una tabulación de este resultado para el caso de la mínima velocidad de muestreo, $f_s = 2B$. Note que el teorema de dimensionalidad de la ecuación (3-15a) demuestra que el ancho de banda de la señal PCM tiene un límite inferior dado por

$$B_{\text{PCM}} \geq nB \tag{3–15c}$$

donde $f_s \geq 2B$ y B es el ancho de banda de la señal analógica correspondiente. Por lo tanto, para valores razonables de n, *el ancho de banda de la señal PCM serial será significativamente más grande que el ancho de banda de la señal analógica correspondiente* que representa. Para el ejemplo mostrado en la figura 3-8 cuando $n = 3$, el ancho de banda de la señal PCM será por lo menos tres veces más ancho que el de la analógica correspondiente. Aún más, si el ancho de banda de la señal PCM está reducida debido a un filtrado inadecuado o a que la señal PCM se pasa a través de un sistema que tiene una pobre respuesta en frecuencia, entonces los pulsos filtrados se alargarán (se estirarán en referencia a su anchura), de tal manera que los pulsos que corresponden a cualesquiera de los bits se fugará a las ranuras de bit adyacentes. Si esta condición se vuelve demasiado seria causará errores en los bits detectados. El efecto de fuga del pulso de conoce como *interferencia intersimbólica* (ISI). Las especificaciones de la filtración para una señal sin ISI se discutirán en la sección 3-6.

Efectos del ruido

La señal analógica que se recupera a la salida del sistema PCM está contaminada por ruido. Existen dos efectos principales que producen este ruido o distorsión:

- Ruido de cuantización, originado por el cuantizador de M pasos en el transmisor PCM.
- Errores de bits en la señal PCM recuperada, causados por el *ruido en el canal*, así como un filtrado inadecuado del canal, lo cual ocasiona ISI.

TABLA 3–2 RENDIMIENTO DE UN SISTEMA PCM CON CUANTIZACIÓN UNIFORME Y SIN RUIDO EN EL CANAL.

Número de niveles utilizados en el cuantificador, M	Longitud de la palabra PCM, n (bits)	Ancho de banda de la señal PCM (primer ancho de banda nulo)[a]	Relaciones de potencia de la señal analógica recuperada a potencia del ruido de cuantización (dB)	
			$(S/N)_{\text{pk salida}}$	$(S/N)_{\text{salida}}$
2	1	2B	10.8	6.0
4	2	4B	16.8	12.0
8	3	6B	22.8	18.1
16	4	8B	28.9	24.1
32	5	10B	34.9	30.1
64	6	12B	40.9	36.1
128	7	14B	46.9	42.1
256	8	16B	52.9	48.2
512	9	18B	59.0	54.2
1,024	10	20B	65.0	60.2
2,048	11	22B	71.0	66.2
4,096	12	24B	77.0	72.2
8,192	13	26B	83.0	78.3
16,384	14	28B	89.1	84.3
32,768	15	30B	95.1	90.3
65,536	16	32B	101.1	96.3

[a] B es el ancho de banda absoluto de la señal analógica de entrada.

Además de esto, como se muestra en las secciones 2-7 y 3-2, la señal analógica de entrada requiere estar lo suficientemente limitada por banda, con un filtro pasabajas con antialiasing y debe muestrearse lo suficientemente rápido, de tal manera que el ruido de aliasing en la señal analógica recuperada sea despreciable.

Como se mostrará en el capítulo 7, bajo ciertas consideraciones, la relación de la potencia *pico* de la señal analógica recuperada a la potencia *promedio* total de ruido está dada por[2]

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk salida}} = \frac{3M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e} \tag{3–16a}$$

y la relación de la potencia *promedio* de la señal a la potencia promedio de ruido es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \frac{M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e} \tag{3–16b}$$

donde M es el número de niveles cuantizados utilizados en el sistema PCM y P_e es la probabilidad de error de bit en la señal PCM binaria recuperada en el receptor DAC antes de su conversión

[2] Esta derivación se pospone hasta el capítulo 7, ya que requiere conocimientos estadísticos para llevarla a cabo.

de regreso a una señal analógica. En el capítulo 7, P_e se evalúa para muchos tipos diferentes de sistemas digitales de transmisión. En el capítulo 1 se mostró cómo puede utilizarse la codificación de canal para corregir algunos de los errores de bit y, por consecuencia, reducir P_e. Por lo tanto, en muchos sistemas prácticos, la P_e es despreciable. Si se hace la suposición de que no existen errores de bit como resultado del ruido en el canal (es decir, que $P_e = 0$) y no hay ISI presente, entonces, de la ecuación (3-16a), la SNR pico resultante sólo a partir de los errores de cuantización es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk salida}} = 3M^2 \tag{3–17a}$$

y de la ecuación (3-16b), la SNR promedio debida sólo a los errores de cuantización es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = M^2 \tag{3–17b}$$

La tabla 3-2 presenta los valores numéricos para estas SNR.

Para lograr estas SNR, una consideración crítica es que el nivel pico a pico de la forma de onda analógica a la entrada del codificador PCM está fijo al nivel de diseño del cuantizador. Por ejemplo, considerando la figura 3-8a, esto corresponde a que la entrada se encuentre en el rango de $-V$ a $+V$ volts, donde $V = 8$ volts es el nivel de diseño del cuantificador. Se derivaron las ecuaciones (3-16) y (3-17) para las formas de onda con valores igualmente probables, como la forma de onda triangular, que poseen un valor pico a pico de $2V$ y un RMS de $V/\sqrt{3}$, donde V es el nivel pico de diseño del cuantificador.

Prácticamente, el ruido de cuantización a la salida del decodificador PCM puede clasificarse en cuatro tipos, dependiendo de las condiciones de operación. Los cuatro tipos de ruido son: de sobrecarga, aleatorio, granular y de búsqueda. Como se discutió anteriormente, el nivel de la forma de onda analógica a la entrada del codificador PCM debe establecerse de tal manera que el nivel pico no exceda al valor pico de diseño de V volts. Si la entrada pico no excede V, entonces la forma de onda analógica recuperada a la salida del sistema PCM presentará cimas planas cerca de los valores picos. Esto produce *ruido de sobrecarga*. Las cimas planas pueden verse fácilmente en un osciloscopio y la forma de onda analógica recuperada se escucha distorsionada, ya que la característica plana produce componentes indeseados de armónicas.

El segundo tipo de ruido, el *aleatorio*, se produce por un número aleatorio de errores de cuantificación en el sistema PCM bajo condiciones normales de operación cuando el nivel de entrada está configurado adecuadamente. Este tipo de condición se asume en la ecuación (3-17). El ruido aleatorio posee un sonido "blanco" silbante. Si el nivel de la entrada no es lo suficientemente grande, la SNR se deteriorará de aquella dada por la ecuación (3-17) a una que se describirá más tarde por las ecuaciones (3-28a) y (3-28b). Sin embargo, el ruido de cuantización seguirá siendo casi aleatorio.

Si el nivel de la entrada se reduce aún más a un valor relativamente pequeño con respecto al nivel de diseño, entonces los valores de error no son igualmente probables de muestra a muestra y el ruido tiene un sonido áspero que se asemeja a grava vertiéndose en un barril. Esto se conoce como *ruido granular* y puede hacerse aleatorio (es decir, la potencia de ruido puede disminuirse) al incrementar el número de niveles de cuantización y, en consecuencia, la velocidad de bit PCM. Como alternativa, el ruido granular puede reducirse mediante un cuantizador no uniforme, como los cuantizadores μ-law o A-law, que se describirán en la siguiente sección.

El cuarto tipo de ruido de cuantización que puede ocurrir a la salida de un sistema PCM es el *buscador*. Éste puede presentarse cuando la forma de onda analógica de entrada es casi constante,

incluso cuando la señal no existe (es decir, el nivel cero). Bajo estas condiciones, las muestras a la salida del cuantificador (consulte la figura 3-8) pueden oscilar entre dos niveles de cuantización adyacentes, causando un tono de tipo senoidal indeseado de frecuencia $\frac{1}{2}f_s$ a la salida del sistema PCM. El ruido de búsqueda puede reducirse si se filtra este tono o si se diseña el cuantizador de tal manera que no exista un paso vertical en el valor "constante" de las entradas, como por ejemplo en cero volts de entrada para el caso donde no exista una señal. En ese caso, el ruido de búsqueda también se conoce como *ruido en un canal en reposo*. Esta clase puede reducirse usando un paso horizontal en el origen de la característica de salida-entrada del cuantificador en lugar de un paso vertical, como se muestra en la figura 3-8a.

Recordando que $M = 2^n$, las ecuaciones (3-17a) y (3-17b) pueden expresarse en decibeles como

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 6.02n + \alpha \tag{3–18}$$

donde n es el número de bits en la palabra PCM, $\alpha = 3.77$ para la SNR pico y $\alpha = 0$ para la SNR promedio. Esta ecuación, llamada la *regla de 6 dB*, enfatiza la característica significativa de rendimiento para la PCM: *una mejora adicional de 6 dB en la SNR se obtiene para cada bit añadido a la palabra PCM*. La relación se ilustra en la tabla 3-2. La ecuación (3-18) es válida para una amplia variedad de consideraciones, tales como varios tipos de formas de onda de entrada y características de cuantización, aunque el valor de α dependerá de dichas consideraciones [Clayant y Noll, 1984]. Se asume que no existen errores de bit y que el nivel de la señal de entrada es lo suficientemente grande para abarcar un número significativo de niveles de cuantización.

Ejemplo 3–1 DISEÑO DE UNA SEÑAL PCM PARA SISTEMAS TELEFÓNICOS

Suponga que una señal telefónica analógica de audio de frecuencia de voz (VF) ocupa una banda de 300 a 3,400 Hz. La señal deberá convertirse a una señal PCM para su transmisión a través de un sistema telefónico digital. La mínima frecuencia de muestreo es $2 \times 3.4 = 6.8$ kmuestras/segundo. Para permitir el uso de un filtro pasabajas antialiasing de bajo costo con una banda de transición razonable, la señal VF se sobremuestrea con una frecuencia de muestreo de 8 kmuestras/segundo. Este es el estándar adoptado por la industria telefónica de los Estados Unidos. Suponga que cada muestra está representada por 8 bits entonces la velocidad de bit de la señal PCM binaria es

$$\begin{aligned} R &= (f_s \text{ muestras/s})\,(n \text{ bits/muestra}) \\ &= (8\text{k muestras/s})\,(8 \text{ bits/muestra}) = 64 \text{ kbits/s} \end{aligned} \tag{3–19}$$

Esta señal de 64 kbit/s se llama *DS-0* (señal digital, tipo cero).

Refiriéndose al teorema de dimensionalidad, ecuación (3-15a), se sabe que el mínimo ancho de banda absoluto de esta señal PCM binaria es

$$(B)_{\text{mín}} = \tfrac{1}{2}R = 32 \text{ kHz} \tag{3–20}$$

Este ancho de banda se logra cuando se emplea una forma de pulso de tipo (sen x)/x para generar la forma de onda PCM. Si se utilizan pulsos rectangulares, entonces al ancho de banda absoluto es infinito y a partir de la ecuación (3-15b) se obtiene que el primer ancho de banda nulo es

$$B_{\text{PCM}} = R = 64 \text{ kHz} \tag{3–21}$$

Es decir que se requiere un ancho de banda de 64 kHz para transmitir esa señal digital PCM de voz, donde el ancho de banda de la señal analógica de voz original era de, cuando mucho, 4 kHz. (En la sección 3-5 se verá que el ancho de banda de esta señal PCM binaria puede reducirse un poco mediante filtración sin introducir ISI.) Utilizando la ecuación (3-17a) se observa que la relación potencia pico de señal a ruido de cuantificación es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk salida}} = 3(2^8)^2 = 52.9 \text{ dB} \tag{3–22}$$

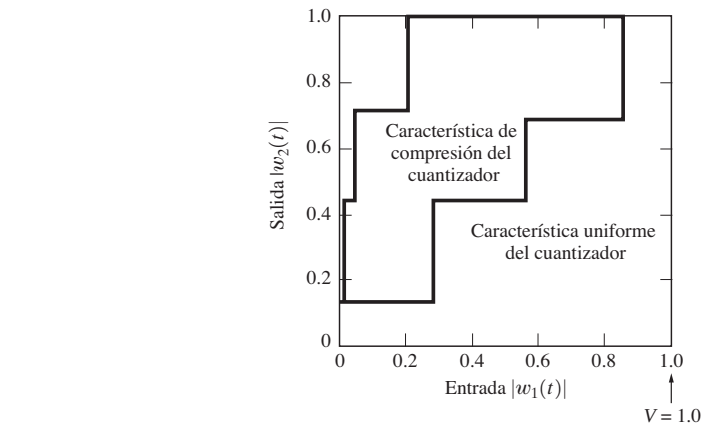
donde $M = 2^8$. Note que la inclusión de un bit de paridad no afecta al ruido de cuantificación. Sin embargo, la codificación (con bits de paridad) puede emplearse para disminuir el número de errores decodificados causados por el ruido en el canal o por ISI. En el ejemplo, estos efectos se consideran despreciables, ya que se asumió una P_e de cero.

El rendimiento de un sistema PCM para el caso más optimista (es decir, cuando $P_e = 0$) puede obtenerse fácilmente como una función de M, el número de pasos de cuantización utilizados. Los resultados se muestran en la tabla 3-2. No se utilizaron bits de paridad en la palabra PCM para obtener la SNR.

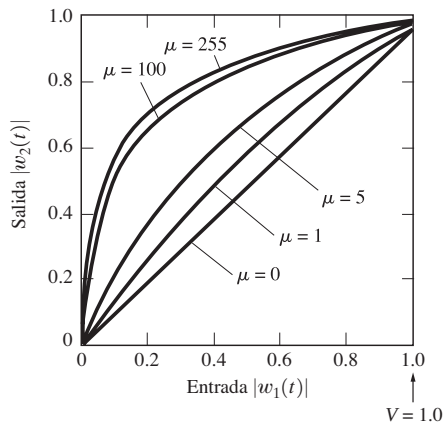
Esta tabla puede utilizarse para obtener los requisitos de diseño en un sistema PCM propuesto. Por ejemplo, los interesados en la alta fidelidad están enfocándose en técnicas digitales de reproducción de audio, en donde señales PCM, en lugar de analógicas de audio, se graban para generar una reproducción excelente de audio. Se requieren palabras PCM de por lo menos 15 bits para obtener un rango dinámico de 90 dB. Aún más, si la señal analógica tuviera un ancho de banda de 20 kHz, entonces el primer ancho de banda nulo para una PCM de bit de forma rectangular sería de $2 \times 20 \text{ kHz} \times 15 = 600 \text{ kHz}$. Si se permite cierto sobremuestreo y un ancho de banda más ancho para minimizar la ISI, entonces el ancho de banda requerido sería de alrededor de 1.5 MHz. Por consiguiente, las grabadoras en cinta de video necesitan grabar y reproducir señales digitales de audio de alta calidad. Aunque esta técnica de grabación parece ridícula a primera vista, los dispositivos de grabación analógicos de alta calidad y alto costo tienen problemas para reproducir un rango dinámico de 70 dB. Por lo tanto, el audio digital es una de las formas de mejorar el rendimiento, hecho probado en el mercado con la popularidad del disco compacto digital (CD). El CD utiliza una palabra PCM de 16 bits y una velocidad de muestreo de 44.1 kHz en cada canal estéreo [Miyaoka, 1984□Peek, 1985]. La codificación Reed-Solomon con entrelazado se emplea para corregir errores de ráfaga que ocurren como resultado del rayado o de huellas digitales en el disco compacto.

Cuantificación no uniforme: compresión y modulación μ-Law y A-law

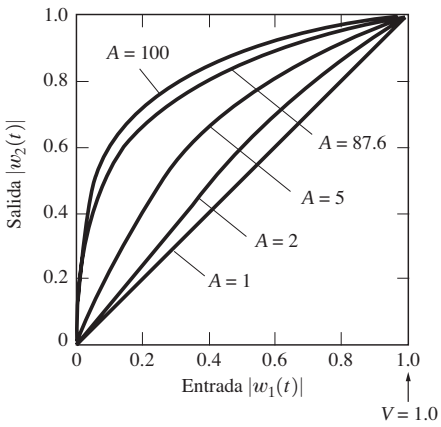
Las señales analógicas de voz tienen más probabilidad de contener valores de amplitud cercanos a cero que a los extremos de los valores picos permitidos. Por ejemplo, en la digitalización de señales de voz, si el valor pico permitido es de 1 V, los tonos débiles pueden poseer niveles de voltaje del orden de 0.1 V (20 dB más abajo). Para señales como ésta, con una distribución de amplitud no uniforme, el ruido de cuantificación granular será un grave problema si el tamaño del paso no se reduce para valores de amplitud cercanos a cero y se aumenta para valores extremadamente grandes. Esta técnica se conoce como *cuantización no uniforme*, ya que se emplea un tamaño variable de pasos. Un ejemplo de una característica de cuantización no uniforme se muestra en la figura 3-9a.



(a) Característica del cuantizador $M = 8$



(b) Característica de μ-law



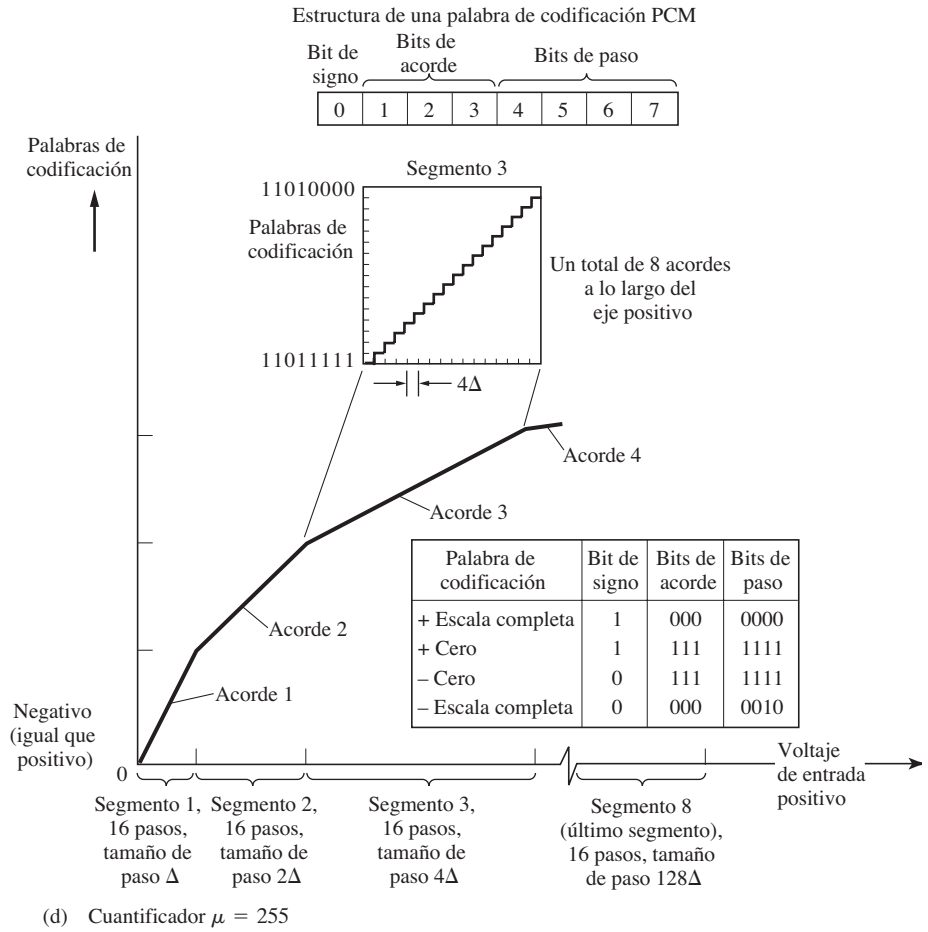
(c) Característica de A-law

Figura 3–9 Características de compresión (se muestra el primer cuadrante).

El efecto de la cuantización no uniforme puede obtenerse si primero se pasa la señal analógica a través de un amplificador de compresión (no lineal) y después a un circuito PCM que utiliza un cuantizador uniforme. En Estados Unidos, se utiliza el tipo μ-law de una característica de *compresión*, la cual está definida [Smith, 1957] por

$$|w_2(t)| = \frac{\ln(1 + \mu\,|\,w_1(t)\,|)}{\ln(1 + \mu)} \tag{3–23}$$

donde los valores pico permitidos de $w_1(t)$ son de ± 1 (es decir, $|w_1(t)| \leq 1$), μ es una constante positiva que es un parámetro y ln denota el logaritmo natural. Esta característica de compresión se muestra en la figura 3-9b para varios valores de μ y debe notarse que $\mu = 0$ corresponde a la amplificación lineal (cuantificación uniforme total). En Estados Unidos, Canadá y Japón, las compañías telefónicas utilizan una característica de compresión de $\mu = 255$ en sus sistemas PCM [Dammann, McDaniel y Maddox, 1972].


Estructura de una palabra de codificación PCM
Bit de signo
Bits de acorde
Bits de paso
0 1 2 3 4 5 6 7
Palabras de codificación
Segmento 3
11010000
Palabras de codificación
11011111
Un total de 8 acordes a lo largo del eje positivo
4Δ
Acorde 4
Acorde 3
Acorde 2
Acorde 1
Negativo (igual que positivo)
0
Voltaje de entrada positivo
Segmento 1, 16 pasos, tamaño de paso Δ
Segmento 2, 16 pasos, tamaño de paso 2Δ
Segmento 3, 16 pasos, tamaño de paso 4Δ
Segmento 8 (último segmento), 16 pasos, tamaño de paso 128Δ

Palabra de codificación	Bit de signo	Bits de acorde	Bits de paso
+ Escala completa	1	000	0000
+ Cero	1	111	1111
– Cero	0	111	1111
– Escala completa	0	000	0010

(d) Cuantificador $\mu = 255$

Figura 3–9 Continuación

En la práctica, las características suaves no lineales de la figura 3-9b se aproximan mediante acordes lineales compuestos de piezas, como se muestra en la figura 3-9d para la característica $\mu = 255$ [Dammann, McDaniel y Maddox, 1972]. Cada acorde se aproxima mediante un cuantizador uniforme con 16 pasos y un tamaño de paso de entrada que está establecido por cada número de segmento en particular. Esto es, 16 pasos, incluyendo un paso de anchura media a cada lado de cero, de un ancho Δ se utilizan para el segmento 1, 16 pasos de un ancho de 2Δ se utilizan para el 2, 16 pasos de un ancho de 4Δ para el segmento tres, etcétera. El valor de Δ se selecciona de tal manera que el valor de escala completa, el último paso del segmento 8 corresponde al valor pico de la señal analógica de entrada. Esta técnica de segmentación ha sido aceptada mundialmente para la característica $\mu = 255$. Como se muestra en la figura 3-9d, la palabra codificación PCM de 8 bits consiste en un bit de signo que denota un voltaje de entrada positivo o negativo, tres bits de acorde que indican el número de segmento y cuatro bits de paso que significan el paso en particular dentro del segmento. (Para mayor detalle, consulte la hoja de datos para la serie Freescale

MC145500 de codecs PCM disponible en el sitio Web de Freescale Semiconductor, http://www.freescale.com).

Otra de las leyes de compresión, utilizada principalmente en Europa, es la característica *A*-law, definida [Cattermole, 1969] por

$$|w_2(t)| = \begin{cases} \dfrac{A|w_1(t)|}{1 + \ln A}, & 0 \le |w_1(t)| \le \dfrac{1}{A} \\ \dfrac{1 + \ln(A|w_1(t)|)}{1 + \ln A}, & \dfrac{1}{A} \le |w_1(t)| \le 1 \end{cases} \tag{3–24}$$

donde $|w_1(t)| \le 1$ y A es una constante positiva. La característica *A*-law de compresión se muestra en la figura 3-9c. El valor más típico para A es de 87.6.

En la práctica, la característica *A*-law está implementada mediante una técnica de segmentación parecida a la que se muestra en la figura 3-9d a excepción de que, para el segmento 1, existen 16 pasos con un ancho de Δ para el 2, 16 pasos con un ancho de Δ para el segmento 3, 16 pasos con un ancho de 2Δ para el 4, 16 pasos con un ancho de 4Δ etc. (Consulte la hoja de datos para el Freescale MC145500 para mayor detalle.)

Cuando se emplea compresión en el transmisor también debe utilizarse la *expansión* (es decir, descompresión) a la salida del receptor para restaurar los niveles de señal a sus valores relativos correctos. Esta característica de *expansor* es el inverso de la característica de compresión, y la combinación de un compresor y un expansor se conoce como *compansor*.

De nuevo, puede mostrarse que la SNR de salida sigue la ley de 6 dB [Couch, 1993]

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 6.02n + \alpha \tag{3–25}$$

donde

$$\alpha = 4.77 - 20 \log (V/x_{\text{rms}}) \qquad \text{(cuantificación uniforme)} \tag{3–26a}$$

o para niveles de entrada lo suficientemente grandes

$$\alpha \approx 4.77 - 20 \log [\ln (1 + \mu)] \qquad \text{(compresión y expansión } \mu\text{-law)} \tag{3–26b}$$

o [Jayant y Noll, 1984]

$$\alpha \approx 4.77 - 20 \log [1 + \ln A] \qquad \text{(compresión y expansión } A\text{-law)} \tag{3–26c}$$

y n es el número de bits utilizados en la palabra PCM. Además de esto, V es el nivel pico de diseño del cuantificador y x_{rms} es el valor RMS de la señal analógica de entrada. Note que la SNR de salida es una función del nivel de entrada para el caso de una cuantización uniforme (sin compresión ni expansión) pero es relativamente insensible al nivel de entrada para una compresión y expansión μ-law o *A*-law, como se muestra en la figura 3-10. La relación V/x_{rms} se conoce como *factor de carga*. El nivel de entrada a menudo se establece para un factor de carga de 4, lo cual equivale a 12 dB, para asegurar que el ruido de cuantización de sobrecarga será despreciable. En la práctica, esto resulta en una $\alpha = -7.3$ para el caso de una codificación uniforme en comparación al caso de $\alpha = 0$ que se obtuvo para las condiciones asociadas ideales con la ecuación (3-17b). Todos estos resultados causan un incremento de 6 dB en la relación señal a ruido de cuantización para cada bit añadido a la palabra de codificación PCM.

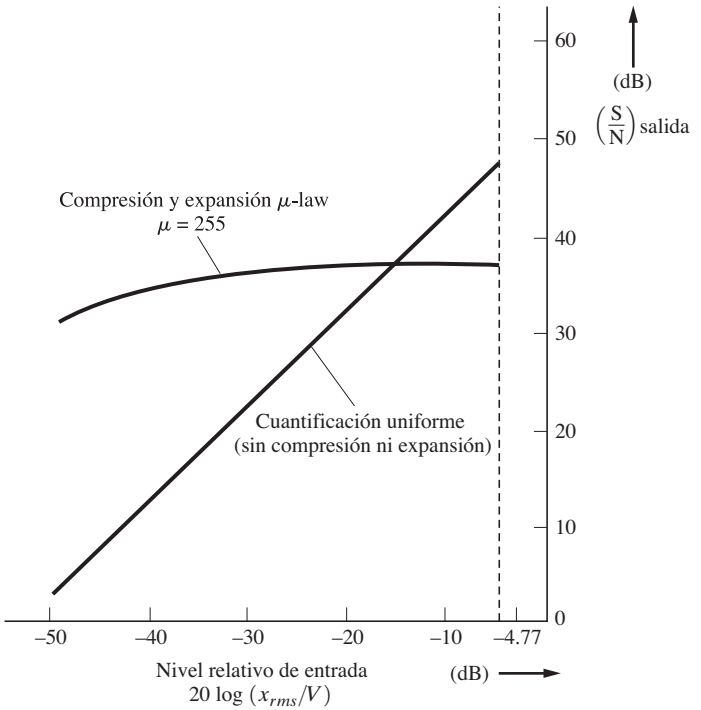


Figura 3–10 SNR de salida de los sistemas PCM de 8 bits con y sin compresión y expansión.

Módem V.90 de PCM a 56 kb/s para computadora

El módem V.90 para computadoras personales (PC) transmite datos a 56 kb/s desde una PC a través de una señal analógica en una línea telefónica de marcación. Esta señal analógica se "precuantiza" a los niveles de pasos del cuantizador PCM μ-law, como se muestra a lo largo del eje horizontal de la figura 3-9d. El reloj del módem para la PC está sincronizado al reloj PCM de 8 kmuestras/segundo de la compañía telefónica (TELCO) y, efectivamente, 7 bits de la palabra PCM de 8 bits son utilizados.[3] Por tanto, se obtiene una velocidad de datos de 56 kb/s cuando los datos digitales en la TELCO son palabras PCM, como se muestra en la figura 3-9d.

Esta técnica de módems de 56 kb/s funcionará si la TELCO tiene sólo enlaces digitales (es decir, no convierte los datos de regreso a analógico) dentro de la planta telefónica y si el recipiente está conectado a la TELCO a través de un enlace digital (por ejemplo, una línea T1, como se discute en la sección 3-9), ya que la señal de entrenamiento se envía por el recipiente a través de la tarjeta de línea PCM de la TELCO. Esta señal de entrenamiento se utiliza para adaptar el módem V.90 a la tarjeta de línea y a las características de la línea. Los proveedores de servicio de Internet (ISP, por sus siglas en inglés) están generalmente conectados a la TELCO mediante enlaces digitales. Por lo tanto, un módem PCM para la PC puede conectarse a un ISP a 56 kb/s, pero el módem PCM no puede conectarse a otro módem PCM que está enlazado con la TELCO a través de una línea analógica.

[3] En una cuantificación □law cercana al nivel de entrada de cero volts los pasos están tan próximos uno al otro que cualquier ruido en la línea telefónica a menudo previene la recuperación de la palabra codificación PCM correcta. Por lo tanto, algunos de estos pasos (es decir, palabras de codificación) no son utilizadas por el módem V.90.

Sin embargo, el módem V.90 puede conectarse a otro módem a una velocidad de datos más baja si se cambia a un modo sin PCM, como el V.34, QAM, 28.8 kb/segundo.

En todos los casos, el ruido en la línea telefónica analógica debe ser lo suficientemente pequeño para que el módem pueda transmitir datos sin errores. A partir de la fórmula para la capacidad del canal de Shannon, ecuación (1-10), la S/N de la línea telefónica debe ser de por lo menos 51.1 dB para soportar una velocidad de datos de 56 kb/s, asumiendo que los circuitos de filtrado de la TELCO limitan el ancho de banda útil de la línea telefónica a 3,300 Hz. Si la S/N no es tan grande como esto, entonces el módem utilizará una velocidad más lenta, como 33.3 kb/s, 28.8 kb/s o 24 kb/s, donde la S/N es suficiente para soportar la velocidad más baja de transmisión de datos sin errores. Algunas medidas han mostrado que por lo menos 24 kb/s pueden ser soportados por prácticamente todas las líneas en Estados Unidos [Forney, Brown, *et al*. 1996].

3–4 SEÑALIZACIÓN DIGITAL

En esta sección se responderá a las siguientes dos preguntas: ¿cómo se representa matemáticamente una forma de onda para una señal digital, como la PCM de la figura 3-8d? y ¿cómo se obtiene una estimación del ancho de banda de la forma de onda?

Las formas de onda de voltaje (o de corriente) para las señales digitales pueden expresarse como una serie ortogonal con un número finito de términos N. Es decir, la forma de onda puede escribirse como

$$w(t) = \sum_{k=1}^{N} w_k \varphi_k(t), \qquad 0 < t < T_0 \tag{3–27}$$

donde w_k representa los datos digitales y $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, son un número N de funciones ortogonales que le dan la forma a la onda. (Esto se ilustrará mediante los ejemplos que siguen en las secciones tituladas Formas de onda binarias y Formas de onda multinivel.) N es el número de dimensiones requeridas para describir la forma de onda. El término *dimensión* proviene de la interpretación geométrica, como se describe en la siguiente sección sobre representación vectorial. La forma de onda $w(t)$, como está dada por la ecuación (3-27) para representar una palabra PCM o cualquier mensaje del mensaje M de la fuente digital, tiene asignado un conjunto único de datos digitales $\{w_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, para representar dicho mensaje. Por ejemplo, para una fuente binaria que consiste en un teclado ASCII de computadora, la letra X tiene asignada la palabra de codificación 0001101. (Consulte la tabla C-2 en el apéndice C.) En este caso, $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, $w_3 = 0$, $w_4 = 1$, $w_5 = 1$, $w_6 = 0$, $w_7 = 1$ y $N = 7$. Este mensaje (es decir, la letra X) se envía sobre un intervalo de tiempo de T_0 segundos, y el voltaje (o forma de onda de corriente), que representa al mensaje, abarcará un tiempo de T_0 segundos, como se describe en la ecuación (3-27). La velocidad de datos puede calcularse empleando las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN. La *velocidad en bauds* (*velocidad de símbolo*) es[4]

$$D = N/T_0 \text{ símbolos/s} \tag{3–28}$$

donde N es el número de dimensiones utilizadas en T_0 s.

[4] En la literatura técnica a menudo se emplea el término *velocidad en bauds* en lugar de sólo *baud*, aunque velocidad en bauds es un nombre equivocado, ya que el concepto *baud*, por definición, es la velocidad de símbolo (símbolos/segundo).

DEFINICIÓN. La *velocidad de bit* es

$$R = n/T_0 \text{ bits/s} \tag{3–29}$$

donde n es el número de bits de datos enviados en T_0 s.

Para el caso donde los términos w_k tienen valores binarios, resulta que $n = N$ y $w(t)$ es una *señal binaria*. Cuando los términos w_k tienen asignados más de dos valores posibles (es decir, cuando no son binarios), entonces se dice que $w(t)$ es una *señal multinivel*. Estos dos tipos de señalización se discuten en secciones separadas más adelante.

Una cuestión crítica es que si la forma de onda de la ecuación (3-27) se transmite a través de un canal y aparece a la entrada del receptor, ¿cómo puede construirse un receptor que pueda detectar los datos? Debido a que $w(t)$ es una serie ortogonal, la manera formal de detectar la información es que el receptor evalúe el coeficiente de la serie ortogonal. Es decir, utilizando la ecuación (2-84), se obtiene que

$$w_k = \frac{1}{K_k} \int_0^{T_0} w(t)\varphi_k^*(t)\,dt,\ k = 1, 2, \ldots N \tag{3–30}$$

donde $w(t)$ es la forma de onda a la entrada del receptor y $\varphi_k(t)$ es la función ortogonal conocida que se utilizó para generar la forma de onda. También puede mostrarse que la ecuación (3-30) es la manera óptima para detectar datos cuando la señal recibida está distorsionada debido al ruido blanco aditivo. Este procedimiento se conoce como detección de *filtro acoplado* utilizando procesamiento de correlación y se describe en la sección 6-8. La detección de información se ilustra en los ejemplos 3-3 y 3-4.

Representación vectorial

La representación del espacio de la función ortogonal de la ecuación (3-27) corresponde al espacio ortogonal vectorial representado por

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{N} w_j \varphi_j \tag{3–31a}$$

donde el tipo de letra en negritas denota una representación vectorial de la forma de onda de la ecuación (3-27), $\mathbf{w}$ es un vector de N dimensiones en el espacio vectorial euclidiano y $\{\varphi_j\}$ es un conjunto ortogonal de vectores de N dimensiones que se convierte en un conjunto de vectores unitarios si los términos K_j de la ecuación (2-78) son todos unitarios. Una nomenclatura abreviada para el vector $\mathbf{w}$ de la ecuación (3-52a) está dada por un vector renglón:

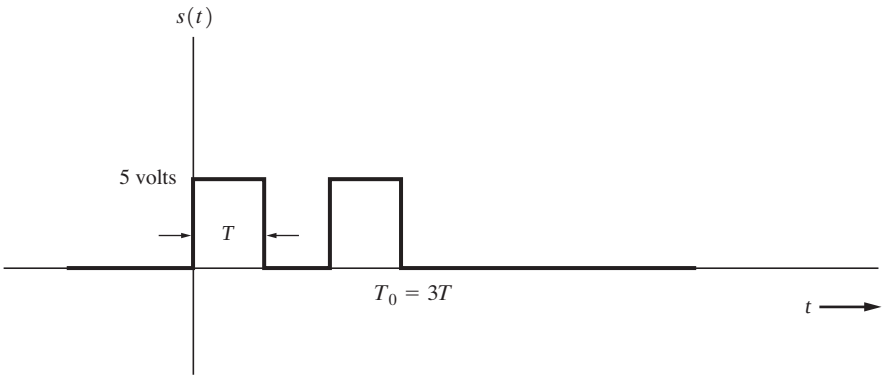
$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, \ldots, w_N) \tag{3–31b}$$

Ejemplo 3–2 REPRESENTACIÓN VECTORIAL DE UNA SEÑAL BINARIA

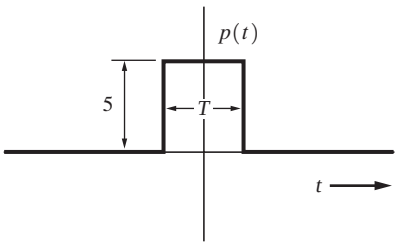
Examine la representación de la forma de onda de una señal (binaria) de 3 bits mostrada en la figura 3-11a. Esta señal podría representarse directamente por

$$s(t) = \sum_{j=1}^{N=3} d_j p[t - (j - \tfrac{1}{2})T] = \sum_{j=1}^{N=3} d_j p_j(t)$$

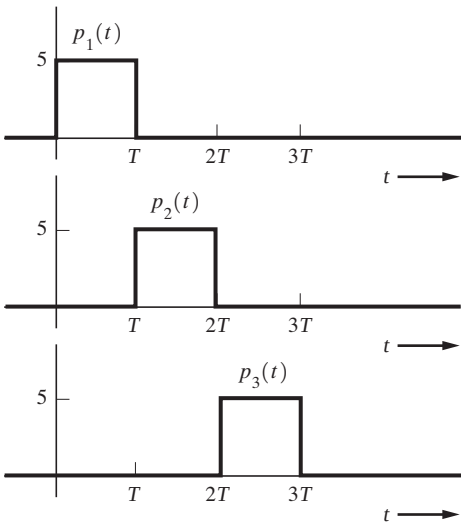
donde $p(t)$ se muestra en la figura 3-11b y $p_j(t) \triangleq p[t - (j - \frac{1}{2})T]$.



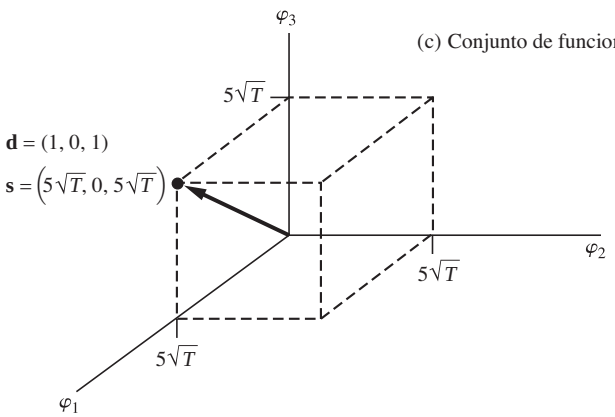
(a) Una forma de onda de señal de tres bits



(b) Forma de pulso de bit



(c) Conjunto de funciones ortogonales



(d) Representación vectorial de la señal de 3 bits

Figura 3–11 Representación para una señal digital binaria de 3 bits.

El conjunto $\{p_j(t)\}$ es de funciones ortogonales que no están normalizadas. El vector

$$\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3) = (1,0,1)$$

es la palabra binaria donde el valor 1 representa al 1 binario y el 0 representa al 0 binario. La función $p(t)$ es la forma de pulso para cada bit.

Empleando funciones ortogonales se puede representar a la forma de onda por

$$s(t) = \sum_{j=1}^{N=3} s_j \varphi_j(t)$$

Sea $\{\varphi_j(t)\}$ el conjunto correspondiente de funciones *ortonormales*. Entonces, utilizando la ecuación (2-78) resulta en

$$\varphi_j(t) = \frac{p_j(t)}{\sqrt{K_j}} = \frac{p_j(t)}{\sqrt{\int_0^{T_0} p_j^2(t)\ dt}} = \frac{p_j(t)}{\sqrt{25T}}$$

o

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{T}}, & (j-1)T < t < jT \\ 0, & t \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde $j = 1$, 2 o 3. Utilizando la ecuación (2-84), donde $a = 0$ y $b = 3T$, se encuentra que los coeficientes de la serie ortonormal para la señal digital mostrada en la figura 3-11a son

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) = (5\sqrt{T},\ 0,\ 5\sqrt{T})$$

La representación vectorial para $s(t)$ se muestra en la figura 3-11d. Note que para este caso de $N = 3$ dimensiones con señalización binaria, sólo pueden representarse $2^3 = 8$ mensajes diferentes. Cada mensaje corresponde a un vector que termina en el vértice de un cubo.

Estimación de ancho de banda

El límite inferior para el ancho de banda de la forma de onda que representa a la señal digital, la ecuación (3-27), puede obtenerse a partir del teorema de dimensionalidad. Por lo tanto, de las ecuaciones (2-174) y (3-28), el ancho de banda de la forma de onda $w(t)$ es

$$B \geq \frac{N}{2T_0} = \frac{1}{2}D \text{ Hz} \tag{3–32}$$

Si los términos $\varphi_k(t)$ son del tipo sen $(x)/x$, entonces se alcanza el límite inferior del ancho de banda absoluto de $N/(2T_0) = D/2$ de otra manera (es decir, para otras formas de pulso), el ancho de banda será mayor a este límite inferior. La ecuación (3-32) es útil para predecir el ancho de banda de señales digitales, especialmente cuando el ancho de banda exacto de la señal es difícil, o imposible, de calcular. Esto se ilustra en los ejemplos 3-3 y 3-4.

Señalización binaria

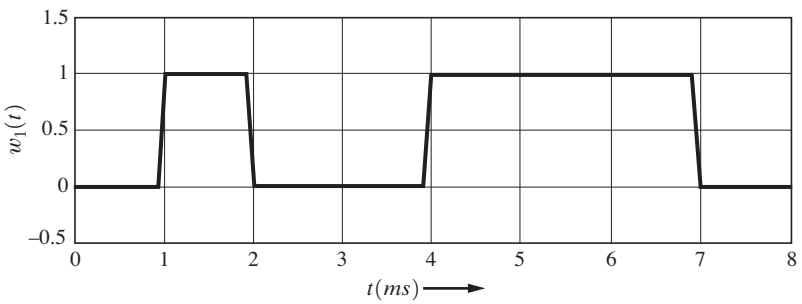
Una forma de onda que representa una señal binaria puede describirse mediante la serie ortogonal de N dimensiones de la ecuación (3-27), donde los coeficientes de la serie ortogonal, w_k, toman valores binarios. El siguiente ejemplo ilustra con mayor detalle aspectos de la señalización binaria, incluyendo su forma de onda, ancho de banda de la misma y la velocidad de los datos.

Ejemplo 3–3 SEÑALIZACIÓN BINARIA

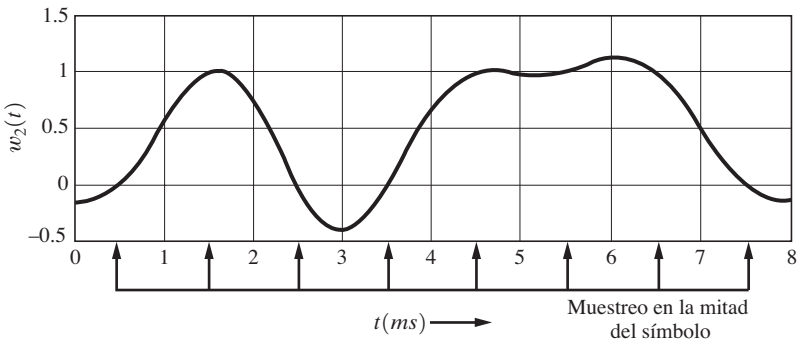
Examinemos algunas propiedades de la *señalización binaria* de una fuente digital que puede producir $M = 256$ mensajes distintos. Cada mensaje puede representarse mediante palabras binarias de 8 bits ya que $M = 2^n = 2^8 = 256$. Suponga que se lleva un tiempo de $T_0 = 8$ ms para transmitir un mensaje y que un mensaje en particular que corresponde a la palabra de codificación 01001110 será transmitido. Entonces,

$$w_1 = 0,\ w_2 = 1,\ w_3 = 0,\ w_4 = 0,\ w_5 = 1,\ w_6 = 1,\ w_7 = 1,\ \text{y}\ w_8 = 0$$

CASO 1. FUNCIONES ORTOGONALES PARA UN PULSO RECTANGULAR Suponga que las funciones ortogonales $\varphi_k(t)$ están dadas por pulsos rectangulares de amplitud unitaria que tienen un ancho de $T_b = T_0/n = 8/8 = 1$ ms, donde T_b es el tiempo que se tarda en enviar 1 bit de datos. Entonces, con el uso de la ecuación (3-27) y MATLAB, la forma de onda resultante transmitida está dada por la figura 3-12a.



(a) Forma de pulso rectangular, $T_b = 1\ ms$



(b) Forma de pulso de $\text{sen}(x)/x$, $T_b = 1\ ms$

Figura 3–12 Señalización binaria (calculada).

Los datos pueden detectarse en el receptor si se evalúan los coeficientes de la serie ortogonal como están dados en la ecuación (3-30). Para el caso de pulsos rectangulares, esto es equivalente al muestreo de la forma de onda en cualquier momento dentro de cada intervalo de bit.[5] Considerando la figura 3-12a se observa que el muestreo dentro de cada intervalo de $T_b = 1$ ms resulta en la detección correcta de la palabra de datos de 8 bits 01001110.

La velocidad de bit y la velocidad en bauds (velocidad de símbolo) de la señal binaria son $R = n/T_0 = 1$ kbit/s y $D = N/T_0 = 1$ kbauds, debido a que $N = n = 8$ y $T_0 = 8$ ms. Es decir, la velocidad de bit y en bauds es igual para una señalización binaria.

¿Cuál es el ancho de banda para la forma de onda en la figura 3-12a? Utilizando la ecuación (3-32) se encuentra que el límite inferior para el ancho de banda es $\frac{1}{2}D = 500$ Hz. En la sección 3-5 se muestra que el ancho de banda nulo real de esta señal binaria con una forma de pulso rectangular es de $B = 1/T_s = D = 1{,}000$ Hz. Esto es mayor que el límite inferior para el ancho de banda, así que surge la siguiente pregunta: ¿cuál es la forma de onda que da el límite inferior del ancho de banda de 500 Hz? La respuesta es una con pulsos de tipo sen $(x)/x$, como se describe en el caso 2.

CASO 2. FUNCIONES ORTOGONALES PARA UN PULSO DE TIPO SEN $(X)/X$

Desde un punto de vista intuitivo se sabe que las esquinas agudas de un pulso rectangular deben de redondearse o suavizarse para reducir el ancho de banda de la forma de onda. Aún más, recordando nuestro estudio con el teorema de muestreo, ecuación (2-158), se observa que una forma de pulso del tipo sen$(x)/x$ tiene el mínimo ancho de banda. Por lo tanto, se escogen

$$\varphi_k(t) = \frac{\text{sen}\left\{\dfrac{\pi}{T_s}(t - kT_s)\right\}}{\dfrac{\pi}{T_s}(t - kT_s)} \tag{3–33}$$

donde $T_s = T_b$ para el caso de la señalización binaria. La forma de onda resultante que se transmite se muestra en la figura 3-12b.

Para reiterar, los datos pueden detectarse en el receptor si se evalúan los coeficientes de la serie ortogonal. Ya que se utilizan funciones ortogonales de tipo sen$(x)/x$, la ecuación (2-160) muestra que los datos pueden recuperarse simplemente muestreando[6] la forma de onda recibida en el punto medio de cada intervalo de símbolo. Considerando la figura 3-12 y muestreando al punto medio de cada intervalo de $T_s = 1$ ms, entonces se detecta la palabra de 8 bits 01001110 correcta.

Para el caso 2, la velocidad de bit y la velocidad en bauds siguen siendo $R = 1$ kbit/s y $D = 1$ kbauds. El ancho de banda absoluto de la ecuación (3-33) puede evaluarse con la ayuda de la figura 2-6b, donde $2W = 1/T_s$. Esto es, $B = 1/(2T_s) = 500$ Hz. Por lo tanto, se alcanza el límite inferior del ancho de banda, como lo predice el teorema de dimensionalidad.

[5-6] La detección de muestreo es óptima sólo si la forma de onda recibida está libre de ruido. Consulte la discusión que sigue a la ecuación (3-30).

Note que cuando se utiliza la forma de pulso rectangular, como se muestra en la figura 3-12a, la información de la fuente digital se transmite a través de *forma de onda digital* binaria. Es decir, la señal digital es una forma de onda digital. Sin embargo, cuando se emplea la forma de pulso sen$(x)/x$, como se muestra en la figura 3-12b, la información de la fuente digital se transmite a través de una forma de onda *analógica* (es decir, se utiliza un número infinito de voltajes sobre el rango entre −0.4 y 1.2 V).

Señalización multinivel

En el caso de la señalización binaria discutida en el ejemplo 3-3 se alcanzó el límite inferior del ancho de banda de $B = N/(2T_0)$. Es decir, para el caso 2, se requirieron $N = 8$ pulsos y resultó en un ancho de banda de 500 Hz para una duración de mensaje de $T_0 = 8$ ms. Sin embargo, este ancho de banda puede hacerse más pequeño si N se reduce. De hecho, N y, por lo tanto, el ancho de banda, pueden reducirse dejando que los términos w_k de la ecuación (3-27) tomen $L > 2$ valores posibles en lugar de los dos posibles valores utilizados para la señalización binaria. Cuando los términos w_k tienen $L > 2$ valores posibles, entonces la forma de onda resultante de la ecuación (3-27) se conoce como *señal multinivel*.

Ejemplo 3–4 Señal multinivel con $L = 4$

En este caso, la fuente de $M = 256$ menajes del ejemplo 3-3 se codificará a una señal multinivel con $L = 4$ y el mensaje se enviará, una vez más, en $T_0 = 8$ ms. Los datos multinivel pueden obtenerse al codificar los binarios de ℓ bits de la fuente del mensaje a datos de L niveles utilizando un convertidor *digital a analógico* (DAC),[7] como se muestra en la figura 3-13. Por ejemplo, un posible esquema de codificación para un DAC de $\ell = 2$ bits se muestra en la tabla 3-3. Se leen $\ell = 2$ bits a la vez para producir una salida que es uno de los $L = 4$ niveles posibles, donde $L = 2^{\ell}$.

TABLA 3–3 UN CONVERTIDOR DIGITAL A ANALÓGICO DE 2 BITS

Entrada binaria (ℓ = 2 bits)	Nivel de salida (V)
11	+3
10	+1
00	−1
01	−3

Por lo tanto, para la palabra de codificación binaria 01001110, la secuencia de las salidas de cuatro niveles sería –3, –1, + 3, + 1. En consecuencia, los términos w_k de la ecuación (3-27) serían $w_1 = -3$, $w_2 = -1$, $w_3 = +3$ y $w_4 = +1$, donde se utilizan $N = 4$ dimensiones. La forma de onda de $L = 4$ niveles se muestra en la figura 3-14. La figura 3-14a presenta la forma de onda multinivel cuando se emplean pulsos rectangulares para $\varphi_k(t)$ y la figura 3-14b presenta la forma de onda multinivel cuando se emplean pulsos de tipo sen$(x)/x$. Para cualquiera de estos casos, el receptor puede recuperar los datos de cuatro niveles correspondientes a los valores w_k muestreando la forma de onda recibida a la mitad de los intervalos de símbolo de $T_s = 2$ ms (es decir, $T = 1, 3, 5$ y 7 ms).[8]

[7] El término *analógico* en un *convertidor digital a analógico* es erróneo debido a que la salida es una señal digital de L niveles. Sin embargo, los manuales de datos se refieren a estos dispositivos como convertidores digital a analógico.

[8] La detección de muestreo es óptima sólo si la forma de onda recuperada está libre de ruido. Consulte la discusión que sigue a la ecuación (3-30).

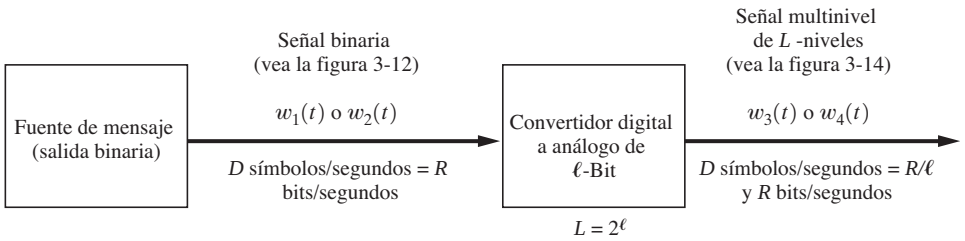
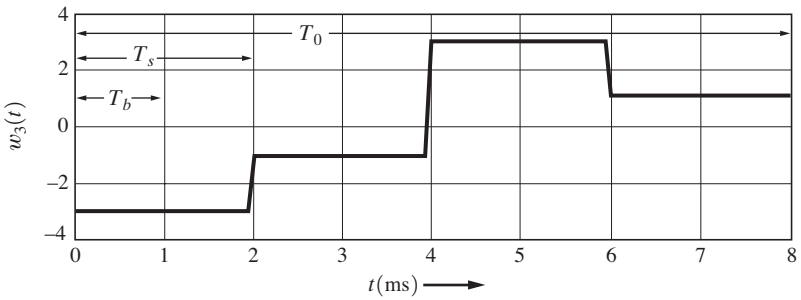
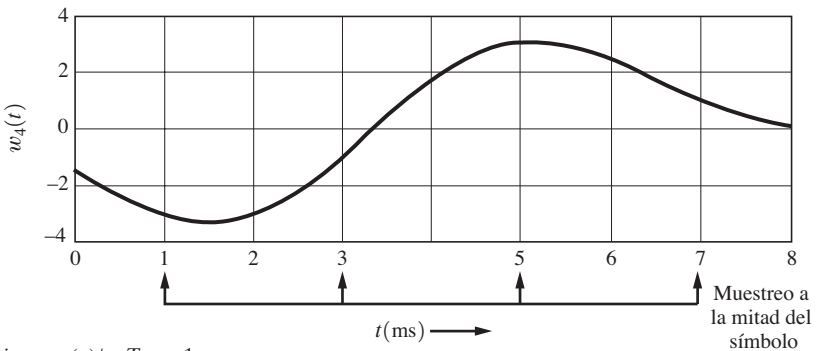


Figura 3–13 Conversión de una señal binaria a multinivel.



(a) Forma de pulso rectangular $T_b = 1$ ms



(b) Forma de pulso de tipo sen(x)/x, $T_b = 1$ ms

Figura 3–14 Señalización de $L = 4$ niveles (calculada).

Para estas señales de $L = 4$ niveles, el intervalo de bit equivalente es de $T_b = 1$ ms debido a que cada símbolo porta $\ell = 2$ bits de datos (es decir, uno de $L = 4$ niveles como se muestra en la tabla 3-3). La velocidad de bit es $R = n/T_0 = \ell/T_s = 1$ kbit/s (igual que para el ejemplo 3-3) y la velocidad en bauds es $D = N/T_0 = 1/T_s = 0.5$ kbauds (diferente del ejemplo 3-3). La velocidad de bit y la velocidad en bauds están relacionadas mediante

$$R = \ell D \tag{3–34}$$

donde $\ell = \log_2(L)$ es el número de bits leídos por el DAC en cada ciclo de reloj.

El ancho de banda nulo de la forma de onda multinivel de pulso rectangular, figura 3-14a, es $B = 1/T_s = D = 500$ Hz. De la ecuación (3-32), el ancho de banda absoluto de la forma de onda multinivel de pulsos sen$(x)/x$, figura 3-14b, es $B = N/(2T_0) = 1/(2T_s) = D/2 = 250$ Hz. Por lo tanto, cada una de estas formas de onda de $L = 4$ niveles tiene la mitad del ancho de banda de la señal binaria correspondiente con la misma forma de pulso. En general, una señal multinivel de L niveles tendrá $1/\ell$ del ancho de banda de la binaria correspondiente, donde $\ell = \log_2(L)$. Esta reducción en el ancho de banda se logra porque la duración de símbolo de una señal multinivel es de ℓ veces la de una binaria. La velocidad de bit R de la señal binaria es de ℓ veces la del símbolo de la multinivel.

En la siguiente sección se obtienen fórmulas exactas para la densidad espectral de potencia de señales binarias y multinivel.

3–5 CODIFICACIÓN Y ESPECTROS DE LÍNEA

Codificación binaria de línea

Los 1 y 0 binarios, como aquellos en la señalización PCM, pueden representarse en varios formatos de señalización serial de bit llamados *códigos de línea*. Algunos de los códigos de línea de mayor popularidad se muestran en la figura 3-15.[9] Existen dos principales categorías: *con retorno a cero* (RZ) y *sin retorno a cero* (NRZ). En la codificación RZ la forma de onda regresa a un nivel de cero volts para una porción, generalmente una mitad, del intervalo de bit. Las formas de onda para los códigos de línea pueden clasificarse aún más de acuerdo a la regla empleada para asignar niveles de voltaje para representar los datos binarios. Algunos ejemplos se presentan a continuación.

Señalización unipolar. En la señalización unipolar de lógica positiva el 1 binario está representado para un alto nivel ($+A$ volts) y el 0 binario por un nivel de cero. Este tipo de señalización también se conoce como *modulación de encendido-apagado*.

Señalización polar. Los 1 y 0 binarios están representados por niveles positivos y negativos iguales.

Señalización bipolar (seudoternaria). Los 1 binarios están representados por valores alternativamente positivos y negativos. El 0 binario está representado por un nivel de cero. El término *seudoternario* se refiere al uso de tres niveles de señal codificados para representar datos de dos niveles (binarios). Esto se conoce como señalización de *inversión alterna de marca* (AMI, por sus siglas en inglés).

Señalización de Manchester. Cada 1 binario está representado por un medio periodo de pulso de bit positivo seguido de uno negativo. De la misma manera, un 0 binario está representado por un medio periodo de pulso de bit negativo seguido de uno positivo. A este tipo de señalización también se le conoce como *codificación por fase dividida.*

[9] Hablando estrictamente, la cinta de papel perforada es un medio de almacenaje y no un código de línea. Sin embargo, éste se incluye para propósitos históricos y poder así ilustrar el origen de los términos *marca* y *espacio*. En la cinta de papel perforada, el 1 binario corresponde a la perforación (marca) y el 0 binario corresponde a donde no existe perforación (espacio).

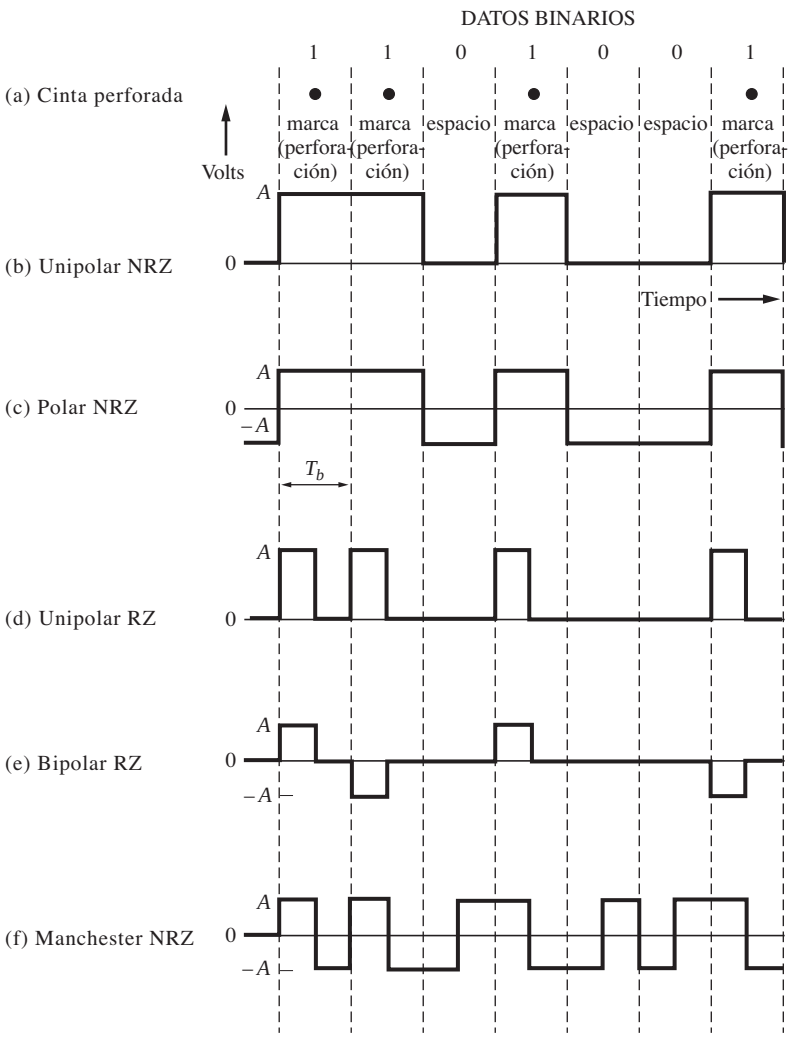


Figura 3–15 Formatos de señalización binaria.

Más adelante en este texto se utilizarán con mayor frecuencia nomenclaturas abreviadas: *Unipolar NRZ se denotará simplemente con unipolar, polar NRZ con polar y bipolar RZ con bipolar*. En este aspecto, desafortunadamente, el término *bipolar* tiene dos definiciones diferentes en conflicto. El significado se hace más claro mediante el contexto en el cual se utiliza: (1) en la industria de comunicación espacial, polar NRZ se denomina a veces bipolar NRZ o simplemente bipolar (este significado no se usará en la presente obra) y (2) en la industria telefónica, el término *bipolar* se refiere a una señalización seudoternaria (que es el significado que usaremos), como en la señalización bipolar RZ T1 descrita en la sección 3-9.

Los códigos de línea mostrados en la figura 3-15 también se conocen por otros nombres [Deffeback y Frost, 1971□Sklar, 2001]. Por ejemplo, polar NRZ también se denomina NRZ-L, donde L denota la asignación de nivel lógico normal. Bipolar RZ también se llama RZ-AMI, donde AMI denota la inversión alterna de marca (1 binario). Bipolar NRZ se llama NRZ-M, donde M denota inversión en la marca. Bipolar NRZ de lógica negativa se llama NRZ-S, donde S denota la inversión en el espacio. Manchester NRZ se llama Bi-φ-L, por bifase con nivel lógico normal.

Otros códigos de línea, demasiados para mencionarlos aquí, pueden encontrarse en la literatura especializada [Bylanski e Ingram, 1976□Bic, Duponteil e Imbeaux, 1991]. Por ejemplo, el tipo bipolar (seudoternario) puede extenderse a varias subclases, como se discutirá brevemente después de la ecuación (3-45).

Cada uno de los códigos de línea mostrados en la figura 3-15 tiene ventajas y desventajas. Por ejemplo, el código de línea unipolar NRZ tiene la ventaja de utilizar circuitos que requieren sólo una fuente de poder (por ejemplo, de +5 V para circuitos TTL), pero tiene el inconveniente de necesitar canales que están acoplados a DC (es decir, con respuesta de frecuencia hasta $f = 0$), debido a que la forma de onda tiene un valor de DC diferente de cero. El código de línea polar NRZ no requiere un canal acoplado a DC, *siempre y cuando* los datos alternen entre 1 y 0 binarios frecuentemente y que se envíe un número igual de 1 y 0 binarios. Sin embargo, los circuitos que producen la señal polar NRZ necesitan de una fuente de poder de voltaje negativo, y otra de voltaje positivo. El código de línea de Manchester NRZ tiene la ventaja de que siempre tiene un valor para DC de 0, independientemente de la secuencia de datos, pero tiene el doble del ancho de banda de los códigos unipolar NRZ o polar NRZ, ya que los pulsos son de la mitad de ancho. (Vea la figura 3-15.)

Las siguientes son algunas de las propiedades deseables de un código de línea:

- *Autosincronización*. Existe suficiente información de sincronización incorporada en el código de manera que los sincronizadores de bit pueden diseñarse para extraer la señal de reloj o sincronización. Una serie larga de 1 y 0 binarios no deberá causar problemas en recuperación de tiempo.
- *Baja probabilidad de error de bit*. Los receptores pueden diseñarse de tal manera que recuperarán los datos binarios con una baja probabilidad de error de bit cuando la señal de datos de entrada está corrupta debido al ruido o ISI. El problema de ISI se discute en la sección 3-6 y el efecto del ruido se cubre en el capítulo 7.
- *Un espectro que es adecuado para el canal*. Por ejemplo, si el canal está acoplado a AC, la PSD de la señal del código de línea será despreciable en frecuencias cercanas a cero. Además, el ancho de banda de la señal requiere ser lo suficientemente pequeña en comparación al del canal, por lo que la ISI no será un problema.
- *Ancho de banda de transmisión*. Tiene que ser lo más pequeño posible.
- *Capacidad de detección de errores*. Debe ser posible implementar fácilmente esta característica mediante la adición de codificadores y decodificadores de canal, o la característica debe incorporarse dentro del código de línea.
- *Transparencia*. El protocolo de datos y el código de línea están diseñados de tal forma que *toda posible secuencia de datos* se recibe fiel y *transparentemente*.

Un protocolo no es transparente si ciertas palabras están reservadas para secuencias de control de manera que, por ejemplo, alguna palabra instruya al receptor a enviar a la impresora todos los datos que siguen a la palabra de codificación. Esta característica ocasiona un problema cuando un archivo

de datos aleatorios, como uno de lenguaje maquinal, se transfiere a través del enlace, ya que algunas de las palabras pueden ser secuencias de caracteres de control. Dichas secuencias serán interceptadas por el sistema receptor y la acción definida se llevará a cabo, en lugar de pasar la palabra directamente al destino. Además, un código no es transparente si alguna secuencia resultará en una pérdida de la señal de reloj (como salida del sincronizador de bit en el receptor). Debido a que una secuencia de ceros resultará en una pérdida de la señal de reloj, el formato bipolar no es transparente.

El tipo particular de la forma de onda seleccionada para una señalización digital depende de la aplicación. Las ventajas y desventajas de cada formato de señal se discuten más adelante, después de que se hayan derivado sus espectros.

Espectro de potencia para códigos de línea binarios

La PSD puede evaluarse con una técnica determinista o con una estocástica. Esto se discutió por primera vez en el capítulo 1 y se ilustró posteriormente en el ejemplo 2-18. Para evaluar la PSD con una técnica determinista, se emplea la forma de onda para un código de línea que resulta de una secuencia en particular de datos. La PSD aproximada se evalúa con la ecuación (2-66) o, si el código de línea es periódico, con la (2-126). (Resuelva el problema 3-21 para aplicar este enfoque determinista). Como alternativa, la PSD puede evaluarse con un enfoque estocástico (que se desarrollará en el capítulo 6), que se usará para obtener la PSD de los códigos de línea mostrados en la figura 3-15, ya que da el resultado de la PSD para el código de línea con una secuencia de datos aleatorios, en lugar de aquella para una secuencia de datos en particular).

Como se discute e ilustra en la sección 3-4, una señal digital (o código de línea) puede representarse por

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f(t - nT_s) \tag{3–35}$$

donde $f(t)$ es la forma de pulso de símbolo y T_s es la duración de un símbolo. Para una señalización binaria, $T_s = T_b$, donde T_b es el tiempo que se toma para enviar 1 bit. Para una señalización multinivel, $T_s = \ell T_b$. El conjunto $\{a_n\}$ es el conjunto de datos aleatorios. Por ejemplo, para el código de línea unipolar NRZ, $f(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_b}\right)$, y $a_n = +A$ V cuando se envía un 1 binario y $a_n = 0$ cuando se envía un 0 binario.

Como se demuestra en la sección 6-2, a partir de la ecuación (6-70), la expresión general para la PSD de una señal digital es

$$\mathcal{P}_s(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k) e^{j2\pi k f T_s} \tag{3–36a}$$

donde $F(f)$ es la transformada de Fourier de la forma de pulso $f(t)$ y $R(k)$ es la autocorrelación de los datos. Esta autocorrelación está dada por

$$R(k) = \sum_{i=1}^{I} (a_n a_{n+k})_i P_i \tag{3–36b}$$

donde a_n y a_{n+k} son los niveles (de voltaje) de los pulsos de datos en la n-ésima y $(n + k)$-ésima posición de símbolo, respectivamente, y P_i es la probabilidad de tener el i-ésimo producto de $a_n a_{n+k}$. Note que la ecuación (3-36a) muestra que el espectro de la señal digital depende de dos cosas: (1) la forma de pulso utilizada y (2) las propiedades estadísticas de los datos.

Utilizando la ecuación (3-36), que representa el enfoque estocástico, se puede evaluar la PSD para los distintos códigos mostrados en la figura 3-15.

Señalización unipolar NRZ. Para una señalización unipolar, los posibles niveles para los términos a son de $+A$ y 0 V. Suponga que estos valores son igualmente probables de ocurrir y que los datos son independientes. A continuación, evalúe $R(k)$ como se define en la ecuación (3-36b). Para $k = 0$, los productos posibles de $a_n a_n$ son $A \times A = A^2$ y $0 \times 0 = 0$ y, por lo tanto, $I = 2$. Para datos aleatorios, la probabilidad de tener A^2 es de $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de tener 0 es de $\frac{1}{2}$, tal que

$$R(0) = \sum_{i=1}^{2} (a_n a_n)_i P_i = A^2 \cdot \tfrac{1}{2} + 0 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} A^2$$

Para $k \neq 0$, existen $I = 4$ posibilidades para los valores de productos: $A \times A$, $A \times 0$, y $0 \times A$, 0×0. Todos ellos ocurrirán con una probabilidad de $\frac{1}{4}$. Por lo tanto, para $k \neq 0$,

$$R(k) = \sum_{i=1}^{4} (a_n a_{n+k}) P_i = A^2 \cdot \tfrac{1}{4} + 0 \cdot \tfrac{1}{4} + 0 \cdot \tfrac{1}{4} + 0 \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} A^2$$

□ por esto,

$$R_{\text{unipolar}}(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ A^2, & k = 0 \\ \dfrac{1}{4}\ A^2, & k \neq 0 \end{cases} \tag{3–37a}$$

Para formas de pulso NRZ rectangulares, el par de la transformada de Fourier es

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t}{T_b}\right) \leftrightarrow F(f) = T_b\ \frac{\operatorname{sen} \pi f T_b}{\pi f T_b}. \tag{3–37b}$$

Utilizando la ecuación (3-36a) con $T_s = T_b$ se tiene que la PSD para el código de línea unipolar NRZ es

$$\mathcal{P}_{\text{unipolar NRZ}}(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \left(\frac{\operatorname{sen} \pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2 \left[1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k f T_b}\right]$$

Pero[10]

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk2\pi f T_b} = \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right) \tag{3–38}$$

□ por lo tanto,

$$\mathcal{P}_{\text{unipolar NRZ}}(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \left(\frac{\operatorname{sen} \pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right)\right] \tag{3–39a}$$

[10] La ecuación (3-38) se conoce como *fórmula de suma de Poisson*, como se derivó de la ecuación (2-115).

Pero como $[\text{sen}\ (\pi f T_b)/(\pi f T_b)] = 0$ cuando $f = n/T_b$, para $n \neq 0$, esto se reduce a

$$\mathcal{P}_{\text{unipolar NRZ}}(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \left(\frac{\text{sen}\,\pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{T_b}\,\delta(f)\right] \tag{3–39b}$$

Si A se selecciona de tal forma que la potencia promedio normalizada de la señal unipolar NRZ sea la unidad, entonces[11] $A = \sqrt{2}$. Esta PSD se grafica en la figura 3-16a, donde $1/T_b = R$, que es la velocidad de bit de la línea de código. El inconveniente de la unipolar NRZ es el desperdicio de potencia debido al nivel de DC y que el espectro no se aproxima a cero cerca de DC. En consecuencia, se requiere de circuitos acoplados a DC. Las ventajas de la señalización unipolar son que es fácil de generar usando TTL y circuitos CMOS, y únicamente requiere una sola fuente de poder.

Señalización polar NRZ. Para la señalización polar NRZ, los posibles valores para las a son de $+A$ V y $-A$ V. Para ocurrencias igualmente probables de $+A$ y $-A$, y asumiendo que los datos son independientes de bit a bit, se tiene que

$$R(0) = \sum_{i=1}^{2} (a_n a_n)_i P_i = A^2 \frac{1}{2} + (-A)^2 \frac{1}{2} = A^2$$

Para $k \neq 0$,

$$R(k) = \sum_{i=1}^{4} (a_n a_{n+k}) P_i = A^2 \frac{1}{4} + (-A)(A) \frac{1}{4} + (A)(-A) \frac{1}{4} + (-A)^2 \frac{1}{4} = 0$$

□ por lo tanto,

$$R_{\text{polar}}(k) = \begin{cases} A^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \tag{3–40}$$

Entonces, sustituyendo las ecuaciones (3-40) y (3-37a) dentro de la ecuación (3-36a) se obtiene la PSD para la señal polar NRZ:

$$\mathcal{P}_{\text{polar NRZ}}(f) = A^2 T_b \left(\frac{\text{sen}\ \pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2 \tag{3–41}$$

Si se selecciona A de tal forma que la potencia promedio normalizada de la señal polar NRZ sea la unidad, entonces $A = 1$ y la PSD resultante se muestra en la figura 3-16b, donde la velocidad de bit es de $R = 1/T_b$.

La señal polar tiene la desventaja de tener una PSD grande cerca de DC□por otra parte, es relativamente fácil de generar, aunque se requieren de fuentes de poder tanto positivas como negativas, a menos que se empleen circuitos integrados de propósito especial que produzcan voltajes de fuente duales a partir de una sola fuente. La probabilidad de rendimiento de error de bit es superior al de los otros métodos de señalización. (Consulte la figura 7-14.)

Unipolar RZ. La autocorrelación para datos unipolares se calculó previamente y está dada por la ecuación (3-37a). Para la señalización RZ, la duración de pulso es de $T_b/2$ en lugar de T_b, como se utiliza en la señalización NRZ. Esto es, para RZ,

[11] Esto puede demostrarse fácilmente utilizando un código de línea con datos periódicos 10101010. Entonces, haciendo que $P_s = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s^2(t)\ dt = \frac{1}{2T_b} A^2 T_b$ sea igual a la unidad, se tiene que $A = \sqrt{2}$.

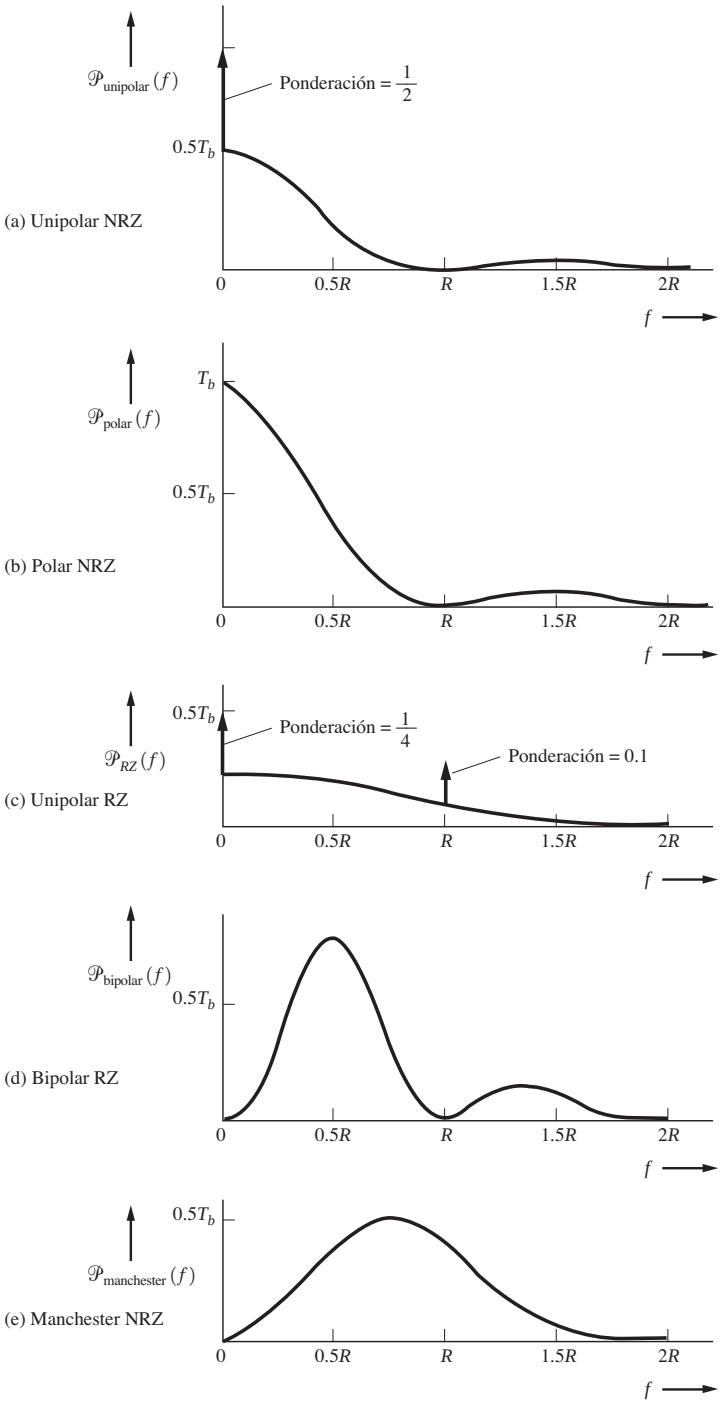


Figura 3–16 PSD para los códigos de línea (se muestran las frecuencias positivas).

$$F(f) = \frac{T_b}{2}\left(\frac{\text{sen}(\pi f T_b/2)}{\pi f T_b/2}\right) \tag{3–42}$$

Entonces, refiriéndonos a las ecuaciones (3-37b) y (3-39a), se obtiene la PSD para el código de línea unipolar RZ:

$$\mathcal{P}_{\text{unipolar RZ}}(f) = \frac{A^2 T_b}{16}\left(\frac{\text{sen}(\pi f T_b/2)}{\pi f T_b/2}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{T_b}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_b}\right)\right] \tag{3–43}$$

Si se selecciona una A de forma que la potencia promedio normalizada de la señal unipolar RZ sea la unidad, entonces $A = 2$. La PSD para este caso de potencia unitaria se muestra en la figura 3-16c, donde $R = 1/T_b$.

Como se espera, el primer ancho de banda nulo es el doble del de la señalización unipolar o polar, ya que el ancho de pulso es la mitad de ancho. Existe un término discreto (impulso) a $f = R$. Por lo tanto, este componente periódico puede utilizarse para la recuperación de la señal de reloj. Una desventaja de este esquema es que requiere 3 dB más de potencia de señal que la señalización polar para la misma probabilidad de error de bit (consulte capítulo 7.) Más aún, el espectro no es despreciable para las frecuencias cercanas al valor de DC.

Señalización bipolar RZ. La PSD para una señal bipolar también puede obtenerse utilizando la ecuación (3-36a). Los valores permitidos para a_n son de $+A$, $-A$ y 0, donde los 1 binarios están representados por valores alternantes de $+A$ y $-A$, y el 0 binario está representado por $a_n = 0$. Para $k = 0$, los productos de $a_n a_n$ son A^2 y 0, donde cada uno de ellos ocurre con una probabilidad de $\frac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$R(0) = \frac{A^2}{2}$$

Para $k = 1$ (el caso de bit adyacente) y las secuencias de datos (1, 1), (1, 0), (0, 1) y (0, 0), los productos posibles de $a_n a_{n+1}$ son $-A^2$, 0, 0 y 0. Cada una de estas secuencias ocurre con una probabilidad de $\frac{1}{4}$. Por consecuencia,

$$R(1) = \sum_{i=1}^{4} (a_n a_{n+1})_i P_i = -\frac{A^2}{4}$$

Para $k > 1$, los bits en consideración no son adyacentes y los productos de $a_n a_{n+k}$ son $\pm A^2$, 0, 0 y 0□éstos ocurren con una probabilidad de $\frac{1}{4}$. Entonces,

$$R(k > 1) = \sum_{i=1}^{5} (a_n a_{n+k})_i P_i = A^2 \cdot \tfrac{1}{8} - A^2 \cdot \tfrac{1}{8} = 0$$

□ por lo tanto,

$$R_{\text{bipolar}}(k) = \begin{Bmatrix} \frac{A^2}{2}, & k = 0 \\ -\frac{A^2}{4}, & |k| = 1 \\ 0, & |k| > 1 \end{Bmatrix} \tag{3–44}$$

Utilizando las ecuaciones (3-44) y (3-42) en la ecuación (3-36a), donde $T_s = T_b$, se encuentra que la PSD para el código de línea bipolar RZ es

$$\mathcal{P}_{\text{bipolar RZ}}(f) = \frac{A^2 T_b}{8} \left(\frac{\text{sen}(\pi f T_b/2)}{\pi f T_b/2} \right)^2 (1 - \cos(2\pi f T_b))$$

o

$$\mathcal{P}_{\text{bipolar RZ}}(f) = \frac{A^2 T_b}{4} \left(\frac{\text{sen}(\pi f T_b/2)}{\pi f T_b/2} \right)^2 \text{sen}^2(\pi f T_b) \tag{3–45}$$

donde $A = 2$ si la potencia promedio normalizada es la unidad. Esta PSD se grafica en la figura 3-16d. La señalización bipolar tiene un espectro nulo en DC, así que se pueden emplear circuitos acoplados a AC en la trayectoria de transmisión.

La señal de reloj puede extraerse fácilmente de la forma de onda bipolar al convertir el formato bipolar a uno unipolar RZ con una rectificación de onda completa. La señal RZ (unipolar) resultante tiene un componente periódico a la frecuencia de reloj (vea figura 3-16c.) Las señales bipolares no son transparentes. Es decir, una cadena de ceros causará una pérdida en la señal de reloj. Esta dificultad puede prevenirse si se utiliza una señalización *bipolar n de alta densidad* (HDB*n*, por sus siglas en inglés), en donde una cadena o más de *n* ceros consecutivos es reemplazada por una secuencia de "relleno" que contiene algunos pulsos.[12] El cálculo de la PSD para códigos HDB*n* es difícil porque los términos $R(k)$ deben evaluarse individualmente para valores grandes de k [Davis y Barber, 1973].

Las señales bipolares poseen también habilidades incorporadas de detección de un solo error, ya que un solo error causará infracciones en la regla de código de línea bipolar. Cualquier infracción puede detectarse fácilmente mediante lógica en el receptor.

Dos de las desventajas de las señales bipolares son que el receptor debe distinguir entre tres niveles ($+A$, $-A$ y 0) en lugar de sólo dos, como en cualquiera de los otros formatos de señalización previamente discutidos. Además, la señal bipolar requiere de aproximadamente 3 dB más de potencia que una polar para la misma probabilidad de error de bit. [Tiene un $\frac{3}{2}$ del error de la señalización unipolar, como se describe por la ecuación (7-28).]

Señalización de Manchester NRZ. La señal de Manchester utiliza la forma de pulso

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t + T_b/4}{T_b/2} \right) - \Pi\left(\frac{t - T_b/4}{T_b/2} \right) \tag{3–46a}$$

y el espectro de pulso resultante es

$$F(f) = \frac{T_b}{2} \left[\frac{\text{sen}(\pi f T_b/2)}{\pi f T_b/2} \right] e^{j\omega T_b/4} - \frac{T_b}{2} \left[\frac{\text{sen}(\pi f T_b/2)}{\pi f T_b/2} \right] e^{-j\omega T_b/4}$$

o

$$F(f) = jT_b \left[\frac{\text{sen}(\pi f T_b/2)}{\pi f T_b/2} \right] \text{sen}\left(\frac{\omega T_b}{4} \right) \tag{3–46b}$$

[12] Por ejemplo, para HDB3, las secuencias de relleno utilizadas para reemplazar $n + 1 = 4$ ceros son las secuencias alternantes 000V y 100V, donde el bit 1 se codifica de acuerdo a la regla bipolar y la V es un pulso de 1 de una polaridad tal que se rompa la regla bipolar. Las secuencias de relleno alternantes están diseñadas para que pulsos V consecutivos alternen en su signo. Por lo tanto, habrá un valor de DC de 0 en el código de línea y la PSD tendrá un nulo a $f = 0$. Para decodificar el código HDB3, el decodificador bipolar tiene que detectar las infracciones de la regla bipolar y contar el número de ceros que preceden a cada infracción de manera que los 1 sustituidos se puedan eliminar.

Sustituyendo ésta y la ecuación (3-40) dentro de la ecuación (3-36a), la PSD para Manchester NRZ se convierte en

$$\mathcal{P}_{\text{Manchester NRZ}}(f) = A^2 T_b \left(\frac{\text{sen}(\pi f T_b/2)}{\pi f T_b/2} \right)^2 \text{sen}^2(\pi f T_b/2) \tag{3–46c}$$

donde $A = 1$ si la potencia promedio normalizada es la unidad.

Este espectro se grafica en la figura 3-16e. El ancho de banda nulo del formato Manchester es el doble del ancho de banda bipolar. Sin embargo, el código de Manchester tiene un nivel de DC de cero en una base de bit a bit. Más aún, una cadena de ceros no causará una pérdida en la señal de reloj.

Al repasar nuestro estudio de la PSD para señales digitales se debe enfatizar que el espectro es una función del patrón de bit (a través de la autocorrelación de bit), así como de la forma de pulso. El resultado general para la PSD, ecuación (3-36), es válido tanto para la señalización multinivel como para la binaria.

Codificación diferencial

Cuando datos seriales se pasan a través de muchos circuitos a lo largo de un canal de comunicaciones, la forma de onda a menudo se invierte sin intención (es decir, los datos son complementados). Esto puede ocurrir en un canal de línea de transmisión de par trenzado si sólo se intercambian las dos terminales en un punto de conexión cuando se utiliza un código de línea polar. (Note que tal intercambio no afectaría a los datos en una señal bipolar.) Para minimizar este problema, con frecuencia se emplea una *codificación diferencial*, como se ilustra en la figura 3-17. Los datos diferenciales codificados se generan por

$$e_n = d_n \oplus e_{n-1} \tag{3–47}$$

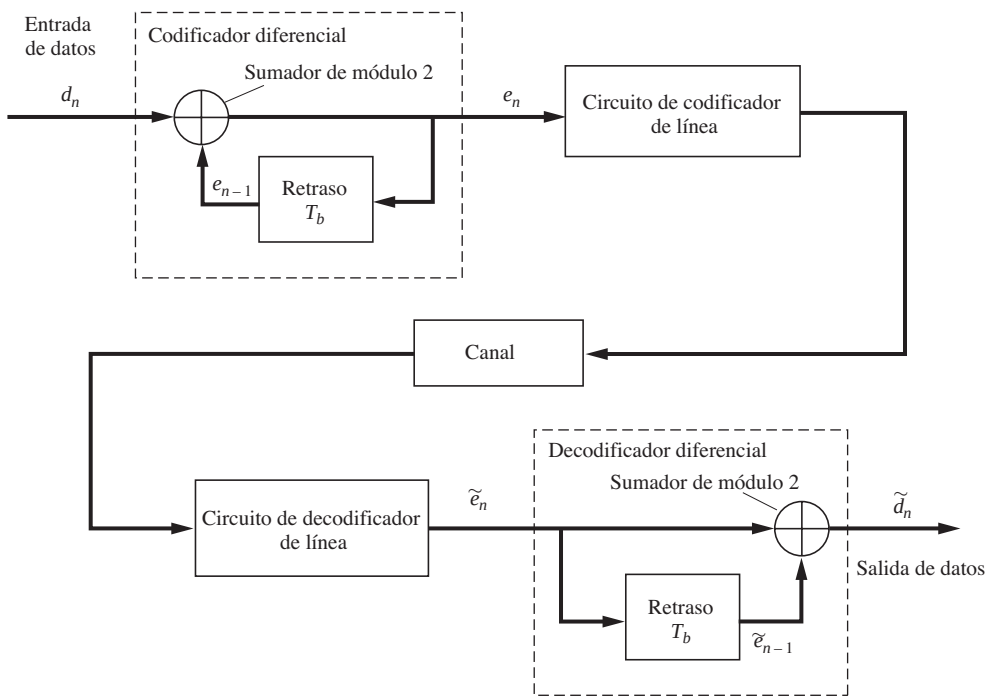


Figura 3–17 Sistema de codificación diferencial.

donde $\oplus$ es un sumador de módulo 2 o una operación de compuerta de OR exclusivo (XOR). Los datos codificados recibidos se decodifican mediante

$$\tilde{d}_n = \tilde{e}_n \oplus \tilde{e}_{n-1} \tag{3–48}$$

donde la tilde denota datos al lado del receptor.

Cada dígito en la secuencia codificada se obtiene al comparar al bit de entrada en el presente con el bit codificado en el pasado. Un 1 binario se codifica si el bit de entrada en el presente y el bit codificado en el pasado son de un estado opuesto, y un 0 binario se codifica si los estados son iguales. Esto es equivalente a la tabla de verdad de una compuerta XOR o un sumador de módulo 2. Un ejemplo de una secuencia modificada se muestra en la tabla 3-4, donde el dígito de referencia inicial es un 1 binario. En el receptor, la señal codificada se ha decodificado al comparar el estado de los bits adyacentes. Si el bit codificado recibido en el presente tiene el mismo estado que el bit codificado en el pasado, entonces se decodifica un 0 binario a la salida. De manera similar, se decodifica un 1 binario para el caso de estados opuestos. Como se muestra en la tabla, la polaridad de la forma de onda codificada diferencialmente puede invertirse sin afectar los datos decodificados, lo que proporciona una gran ventaja cuando la forma de onda se pasa a través de miles de circuitos en un sistema de comunicaciones y el sentido positivo de la salida se pierde o cambia ocasionalmente conforme lo hace la red. Esto ocurre a veces durante la conmutación entre varias trayectorias de datos.

Diagramas de ojo

El efecto de la filtración de canal y del ruido en el canal se aprecia al observar el código de línea recibido en un osciloscopio analógico. El lado izquierdo de la figura 3-18 muestra las formas de onda polares NRZ corruptas recibidas para los casos de (a) un filtrado ideal de canal, (b) una filtrado que produce interferencia intersimbólica (ISI) y (c) ruido con ISI añadido (la ISI se describe en la sección 3-6). Al lado derecho de la figura se muestran las presentaciones en el osciloscopio correspondientes a la señal contaminada con múltiples barridos, donde cada barrido está disparado mediante una señal de reloj y el ancho del barrido es un poco mayor que T_b. Estos diagramas al lado derecho se conocen como *diagramas de ojo*, ya que se asemejan a un dibujo de un ojo humano. Bajo condiciones normales de operación (es decir, cuando no se detectan errores de bit), el ojo estará abierto.

TABLA 3–4 EJEMPLO DE CODIFICACIÓN DIFERENCIAL

Codificación									
Secuencia de entrada	d_n		1	1	0	1	0	0	1
Secuencia codificada	e_n	1	0	1	1	0	0	0	1
Dígito de referencia		↑							
Decodificación (con la polaridad de canal correcta)									
Secuencia recibida (polaridad correcta)	$\tilde{e}_n$	1	0	1	1	0	0	0	1
Secuencia decodificada	$\tilde{d}_n$		1	1	0	1	0	0	1
Decodificación (con polaridad de canal invertida)									
Secuencia recibida (polaridad invertida)	$\tilde{e}_n$	0	1	0	0	1	1	1	0
Secuencia decodificada	$\tilde{d}_n$		1	1	0	1	0	0	1

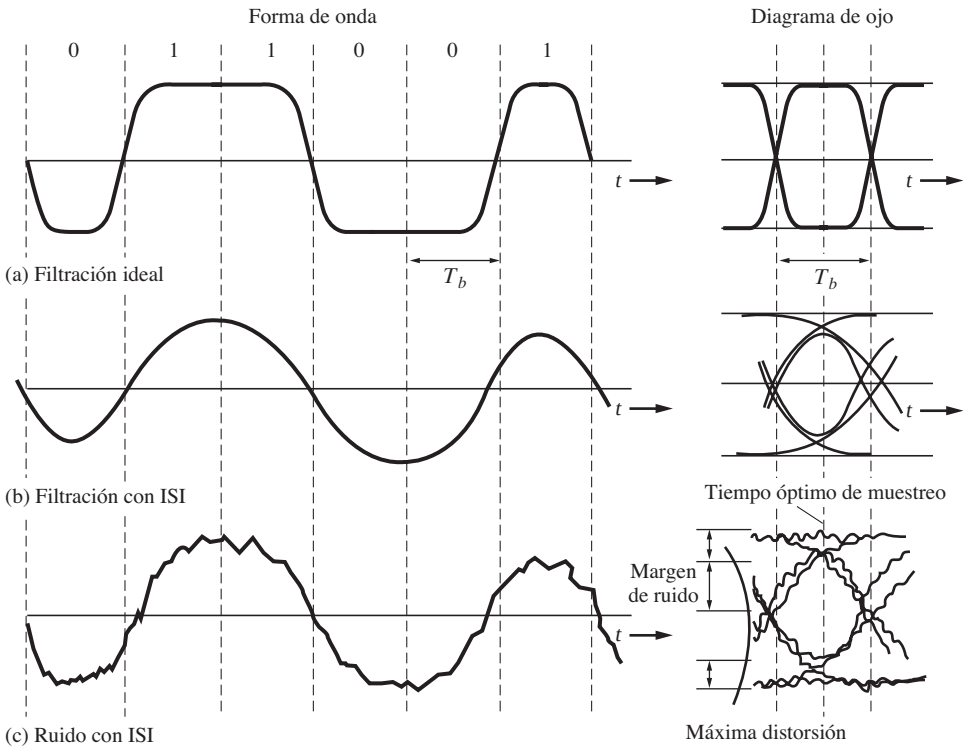


Figura 3–18 Forma de onda polar NRZ distorsionada con su diagrama de ojo correspondiente.

Si existe mucho ruido o ISI, entonces el ojo se cerrará□esto indica que se producirán errores de bit a la salida del receptor. El diagrama de ojo provee de una excelente forma de determinar la calidad del código de línea recibido y de la habilidad del receptor para combatir errores de bit. Como se muestra en la figura, los diagramas de ojo suministran la siguiente información:

- El *error de sincronización* permitido en el muestreo al lado del receptor está dado por el ancho dentro del ojo, conocida como *apertura del ojo*. Por supuesto que el tiempo preferido para el muestreo es en el punto donde la apertura vertical del ojo es mayor.
- La *sensibilidad* al error de sincronización está dada por la pendiente del ojo abierto, evaluada a, o casi cercana a, el punto de cruce con cero.
- El *margen de error* del sistema está dado por la altura de la apertura del ojo.

Repetidores regenerativos

Cuando una señal digital de código de línea, como una PCM, es transmitida sobre un canal cableado, por ejemplo una línea telefónica de par trenzado, ésta se ve atenuada, filtrada y contaminada por el ruido. Por consiguiente, para líneas largas, los datos no pueden recuperarse al lado del receptor a menos que se coloquen repetidores en cascada a lo largo de la línea y en el receptor, como se ilustra en la figura 3-7. Estos repetidores amplifican y "limpian" la señal periódicamente. Si la señal fuera

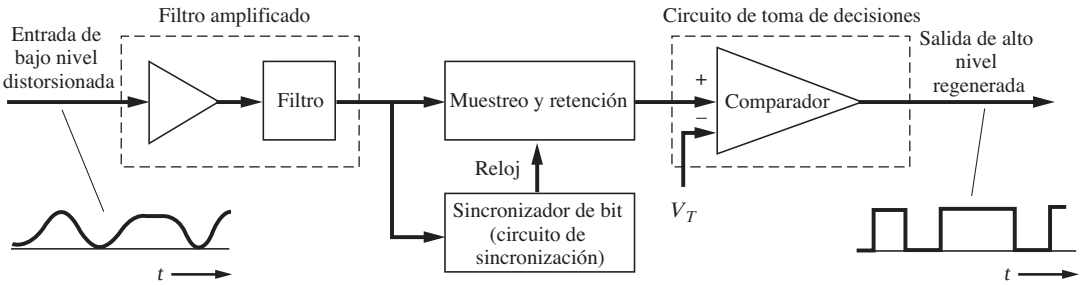


Figura 3–19 Repetidor regenerativo para señalización unipolar NRZ.

analógica en lugar de digital sólo se podrían utilizar amplificadores lineales con filtros adecuados, pues los valores relativos de amplitud tendrían que preservarse. En este caso, la distorsión dentro de la banda se acumularía de repetidor lineal a repetidor lineal. Esta es una de las desventajas de la señalización analógica□sin embargo, en la digital se puede utilizar un procesamiento no lineal para regenerar una señal digital "libre de ruido". Este tipo de procesamiento no lineal se conoce como *repetidor regenerativo*. Un diagrama de bloques simplificado de un repetidor regenerativo para la señalización unipolar NRZ se muestra en la figura 3-19. El filtro amplificador incrementa la amplitud de la señal de entrada de bajo nivel a un nivel que es compatible con el resto de los circuitos y además filtra la señal de tal manera que se minimizan los efectos de ruido en el canal y de ISI (el filtro que reduce la ISI se llama *filtro ecualizador* y se discutirá en la sección 3-6). El sincronizador de bit genera una señal de reloj a la velocidad de bit que está sincronizada de tal forma que la señal amplificada y distorsionada se muestrea a un punto en donde la apertura del ojo es máxima (los sincronizadores de bit se discuten a detalle en la siguiente sección). Para cada pulso de reloj, el circuito de muestreo y retención produce la muestra que se almacena (durante T_b, un intervalo de 1 bit) hasta que ocurre el siguiente pulso de reloj. El comparador emite una salida de alto nivel sólo cuando la muestra es mayor que el nivel de umbral V_T. □ste se selecciona generalmente a modo que sea la mitad de la variación pico a pico esperada para los valores de muestra.[13] Si el ruido en la entrada es pequeño y existe una ISI despreciable, entonces la salida del comparador será alta sólo cuando exista un 1 binario (es decir, un alto nivel) en el código de línea unipolar NRZ contaminado a la entrada del repetidor. El comparador, un aparato de umbral, actúa como dispositivo de toma de decisiones. Por lo tanto, el código de línea unipolar NRZ se regenera "libre de errores", excepto para los de bit que son causados cuando el ruido a la entrada y la ISI alteran las muestras lo suficiente como para que los valores de las muestras ocurran al lado equivocado de V_T. El capítulo 7 muestra cómo la probabilidad de error de bit se ve influida por la SNR a la entrada del repetidor por el filtro utilizado y por el valor de V_T que se seleccionó.[14]

En los sistemas de comunicación digital de larga distancia se emplean muchos repetidores en cascada, como se muestra en la figura 3-7. Por supuesto que el espacio entre los repetidores está dado por la pérdida de trayectoria del medio de transmisión y la cantidad de ruido que se añade. Se requiere de un repetidor cuando la SNR en un punto del canal es menor que el valor necesario para mantener la especificación de una probabilidad de error de bit general. Suponga que los repetidores

[13] Este es el valor óptimo para V_T cuando los 1 y 0 binarios son igualmente probables.

[14] Para una mínima probabilidad de error de bit, el circuito de muestrear y almacenar de la figura 3-19 se reemplaza por un circuito óptimo de detección de muestra llamado *filtro emparejado* (MF, por sus siglas en inglés) descrito en la sección 6-8.

están separados de tal manera que cada uno tiene la misma probabilidad de error de bit, P_e, y que existen m repetidores en el sistema, incluyendo el receptor final. Entonces, para m repetidores en cascada, la probabilidad de error de bit general, P_{me}, puede evaluarse mediante el uso de la distribución binomial del apéndice B. Utilizando la ecuación (B-33) se observa que la probabilidad de que un repetidor i entre m repetidores produzca un error de bit es

$$P_i = \binom{m}{i} P_e^i (1 - P_e)^{m-i} \tag{3–49}$$

Sin embargo, existe un error de bit a la salida del sistema sólo cuando cada uno de un número *impar* de repetidores en cascada produce un error de bit. En consecuencia, la probabilidad de error de bit general para m repetidores en cascada es

$$P_{me} = \sum_{\substack{i=1 \\ i=\text{impar}}}^{m} P_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i=\text{impar}}}^{m} \binom{m}{i} P_e^i (1 - P_e)^{m-i}$$

$$= mP_e(1 - P_e)^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} P_e^3(1 - P_e)^{m-3} + \cdots \tag{3–50a}$$

Bajo condiciones útiles de operación, $P_e \ll 1$, así que sólo el primer término de esta serie es significativo. Por lo tanto, la probabilidad de error de bit general puede aproximarse mediante

$$P_{me} \approx mP_e \tag{3–50b}$$

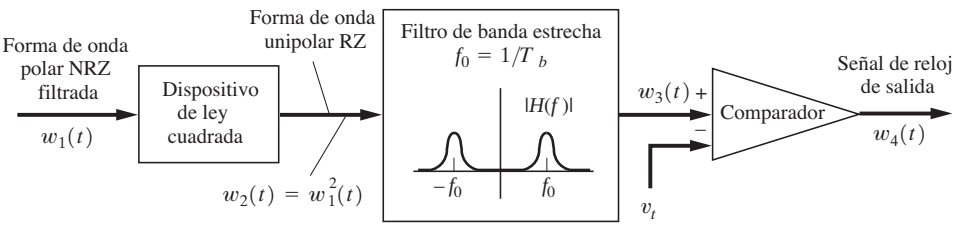
donde P_e es la probabilidad de error de bit para un solo repetidor.

Sincronización de bit

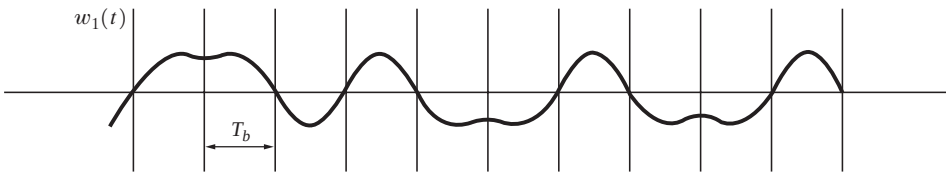
Las señales de sincronización son de tipo reloj, y son necesarias dentro de un receptor (o repetidor) para la detección (o regeneración) de los datos a partir de una señal de entrada contaminada. Estas señales de reloj tienen una precisa relación de frecuencia y fase respecto a la señal de entrada *recibida*, y se retrasan en comparación a las señales de reloj en el transmisor debido a que existe un retraso de propagación a través del canal.

Las comunicaciones digitales generalmente requieren de al menos tres tipos de señales de sincronización: (1) *bit de sincronización*, para distinguir un intervalo de bit de otro, como se discute en esta sección; (2) *sincronización de trama*, para distinguir grupos de datos, como se verá en la sección 3-9 en relación a la multiplexión por división de tiempo; y (3) *sincronización de portadora*, para una señalización pasabanda con detección coherente, como se estudiará en los capítulos 4, 5 y 7. Los sistemas están diseñados para que la sincronización se derive directamente de la señal contaminada o a partir de un canal separado que se utiliza sólo para transmitir la información de sincronización.

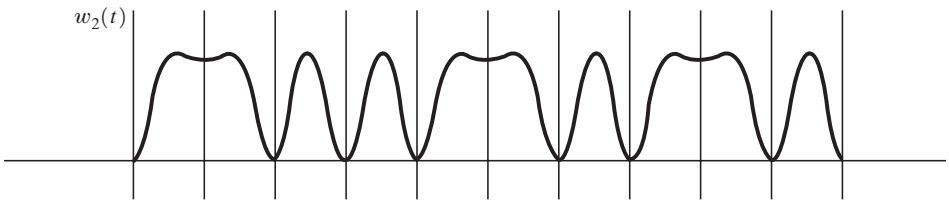
Nos concentraremos en sistemas con sincronizadores de bit que derivan su sincronización directamente de la señal corrupta, ya que por lo general no es económicamente posible enviar la sincronización a través de un canal separado. La complejidad de un circuito sincronizador de bit depende de las propiedades de sincronización del código de línea. Por ejemplo, el sincronizador de bit para un código unipolar RZ con un número suficiente de 1 y 0 binarios alternantes es casi trivial, ya que la PSD de ese código tiene una función delta a la velocidad de bit, $f = R$, como se muestra en la figura 3-16c. Por lo tanto, la señal de reloj para la sincronización de bit puede obtenerse al pasar la forma de onda unipolar RZ recibida a través de un filtro pasabanda de banda estrecha atenuado a



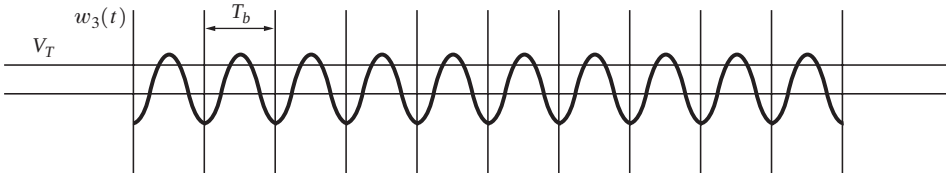
(a) Diagrama de bloques de un sincronizador de bit



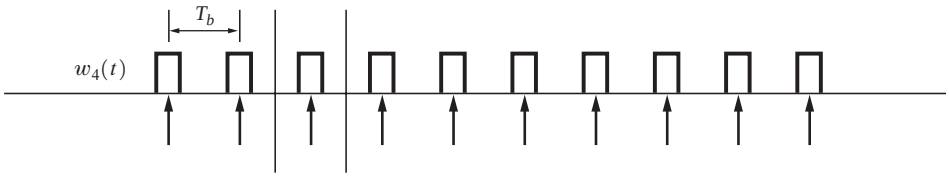
(b) Forma de onda de polar NRZ de entrada después de filtrarse



(c) Salida del dispositivo de ley cuadrada (unipolar RZ)



(d) Salida del filtro de banda estrecha



(e) Señal de reloj de salida Tiempos de muestreo

Figura 3–20 Sincronizador de bit de ley cuadrada para la señalización polar NRZ.

$f_0 = R = 1/T_b$. Esto se ilustra en la figura 3-20 si se elimina el dispositivo de ley cuadrada. De otra forma, como se describirá en la sección 4-3, se puede utilizar un lazo enganchado en fase (PLL, por sus siglas en inglés) para extraer la señal de sincronización a partir del código de línea unipolar RZ al enganchar dicho PLL a la línea espectral discreta cuando $f = R$. Para un código de línea polar NRZ,

el sincronizador de bit es un poco más complicado, como se aprecia en la figura 3-20. En este caso la forma de onda polar NRZ filtrada (figura 3-20b) se convierte a una forma de onda unipolar RZ (figura 3-20c) con el uso de un circuito de ley cuadrada o, como alternativa, un rectificador de onda completa. La señal de reloj se recupera fácilmente utilizando un filtro o un PLL, ya que el código unipolar RZ tiene una función delta en su espectro cuando $f = R$. Todos los sincronizadores de bit discutidos hasta ahora utilizan alguna técnica para detectar la línea espectral cuando $f = R$.

Otra técnica utiliza la propiedad de simetría del mismo código de línea [Carlson, 1986]. Considerando la figura 3-18, que ilustra el diagrama de ojo para un código polar NRZ, se observa que un código de línea adecuadamente filtrado tiene una forma de pulso que es simétrica alrededor del tiempo óptimo de sincronización (muestreo), siempre y cuando los datos alternen entre los 1 y 0. A partir de la figura 3-21, sea que $w_1(t)$ denote el código de línea polar NRZ filtrada y $w_1(\tau_0 + nT_b)$ un valor de muestra del código de línea al máximo (positivo o negativo) de la apertura del ojo, donde n es un entero, $R = 1/T_b$ la velocidad de bit, τ el tiempo relativo de sincronización (es decir, la fase de sincronización) y τ_0 el valor óptimo correspondiente a las muestras al máximo de la apertura del ojo. Debido a que la forma de pulso del código de línea es aproximadamente simétrica alrededor del tiempo óptimo de sincronización para datos alternantes,

$$|w_1(\tau_0 + nT_b - \Delta)| \approx |w_1(\tau_0 + nT_b + \Delta)|$$

donde τ_0 es la fase óptima de sincronización y $0 < \Delta < \frac{1}{2} T_b$. La cantidad $w_1(\tau + nT_b - \Delta)$ se llama *muestra anticipada* y $w_1(\tau + nT_b + \Delta)$ *muestra tardía*. Estas muestras pueden utilizarse para derivar la señal óptima de sincronización, como se ilustra en el *sincronizador de bit anticipado-tardío* de la figura 3-21. El voltaje de control $w_3(t)$ para el reloj controlado por voltaje (VCC, por sus siglas en inglés) es una versión suavizada (promediada) de $w_2(t)$. Esto es,

$$w_3(t) = \langle w_2(t) \rangle \tag{3–51a}$$

donde

$$w_2(t) = |w_1(\tau + nT_b - \Delta)| - |w_1(\tau + nT_b + \Delta)| \tag{3–51b}$$

(La operación de promedio se requiere para que el sincronizador de bit se mantenga sincronizado aun cuando los datos no alternen durante cada intervalo de bit.) Si el VCC produce pulsos de sincronización con el tiempo óptimo de sincronización relativo $\tau = \tau_0$ de tal manera que las muestras se tomen al máximo de la apertura del ojo, entonces la ecuación (3-51) demuestra que el voltaje de control $w_3(t)$ será de cero. Si τ es tarde, entonces $w_3(t)$ será un voltaje positivo de corrección y si τ es temprana, $w_3(t)$ será negativo. Un voltaje de control positivo (o negativo) incrementará (o decrementará) la frecuencia del VCC. Por lo tanto, el sincronizador de bit producirá una señal de reloj de salida que estará sincronizada al flujo de datos de entrada. Entonces $w_4(t)$ será un tren de pulsos con pulsos de reloj estrechos que ocurrirán a un tiempo de $t = \tau + nT_b$, donde n es un entero y τ se aproxima a τ_0, que es la fase óptima de sincronización que corresponde al muestreo en el máximo de la apertura del ojo. Es interesante observar que el sincronizador de bit anticipado-tardío de la figura 3-21 tiene la misma forma canónica que el lazo de sincronización de portadora de Costas de la figura 5-3.

Los sincronizadores de bit unipolares, polares y bipolares sólo funcionarán cuando exista un número suficiente de 1 y 0 alternantes en los datos. La pérdida de sincronización debido a cadenas largas de todos los 1 y 0 puede prevenirse adoptando una de dos alternativas. La primera, como se estudió en el capítulo 1, es utilizar un entrelazado de bits (es decir, cifrado). En este caso, los datos fuente con cadenas de 1 y 0 se cifran para producir datos con 1 y 0 alternantes, los cuales se transmiten a

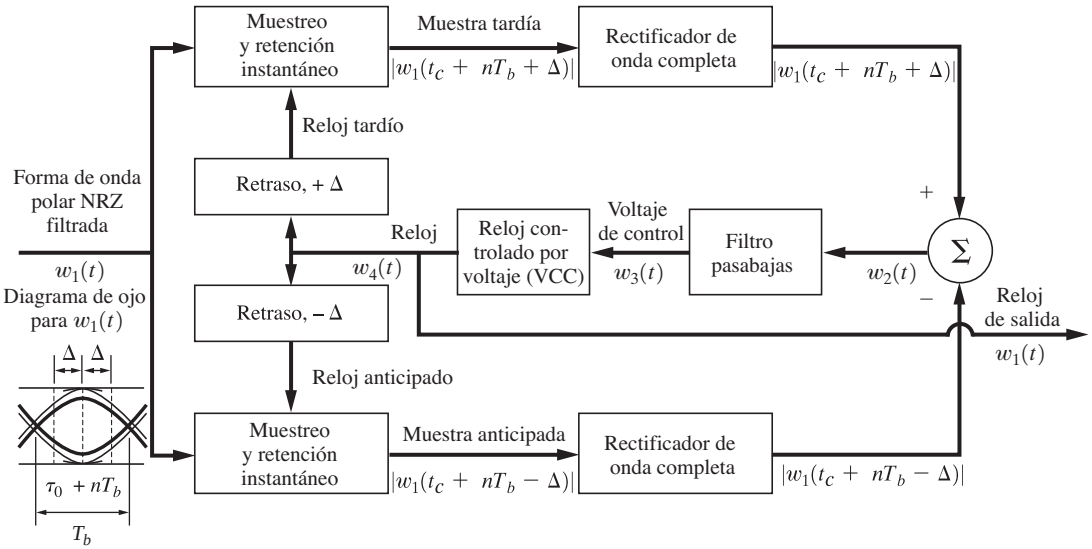


Figura 3–21 Sincronizador de bit anticipado-tardío para señalización polar NRZ.

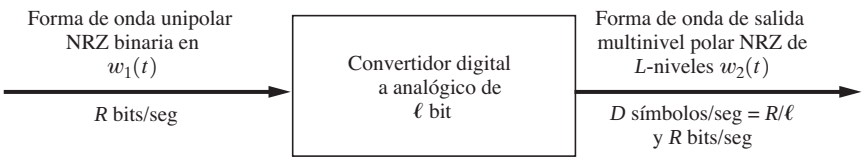
través del canal utilizando un código de línea unipolar, polar o bipolar. En el lado del receptor, los datos cifrados se recuperan primero con técnicas comunes de recepción con sincronizadores de bit, como se acaba de describir□entonces los datos se descifran. La segunda alternativa es usar un tipo de código de línea completamente diferente que no requiera datos alternantes para la sincronización de bit, por ejemplo la codificación de Manchester NRZ, aunque necesitará un canal con el doble del ancho de banda empleado para un código polar NRZ.

Espectros de potencia para señales multinivel polares NRZ

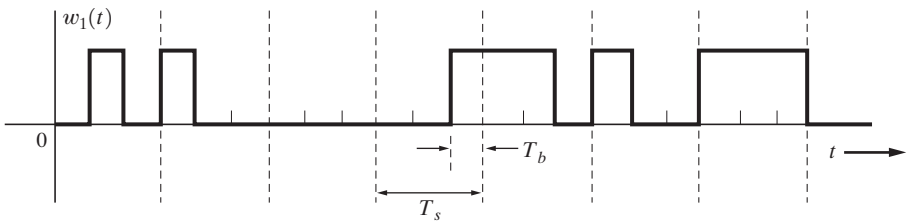
La señalización multinivel proporciona un ancho de banda reducido en comparación con la binaria. El concepto, que se introdujo en la sección 3-4, aquí se extenderá y obtendrá una fórmula para la SD de una señal multinivel polar NRZ. Para reducir el ancho de banda de señalización, la figura 3-22 muestra cómo una señal binaria se convierte en una multinivel polar NRZ, donde un DAC de ℓ-bi bits se utiliza para convertir la señal binaria con una velocidad de datos R bits/segundo en una multinivel polar NRZ de $L = 2^{\ell}$ niveles.

Por ejemplo, suponga que se emplea un DAC de $\ell = 3$ bits, tal que $L = 2^3 = 8$ niveles. La figura 3-22b ilustra una forma de onda de entrada típica y la 3-22c la forma de onda multinivel de ocho niveles de salida correspondiente, donde T_s es el tiempo que se toma en enviar un símbolo multinivel. Para obtener esta forma de onda se utilizó el código mostrado en la tabla 3-5. En la figura se puede observar que $D = 1/T_s = 1/(3T_b) = R/3$ o, en general, que la velocidad en bauds es

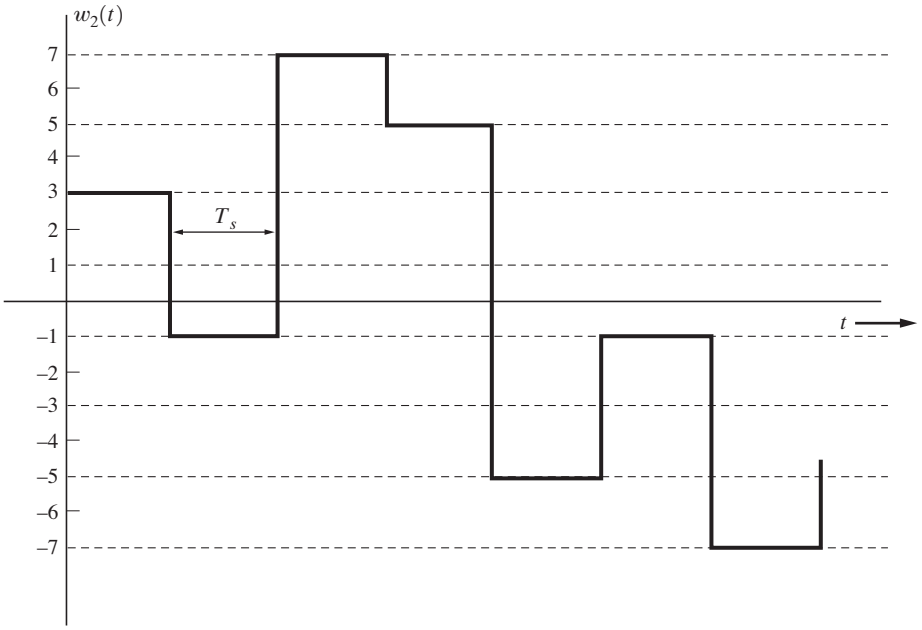
$$D = \frac{R}{\ell} \tag{3–52}$$



(a) Convertidor digital a analógico de ℓ bit



(b) Forma de onda binaria de entrada, $w_1(t)$



(c) Forma de onda polar NRZ de salida de $L = 8 = 2^3$niveles

Figura 3–22 Conversión de señal polar NRZ de binaria a multinivel.

La relación entre la velocidad en bauds de salida D y la velocidad de bit asociada R es idéntica a la que se discutió con el teorema de dimensionalidad en la sección 3-4, donde se encontró que el ancho de banda está limitado por $B \geq D/2$.

La PSD para la forma de onda multinivel polar NRZ (figura 3-22c) puede obtenerse con la ecuación (3-36a). Evaluando $R(k)$ para el caso de niveles igualmente probables a_n, como se muestra en la tabla 3-5, se tiene que, para el caso donde $k = 0$,

TABLA 3–5 CODIFICACIÓN POR DAC DE TRES BITS

Palabra digital	Nivel de salida, $(a_n)_i$
000	+7
001	+7
010	+3
011	+1
100	−1
101	−3
110	−5
111	−7

$$R(0) = \sum_{i=1}^{8} (a_n)_i^2 P_i = 21$$

donde $P_i = \frac{1}{8}$ para los ocho posibles valores. Para $k \neq 0$, $R(k) = 0$. Entonces, a partir de la ecuación (3-36a), la PSD para $w_2(t)$ es

$$\mathcal{P}_{w_2}(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s}(21 + 0)$$

donde el ancho de pulso (o ancho de símbolo) es ahora de $T_s = 3T_b$. Para la forma de pulso rectangular con un ancho de $3T_b$, esto se convierte en

$$\mathcal{P}_{w_2}(f) = 63T_b\left(\frac{\text{sen } 3\pi f T_b}{3\pi f T_b}\right)^2$$

para el caso donde $\ell = 3 = 3$. Por lo tanto, el primer ancho de banda nulo para esta señal multinivel polar NRZ es $B_{\text{nulo}} = 1/(3T_b) = R/3$, o un tercio del ancho de banda de la señal binaria de entrada.

En general, para el caso de $L = 2^\ell$ niveles, la PSD de una señal multinivel polar NRZ con formas de pulso rectangulares es

$$\mathcal{P}_{\text{multinivel NRZ}}(f) = K\left(\frac{\text{sen}\,\ell\pi f T_b}{\ell\pi f T_b}\right)^2 \tag{3–53}$$

donde K es una constante y el ancho de banda nulo es

$$B_{\text{nulo}} = R/\ell \tag{3–54}$$

En resumen, la señalización multinivel, cuando $L > 2$, es utilizada para reducir el ancho de banda de una señal digital en comparación con el ancho de banda requerido para la señalización binaria. En la práctica, las señales multinivel filtradas se emplean a menudo para modular una portadora para la transmisión de información digital a través de un canal de comunicaciones. Esto proporciona una señal digital de banda relativamente estrecha.

Eficiencia espectral

DEFINICIÓN. La *eficiencia espectral* de una señal digital está dada por el número de bits por segundo de datos que cada hertz del ancho de banda puede soportar. Es decir,

$$\eta = \frac{R}{B} \text{ (bits/s)/Hz} \tag{3–55}$$

donde R es la velocidad de datos y B es el ancho de banda.

En aplicaciones donde el ancho de banda está limitado por aspectos físicos y reglamentaciones, el trabajo del ingeniero en comunicaciones es elegir una técnica de señalización que proporcione la más alta eficiencia espectral y al mismo tiempo alcanzar las restricciones de costo dadas y las especificaciones para una baja probabilidad de error de bit a la salida del sistema. Más aún, la máxima eficiencia espectral posible está limitada por el ruido del canal para que el error sea pequeño. Esta máxima eficiencia espectral está dada por la fórmula de capacidad de canal de Shannon, ecuación (1-10),

$$\eta_{\text{máx}} = \frac{C}{B} = \log_2\left(1 + \frac{\text{S}}{\text{N}}\right) \tag{3–56}$$

La teoría de Shannon no especifica cómo lograr un sistema con la máxima eficiencia espectral teórica□sin embargo, en los sistemas prácticos que se aproximan a esta eficiencia espectral a menudo se incorpora la codificación para la corrección de errores y una señalización multinivel.

La eficiencia espectral para la señalización multinivel polar NRZ se obtiene al sustituir la ecuación (3-54) dentro de la ecuación (3-55). Se obtiene que

$$\eta = \ell \text{(bit/s)/Hz} \qquad \text{(señalización multinivel polar NRZ)} \tag{3–57}$$

donde ℓ es el número de bits utilizado en el DAC. Por supuesto que ℓ no puede incrementarse sin límite a una eficiencia infinita, ya que está limitada por la relación señal a ruido dada en la ecuación (3-56).

Las eficiencias espectrales para todos los códigos de línea estudiados en las secciones anteriores pueden evaluarse fácilmente a partir de sus PSDs. Los resultados se muestran en la tabla 3-6. Los códigos unipolares NRZ, polar NRZ y bipolar RZ son cien por ciento más eficientes que los códigos unipolar RZ o Manchester NRZ.

TABLA 3–6 EFICIENCIAS ESPECTRALES DE LOS CÓDIGOS DE LÍNEA

Tipo de código	Primer ancho de banda nulo (Hz)	Eficiencia espectral $\eta = R/B$ [(bits/s)/Hz]
Unipolar NRZ	R	1
Polar NRZ	R	1
Unipolar RZ	$2R$	$\frac{1}{2}$
Bipolar RZ	R	1
Manchester NRZ	$2R$	$\frac{1}{2}$
Multinivel polar NRZ	R/ℓ	ℓ

Todos estos códigos binarios de línea tienen $\eta \leq 1$. La señalización multinivel puede utilizarse para alcanzar una eficiencia espectral mucho mayor, pero sus circuitos son más costosos. En la práctica, la señalización multinivel polar NRZ se utiliza en las líneas telefónicas digitales T1G, como se describe en la sección 3-9.

3–6 INTERFERENCIA INTERSIMBÓLICA

El ancho de banda absoluto de los pulsos multinivel rectangulares es infinito, y si estos pulsos se filtran inadecuadamente conforme en un sistema de comunicación, éstos se dispersarán en el tiempo, y el pulso para cada símbolo puede fugarse a las ranuras de tiempo adyacentes y causar *interferencia intersimbólica* (ISI), como se ilustra en la figura 3-23. Ahora, ¿cómo puede restringirse el ancho de banda sin introducir ISI? Por supuesto que, con un ancho de banda restringido, los pulsos tendrán cimas redondeadas (en lugar de planas). Nyquist [1928] fue el primero en estudiar este problema, y descubrió tres métodos para las formas de pulsos que pueden utilizarse para eliminar la ISI. Cada uno de estos métodos se estudiará en las secciones siguientes.

Considere un sistema de señalización digital como el que se muestra en la figura 3-24, donde la señal multinivel con cima plana a la entrada es

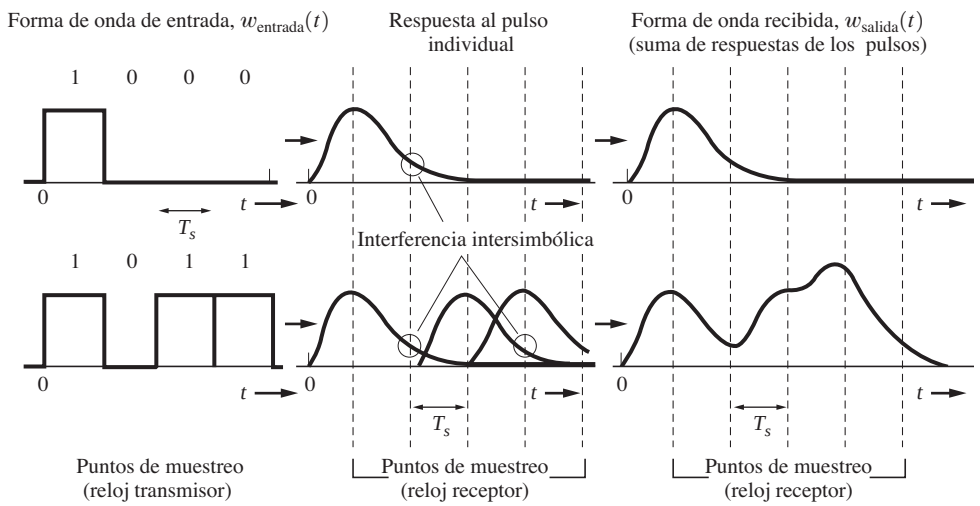

Forma de onda de entrada, $w_{entrada}(t)$
Respuesta al pulso individual
Forma de onda recibida, $w_{salida}(t)$ (suma de respuestas de los pulsos)
1 0 0 0
1 0 1 1
0
t
T_s
Interferencia intersimbólica
Puntos de muestreo (reloj transmisor)
Puntos de muestreo (reloj receptor)
Puntos de muestreo (reloj receptor)

Figura 3–23 Ejemplos de la ISI en los pulsos recibidos en un sistema de comunicación binaria.

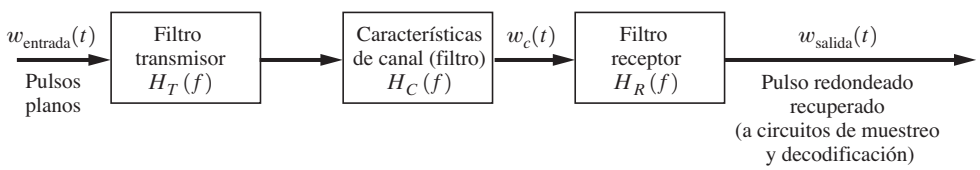


Figura 3–24 Sistema de transmisión de pulso en banda base.

$$w_{\text{in}}(t) = \sum_n a_n h(t - nT_s) \tag{3–58}$$

donde $h(t) = \Pi(t/T_s)$ y a_n puede tomar cualquiera de los L multiniveles permitidos ($L = 2$ para la señalización binaria). La velocidad de símbolo es $D = 1/T_s$ pulsos/s. Entonces la ecuación (3-58) puede escribirse como

$$\begin{aligned} w_{\text{entrada}}(t) &= \sum_n a_n h(t) * \delta(t - nT_s) \\ &= \left[\sum_n a_n \delta(t - nT_s)\right] * h(t) \end{aligned} \tag{3–59}$$

La salida del sistema lineal en la figura 3-24 sería sólo el tren de impulsos de entrada convolucionado con la respuesta de impulso equivalente para el sistema en general. Esto es,

$$w_{\text{salida}}(t) = \left[\sum_n a_n \delta(t - nT_s)\right] * h_e(t) \tag{3–60}$$

donde la respuesta de impulso equivalente es

$$h_e(t) = h(t) * h_T(t) * h_C(t) * h_R(t) \tag{3–61}$$

Note que $h_e(t)$ es también la forma del pulso que aparecerá a la salida del filtro receptor cuando un solo pulso plano se alimenta del filtro transmisor (figura 3-24).

La función equivalente de transferencia del sistema es

$$H_e(f) = H(f) H_T(f) H_C(f) H_R(f) \tag{3–62}$$

donde

$$H(f) = \mathcal{F}\left[\Pi\left(\frac{t}{T_s}\right)\right] = T_s\left(\frac{\text{sen}\pi T_s f}{\pi T_s f}\right) \tag{3–63}$$

La ecuación (3-63) se utiliza para que existan pulsos planos a la entrada del filtro transmisor. El filtro receptor está dado por

$$H_R(f) = \frac{H_e(f)}{H(f) H_T(f) H_C(f)} \tag{3–64}$$

donde $H_e(f)$ es la característica de filtrado general.

Cuando se escoge una $H_e(f)$ para minimizar la ISI, entonces el término $H_R(f)$, obtenido a partir de la ecuación (3-64), se conoce como *filtro ecualizador*. La característica de filtro de ecualización depende de $H_C(f)$, la respuesta de frecuencia del canal, así como de la $H_e(f)$ requerida. Cuando el canal consiste en líneas telefónicas de marcación, su función de transferencia cambia de llamada a llamada y el filtro ecualizador quizás requerirá ser un *filtro adaptable*. En este caso, dicho filtro ecualizador se ajusta por sí mismo para minimizar la ISI. En algunos esquemas adaptables, cada sesión de comunicación está precedida por un patrón de bits de prueba que se utiliza para adaptar el filtro electrónicamente para obtener la máxima apertura de ojo (es decir, la mínima ISI). Tales secuencias se llaman *secuencias de entrenamiento* o *aprendizaje y preámbulos*.

Se puede reescribir la ecuación (3-60) de tal manera que el tren de pulsos redondeado o suavizado a la salida del filtro receptor sea

$$w_{\text{salida}}(t) = \sum_n a_n h_e(t - nT_s) \tag{3–65}$$

La forma del pulso de salida está afectada por la de entrada, plana en este caso, así como por el filtro transmisor, el filtro del canal y el filtro receptor. Como en la práctica el filtro del canal está ya especificado, el problema resulta en determinar a los filtros transmisor y receptor para que minimicen la ISI en el pulso redondeado o suavizado a la salida del filtro receptor.

Desde el punto de vista de una aplicación, cuando se encuentran las funciones de transferencia requeridas de los filtros transmisor y receptor, entonces cada una puede multiplicarse por $Ke^{-j\omega T_d}$, donde K es un factor de ganancia conveniente y T_d es un retraso de tiempo conveniente. Estos parámetros se seleccionan de tal manera que faciliten la construcción de los filtros. El factor o factores $Ke^{-j\omega T_d}$ no afectarían al resultado de cero ISI pero, por supuesto, sí modificarán el nivel y el retraso de la forma de onda de salida.

Primer método de Nyquist (cero ISI)

El *primer método de Nyquist* para la eliminación de la ISI es usar una función de transferencia equivalente, $H_e(f)$, tal que la repuesta de impulso satisfaga la condición

$$h_e(kT_s + \tau) = \begin{cases} C, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \tag{3–66}$$

donde k es un entero, T_s el periodo de sincronización de símbolo (muestra), τ el desplazamiento en los tiempos de reloj de muestreo en el receptor comparado con los tiempos de reloj de los símbolos de entrada y C una constante diferente de cero. Esto es, para cada uno de los pulsos planos de nivel a presentes en la entrada del filtro transmisor cuando $t = 0$, el pulso recibido será $ah_e(t)$. Éste tendría un valor de aC cuando $t = \tau$ pero no causaría interferencia a otros tiempos de muestreo, ya que $h_e(kT_s + \tau) = 0$ para $k \neq 0$.

Ahora suponga que se selecciona una función (sen x)/x para $h_e(t)$. En particular, considere que $\tau = 0$ y escoja

$$h_e(t) = \frac{\operatorname{sen} \pi f_s t}{\pi f_s t} \tag{3–67}$$

donde $f_s = 1/T_s$. Esta respuesta de impulso satisface el primer criterio de Nyquist para una ISI de cero, la ecuación (3-66). Por lo tanto, si se diseñan los filtros de transmisión y recepción de forma tal que la función de transferencia general sea

$$H_e(f) = \frac{1}{f_s} \Pi\left(\frac{f}{f_s}\right) \tag{3–68}$$

entonces no existirá ISI. Aún más, al ancho de banda absoluto de esta función de transferencia es $B = f_s/2$. A partir de nuestro estudio acerca del teorema de muestreo y el teorema de dimensionalidad en el capítulo 2 y en la sección 3-4, se puede apreciar que esto equivale a la óptima filtración para producir un sistema con un ancho de banda mínimo. También permitirá una señalización a una velocidad de bauds de $D = 1/T_s = 2B$ pulsos/s, donde B es el ancho de banda absoluto del sistema. Sin embargo, el tipo (sen x)/x de la forma de pulso general tiene dos dificultades en la práctica:

- La característica de transferencia de amplitud general $H_e(f)$ tiene que ser plana sobre $-B < f < B$ y cero en cualquier otro caso. Esto es físicamente no realizable (es decir, la respuesta de impulso sería no causal y de duración infinita). Es difícil aproximar $H_e(t)$ debido a los bordes con inclinación de la función de transferencia del filtro cuando $f \pm B$.
- La sincronización del reloj en el circuito de muestreo decodificador tiene que ser casi perfecta, ya que el pulso (sen x)/x decae a $1/x$ y es igual a cero en las ranuras de tiempo adyacentes sólo cuando t tiene exactamente el valor del tiempo de muestreo correcto. Por lo tanto, la sincronización inexacta causará ISI.

Estas dificultades imponen la consideración de otras formas de pulso que tengan un ancho de banda ligeramente más grande. La idea es encontrar formas de pulso que crucen por cero en puntos de muestreo adyacentes y que aún así posean una envolvente que decae mucho más rápido que $1/x$ de tal manera que la inestabilidad en el reloj a los tiempos de muestreo no causen una ISI apreciable. Una solución para la función de transferencia equivalente, la cual tiene muchas características deseables, es el filtro de coseno elevado de Nyquist.

Filtro de coseno elevado de Nyquist

DEFINICIÓN. El *filtro de coseno elevado de Nyquist* tiene la función de transferencia

$$H_e(f) = \begin{cases} 1, & |f| < f_1 \\ \frac{1}{2}\left\{1 + \cos\left[\dfrac{\pi(|f| - f_1)}{2f_\Delta}\right]\right\}, & f_1 < |f| < B \\ 0, & |f| > B \end{cases} \tag{3–69}$$

donde B es el *ancho de banda absoluto* y los parámetros

$$f_\Delta = B - f_0 \tag{3–70}$$

y

$$f_1 \triangleq f_0 - f_\Delta \tag{3–71}$$

El término f_0 es el *ancho de banda de 6 dB* del filtro. El *factor de rolloff* (atenuación o decaída) se define como

$$r = \frac{f_\Delta}{f_0} \tag{3–72}$$

Esta característica de filtro se ilustra en la figura 3-25. La respuesta al impulso correspondiente es

$$h_e(t) = \mathcal{F}^{-1}[H_e(f)] = 2f_0\left(\frac{\text{sen } 2\pi f_0 t}{2\pi f_0 t}\right)\left[\frac{\cos 2\pi f_\Delta t}{1 - (4f_\Delta t)^2}\right] \tag{3–73}$$

La figura 3-26 muestra gráficas para la respuesta en frecuencia y la respuesta al impulso para factores de rolloff $r = 0$, $r = 0.5$ y $r = 1.0$. La característica $r = 0$ es el caso del mínimo ancho de banda, donde $f_0 = B$ y la respuesta al impulso es la forma de pulso (sen x)/x. A partir de esta figura puede observarse, *conforme se incrementa el ancho de banda absoluto* (por ejemplo, $r = 0.5$ o $r = 1.0$): (1) *los requisitos de filtrado se relajan*, aunque $h_e(t)$ sigue siendo no causal, y (2) *los requisitos de sincronización de reloj se relajan* también, ya que la envolvente de la respuesta de impulso decae más rápido que $1/|t|$ (en el orden de $1/|t|^3$ para valores grandes de t).

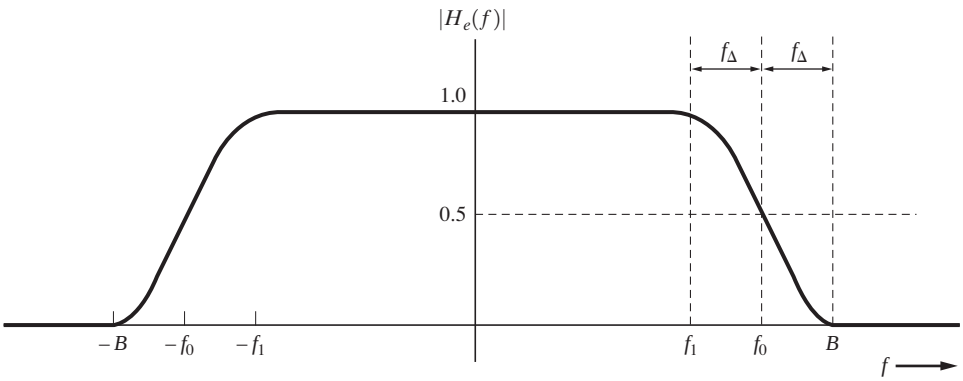


Figura 3–25 Características del filtro de coseno elevado de Nyquist.

A continuación se desarrolla una fórmula que proporciona la velocidad de bauds que puede soportar el sistema de coseno realzado sin ISI. En la figura 3-26b se observa que los ceros en la respuesta de impulso del sistema ocurren a $t = n/2f_0$, donde $n \neq 0$. Por lo tanto, se pueden insertar pulsos de datos a cada uno de estos puntos iguales a cero sin causar ISI. Es decir, en la ecuación (3-66) con $\tau = 0$ puede verse que el filtro de coseno realzado satisface el primer criterio de Nyquist para la ausencia de ISI si se selecciona un periodo de reloj de símbolo igual a $T_s = 1/(2f_0)$. La velocidad en bauds correspondiente es $D = 1/T_s = 2f_0$ símbolos/s. Esto es que *el ancho de banda de 6 dB del filtro de coseno realzado, f_0, está diseñado para ser la mitad de la velocidad de símbolo (bauds).* Empleando las ecuaciones (3-70) y (3-72) se observa que la velocidad en bauds que el sistema puede soportar es

$$D = \frac{2B}{1 + r} \tag{3–74}$$

donde B es el ancho de banda absoluto del sistema y r es el factor de rolloff.

Ejemplo 3–1 (CONTINUACIÓN)

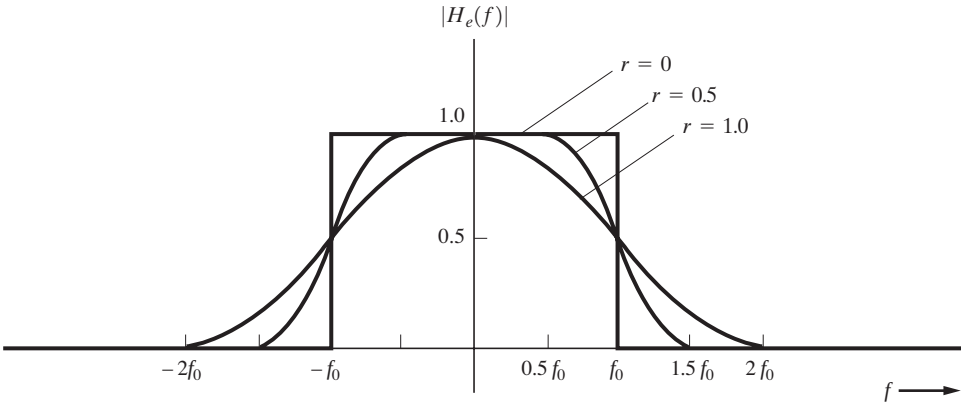
Suponga que una señal digital binaria, con señalización polar NRZ, se pasa a través de un sistema de comunicaciones con una característica de filtrado de coseno realzado. Considere que el factor de rolloff sea igual a 0.25 y la velocidad de bit de la señal digital de 64 kbits/s. Determine el ancho de banda absoluto de la señal digital filtrada.

De la ecuación (3-74) se tiene que el ancho de banda absoluto es $B = 40$ kHz. Esto es menor que el ancho de banda nulo de la señal digital sin filtrado, el cual es de 64 kHz.

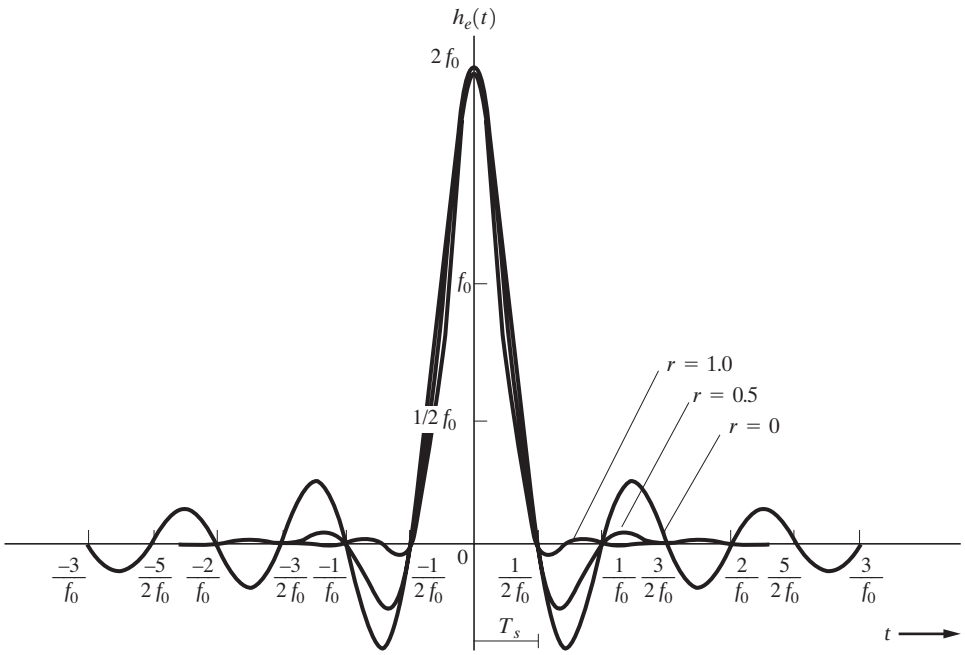
El filtro de coseno realzado también se conoce como *filtro de Nyquist*, y pertenece a una clase más general de filtros que satisfacen el primer criterio de Nyquist. Esta clase general se describe en el siguiente teorema:

TEOREMA. *Un filtro es de Nyquist si la función de transferencia efectiva es*

$$H_e(f) = \begin{cases} \Pi\left(\dfrac{f}{2f_0}\right) + Y(f), & |f| < 2f_0 \\ 0, & f \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{3–75}$$



(a) Respuesta en frecuencia de magnitud



(b) Respuesta al impulso

Figura 3–26 Respuesta en frecuencia y en tiempo para diferentes factores de rolloff.

donde Y(f) es una función real que es simétrica y par alrededor de f = 0, es decir,

$$Y(-f) = Y(f), \qquad |f| < 2f_0 \tag{3–76a}$$

y Y es simétrica e impar alrededor de f = f₀, esto es,

$$Y(-f+f_0) = -Y(f+f_0), \qquad |f| < f_0 \tag{3–76b}$$

Entonces no existirá interferencia intersimbólica a la salida del sistema si la velocidad de símbolo es

$$D = f_s = 2f_0 \tag{3–77}$$

Este teorema se ilustra en la figura 3-27. $Y(f)$ puede ser cualquier función real que satisfaga las condiciones de simetría de la ecuación (3-76). Por lo tanto, se puede utilizar un número infinito de características de filtro para producir una ISI de cero.

Demostración. Se requiere demostrar que la respuesta al impulso de este filtro es de 0 cuando $t = nT_s$, para $n \neq 0$, donde $T_s = 1/f_s = 1/(2f_0)$. Tomando la transformada de Fourier inversa de la ecuación (3-75) se tiene que

$$h_e(t) = \int_{-2f_0}^{-f_0} Y(f)e^{j\omega t}\,df + \int_{-f_0}^{f_0} [1 + Y(f)]e^{j\omega t}\,df + \int_{-f_0}^{2f_0} Y(f)e^{j\omega t}\,df$$

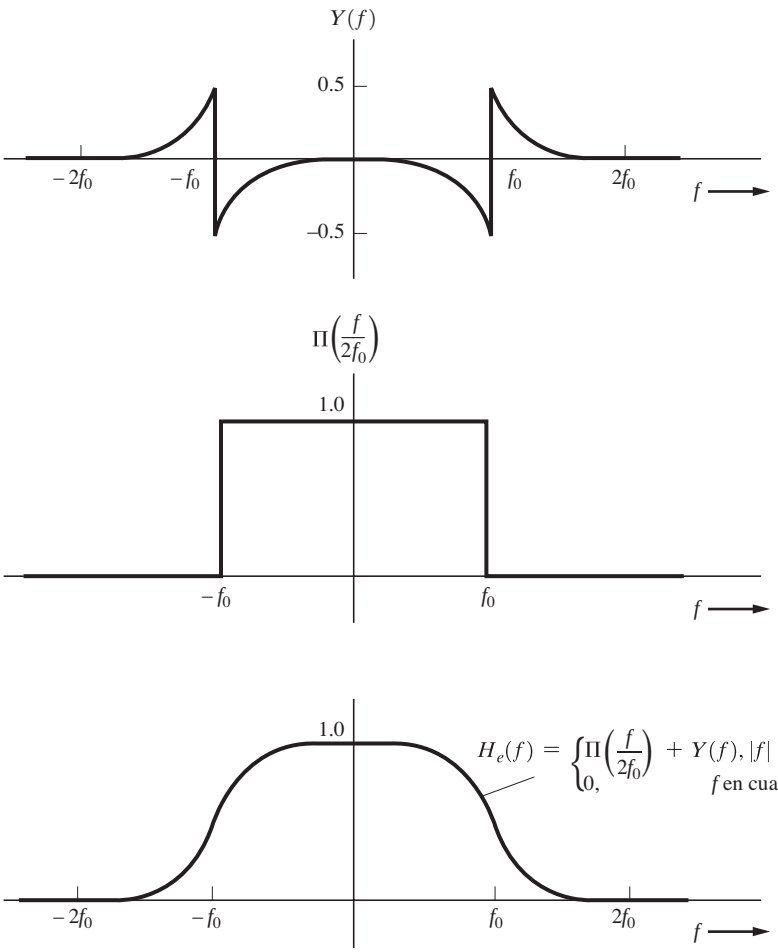


Figura 3–27 Característica del filtro de Nyquist.

o

$$h_e(t) = \int_{-f_0}^{f_0} e^{j\omega t}\, df + \int_{-2f_0}^{2f_0} Y(f) e^{j\omega t}\, df$$

$$= 2f_0 \left(\frac{\operatorname{sen}\omega_0 t}{\omega_0 t}\right) + \int_{-2f_0}^{0} Y(f) e^{j\omega t}\, df + \int_{0}^{2f_0} Y(f) e^{j\omega t}\, df$$

Considerando que $f_1 = f + f_0$ en la primera integral y $f_1 = f - f_0$ en la segunda integral, se obtiene que

$$h_e(t) = 2f_0 \left(\frac{\operatorname{sen}\omega_0 t}{\omega_0 t}\right) + e^{-j\omega_0 t} \int_{-f_0}^{f_0} Y(f_1 - f_0) e^{j\omega_1 t} df_1$$

$$+ e^{-j\omega_0 t} \int_{-f_0}^{f_0} Y(f_1 + f_0) e^{j\omega_1 t} df_1$$

De las ecuaciones (3-76a) y (3-76b) se sabe que $Y(f_1 - f_0) = -Y(f_1 + f_0)$, por lo tanto, se tiene que

$$h_e(t) = 2f_0 \left(\frac{\operatorname{sen}\omega_0 t}{\omega_0 t}\right) + j2 \operatorname{sen}\omega_0 t \int_{-f_0}^{f_0} Y(f_1 + f_0) e^{j\omega_1 t} df_1$$

Esta respuesta al impulso es real ya que $H_e(-f) = H_e^*(f)$ y satisface el primer criterio de Nyquist porque $h_e(t)$ es cero cuando $t = n/(2f_0)$, $n \neq 0$, y $\tau = 0$. Por lo tanto, si se muestrea a $t = n/(2f_0)$, entonces no habrá ISI.

Sin embargo, el filtro es no causal. Por supuesto que se puede utilizar un filtro con una característica de fase lineal $H_e(f)e^{-j\omega T_d}$ y no habrá ISI si el reloj se retrasa por T_d segundos, ya que el factor de $e^{-j\omega T_d}$ es la función de transferencia de una línea de retraso ideal. Esto desplazaría al pico de la respuesta de impulso hacia la derecha a lo largo del eje del tiempo y en tal caso el filtro será aproximadamente causal.

En el receptor digital, además de minimizar la ISI, también se desea minimizar el efecto del ruido en el canal por medio de un filtrado adecuado. Como se mostrará en el capítulo 6, el que minimiza el efecto del ruido en el canal es el *filtro acoplado*. Desafortunadamente, si se utiliza un filtro acoplado para $H_R(f)$ en el receptor, la característica general del filtro, $H_e(f)$, generalmente no satisfará la característica de Nyquist para una ISI mínima. Sin embargo, puede mostrarse que para el caso de un ruido gaussiano en el receptor, los efectos tanto de la ISI como del ruido en el canal se ven minimizados si los filtros de transmisión y de recepción están diseñados de tal manera que [Shanmugan, 1979; Sunde, 1969; Ziemer y Peterson, 1985]

$$|H_T(f)| = \frac{\sqrt{|H_e(f)|}\ [\mathcal{P}_n(f)]^{1/4}}{\alpha |H(f)|\ \sqrt{|H_c(f)|}} \tag{3–78a}$$

y

$$|H_R(f)| = \frac{\alpha \sqrt{|H_e(f)|}}{\sqrt{H_c(f)}\ [\mathcal{P}_n(f)]^{1/4}} \tag{3–78b}$$

donde $\mathcal{P}_n(f)$ es la PSD para el ruido a la entrada del receptor y α es una constante positiva arbitraria (por ejemplo, escoja $\alpha = 1$ por conveniencia). $H_e(f)$ se escoge a partir de cualquier característica de respuesta de frecuencia adecuada que satisfaga el primer criterio de Nyquist, como se discutió previamente, y $H(f)$ está dada por la ecuación (3-63). Cualquier respuesta de fase apropiada puede utilizarse para $H_T(f)$ y $H_R(f)$, siempre y cuando la respuesta de fase general del sistema sea lineal. Esto resulta en un retraso de tiempo constante contra frecuencia. Los filtros de transmisión y recepción dados por la ecuación (3-78) se convierten en *filtros de coseno realzado de raíz cuadrada* para el caso de una función de transferencia de canal plana, ruido plano y un filtro de coseno realzado equivalente.

Segundo y tercer métodos para el control de ISI de Nyquist

El *segundo método* de Nyquist para el control de la ISI permite que se introduzca cierta ISI en una forma *controlada* de tal manera que se pueda cancelar en el receptor y los datos recuperarse sin error si no hay ruido presente [Couch, 1993]. Esta técnica permite también la posibilidad de duplicar la velocidad de bit o, alternativamente, dividir al ancho de banda del canal por la mitad. Los telegrafistas observaron este fenómeno en los años de 1900 y se conoce como "duplicación de la velocidad de puntos" [Bennett y Davey, 1965].

En el *tercer método de Nyquist* para el control de la ISI, el efecto de ésta se elimina seleccionando $h_e(t)$ de manera tal que el área por debajo del pulso de $h_e(t)$ dentro del intervalo de símbolo deseado, T_s, sea diferente de cero, pero las áreas debajo de $h_e(t)$ en intervalos de símbolos adyacentes sean iguales a cero. Para la detección de datos, el receptor evalúa el área por debajo de la forma de onda del receptor sobre cada intervalo T_s. Se ha descubierto que los pulsos satisfacen el tercer criterio de Nyquist, pero su rendimiento en presencia de ruido es inferior a los ejemplos que se discutieron previamente [Sunde, 1969].

3–7 MODULACIÓN POR CODIFICACIÓN DE PULSOS DIFERENCIAL

Cuando se muestrean señales de audio o video con frecuencia se encuentran muestras adyacentes cercanas al mismo valor. Esto significa que existe mucha redundancia en las muestras de la señal y, en consecuencia, el ancho de banda y el rango dinámico de un sistema PCM se desperdician cuando se retransmiten estas muestras redundantes. Una manera de minimizar esta transmisión redundante y reducir el ancho de banda es transmitir las señales PCM correspondientes a la diferencia en las muestras adyacentes. Esto, definiéndolo directamente, es la *modulación por codificación de pulsos diferencial* (DPCM). En el receptor, el valor de la muestra en el presente se regenera utilizando el valor en el pasado, además del valor diferencial de actualización que se recibe sobre el sistema diferencial.

Más aún, el valor en el presente puede estimarse a partir del valor en el pasado con un *filtro de predicción*, mismo que puede lograrse usando una línea de retraso con tomas (un dispositivo de transferencia en cadena) para formar un *filtro transversal*, como se muestra en la figura 3-28. Cuando las ganancias de cada línea $\{a_l\}$ se configuran de tal manera que la salida del filtro predecirá el valor en el presente de los valores en el pasado, entonces tenemos un *filtro de predicción lineal* [Spilker, 1977]. Las óptimas ganancias óptimas de línea son una función de las propiedades de correlación de la señal de audio o de video [Jayant y Noll, 1984]. Las muestras de salida son

$$z(nT_s) = \sum_{l=1}^{K} a_l y(nT_s - lT_s) \tag{3–79a}$$

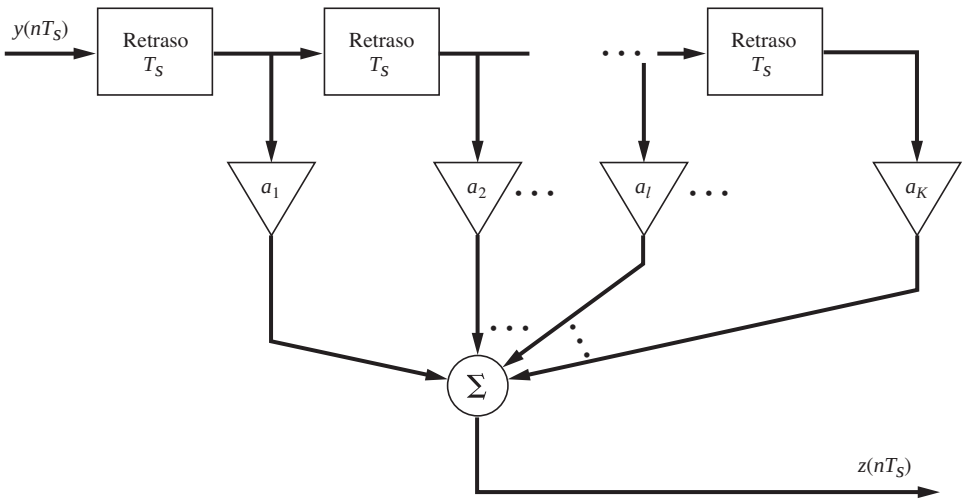


Figura 3–28 Filtro transversal.

o en notación simplificada,

$$z_n = \sum_{l=1}^{K} a_l y_{n-l} \tag{3–79b}$$

donde y_{n-1} denota la muestra a la entrada del filtro a un tiempo de $t = (n-1)T_s$ y existe un número de K dispositivos de retraso en el filtro transversal.

El filtro de predicción lineal puede utilizarse en una configuración diferencial para producir la DPCM. Se examinarán dos posibles configuraciones.

La primera configuración de DPCM, mostrada en la figura 3-29, utiliza al predictor para obtener una señal modulada en amplitud por pulso diferencial (DPAM) que está cuantificada y codificada para producir la señal DPCM. La señal analógica recuperada a la salida del receptor será la misma que aquella a la entrada del sistema, pero con la adición del ruido de cuantización *acumulado*. Se puede eliminar el efecto de acumulación con la configuración para el transmisor de la figura 3-30.

En la segunda configuración de DPCM, mostrada en la figura 3-30, el predictor opera sobre los valores cuantificados tanto en el transmisor como en el receptor para minimizar el ruido de cuantización en la señal analógica recuperada. La salida analógica en el receptor es la misma que la señal analógica de entrada al transmisor, excepto por el ruido de cuantización□más aún, el ruido de cuantización no se acumula, como era el caso en la primera configuración.

Se puede mostrar que la DPCM, al igual que la PCM, sigue la regla de 6 dB [□ayant y Noll, 1984]

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 6.02n + \alpha \tag{3–80a}$$

donde

$$-3 < \alpha < 15 \qquad \text{para voz a través de DPCM} \tag{3–80b}$$

y n es el número de bits de cuantificación ($M = 2^n$). A diferencia de la PCM modulada y expandida, la α para la DPCM varía sobre un amplio rango, dependiendo de las propiedades de la señal analógica de entrada.

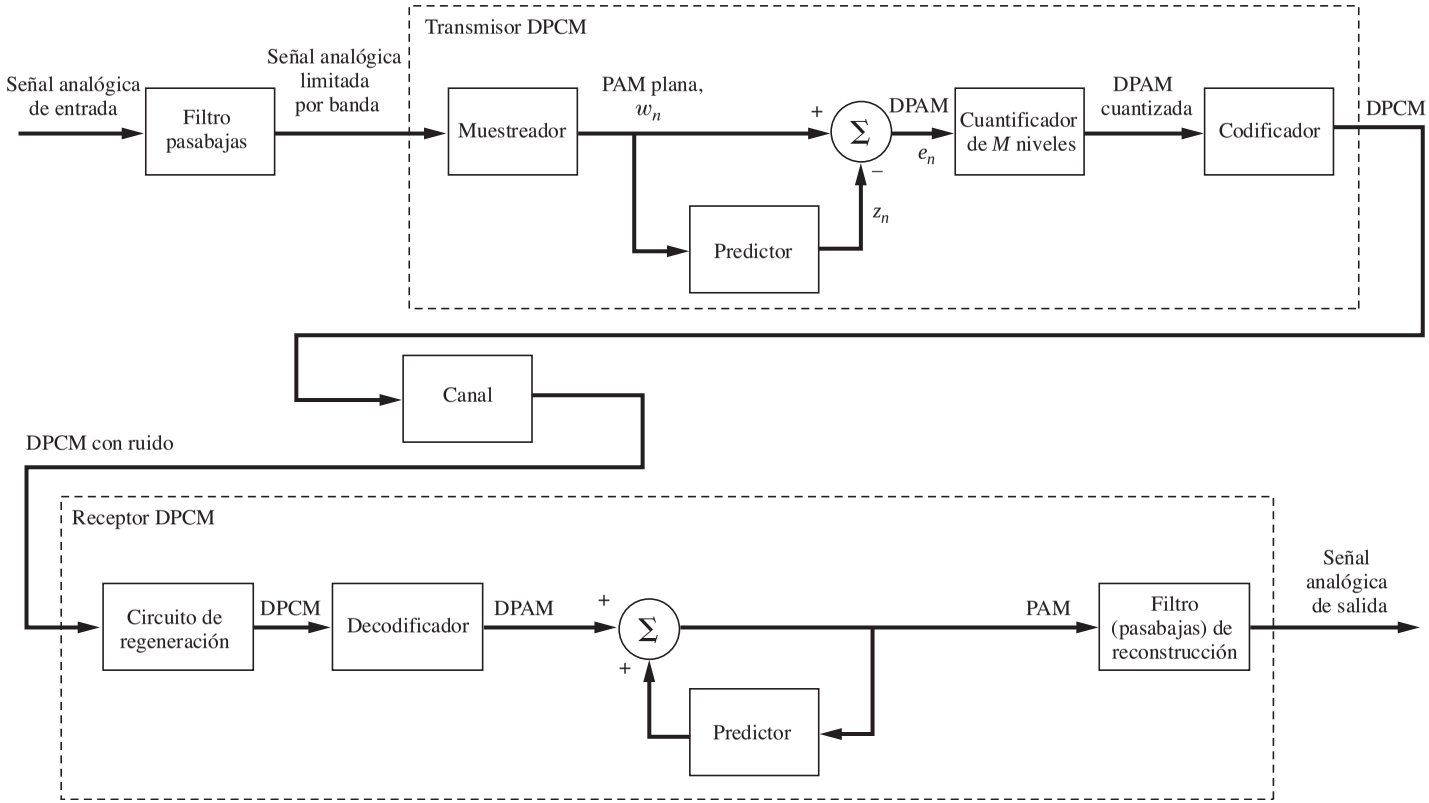


Figura 3–29 DPCM, utilizando predicción a partir de las muestras de la señal de entrada.

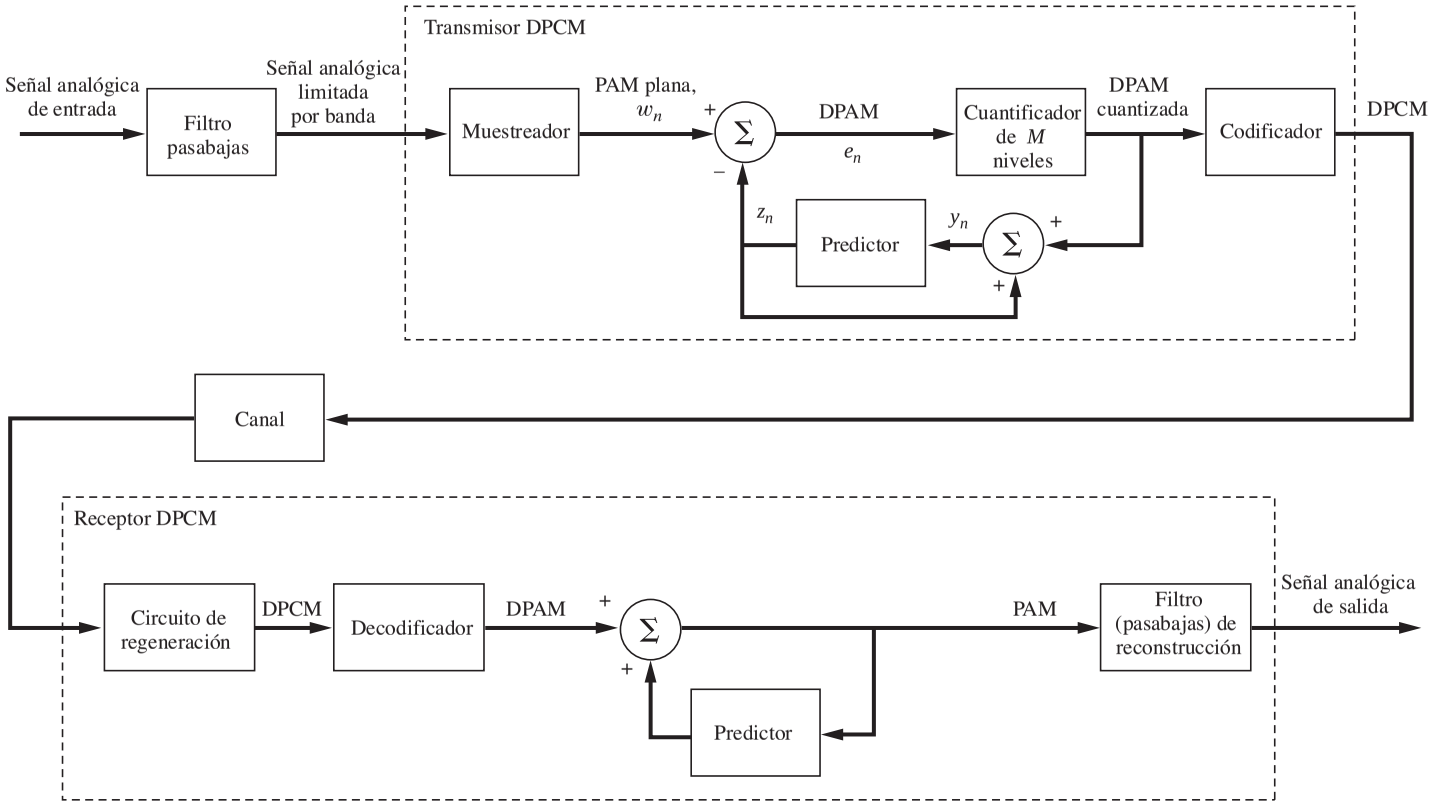


Figura 3–30 DPCM, utilizando predicción a partir de una señal diferencial cuantificada.

La ecuación (3-80b) proporciona el rango de α para una señal de calidad telefónica de frecuencia de voz (300 a 3,400 Hz). Este rendimiento de la DPCM puede compararse al de la PCM. La ecuación (3-26b) indica que $\alpha = -10$ dB para una PCM con modulación y expansión μ-law donde $\mu = 255$. Por lo tanto, puede existir una mejora en la SNR tan grande como 25 dB cuando se utiliza DPCM en lugar de PCM con $\mu = 255$. Como alternativa, para la misma SNR, la DPCM puede requerir de 3 o 4 bits menos que la modulación y expansión por PCM. Esta es la razón por la cual los sistemas DPCM telefónicos a menudo operan a una velocidad de bit de $R = 32$ kbits/s o $R = 24$ kbits/s en lugar de los 64 kbits/s estándares requeridos para la modulación y expansión por PCM.

El CCITT ha adoptado un estándar de DPCM de 32 kbits/s que utiliza una cuantización de 4 bits a una velocidad de 8 kmuestras/s para codificar señales VF con ancho de banda de 3.2 kHz [Decina y Modena, 1988]. Más aún, se ha adoptado un estándar DPCM CCITT de 64 kbits/s (cuantificación de 4 bits y 16 kmuestras/s) para la codificación de señales de audio que tienen un ancho de banda de 7 kHz. Un análisis detallado de los sistemas DPCM es complicado, y depende del tipo de señal de entrada presente, la velocidad de muestreo, el número de niveles de cuantificación empleados, el número de etapas en el filtro de predicción y los coeficientes de ganancias del predictor. Este tipo de análisis está fuera del enfoque de la presente obra, pero para profundizar se invita al lector a consultar las publicaciones sobre el tópico [Flanagan *et al.*, 1979; Jayant, 1974; Jayant y Noll, 1984; O'Neal, 1966b].

3–8 MODULACIÓN DELTA

Desde el punto de vista de un diagrama de bloques, la *modulación delta* (DM, por sus siglas en inglés) es un caso especial de DPCM en donde existen dos niveles de cuantificación. Como se muestra en la figura 3-30, para el caso en donde $M = 2$, la señal DPAM cuantizada es *binaria* y no se requiere del codificador, ya que la función de éste es convertir la señal DPAM multinivel a palabras de codificación binarias. Para el caso donde $M = 2$, la señal DPAM es una señal DPCM en donde las palabras de codificación son de un bit. El costo de un sistema DM es menor que el de uno DPCM ($M > 2$) debido a que no se requiere el convertidor analógico a digital (ADC) ni el convertidor digital a analógico (DAC). Esta es la principal atracción del esquema de DM, es decir, que es relativamente económico. De hecho, el precio puede reducirse aún más si se reemplaza el predictor por un circuito de integración de bajo costo, tal como un filtro pasabajas *RC*, como se muestra en la figura 3-31.

En el circuito DM mostrado en la figura 3-31, las operaciones del substractor y del cuantificador de dos niveles están implementadas mediante el uso de un comparador tal que la salida sea de $\pm V_c$ (binaria). En este caso, la señal DM es polar. La figura 3-32 muestra un conjunto de formas de onda asociadas con la modulación delta. En la figura 3-32a se ilustra una forma de onda analógica de entrada supuesta. Si las muestras instantáneas de la señal PAM plana se toman al inicio de cada periodo de muestreo, entonces se muestra la señal de salida del acumulador correspondiente.[15] Aquí se asume que el integrador actúa como un acumulador (por ejemplo, integrando impulsos) de tal manera que la salida del integrador al tiempo $t = nT_s$ está dada por

$$z_n = \frac{1}{V_c} \sum_{i=0}^{n} \delta y_i \tag{3–81}$$

[15] La frecuencia de muestreo, $f_s = 1/Ts$, se escoge tal que quede en el rango de $2B_{entrada} < f_s < 2B_{canal}$, donde $B_{entrada}$ es el ancho de banda de la señal analógica de entrada y B_{canal} es el ancho de banda del canal. El límite inferior previene el aliasing de la señal analógica y el límite inferior previene la ISI en la señal DM en el receptor. (Consulte el ejemplo 3-5 para mayores restricciones en la selección de f_s).

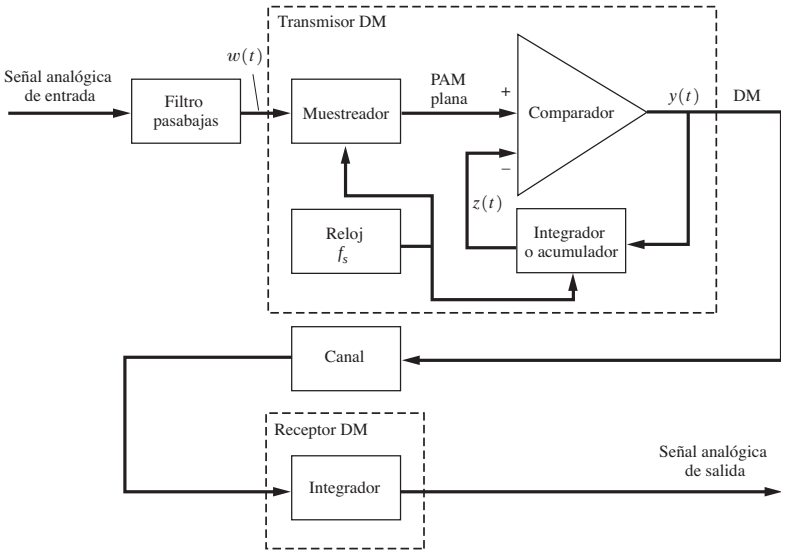
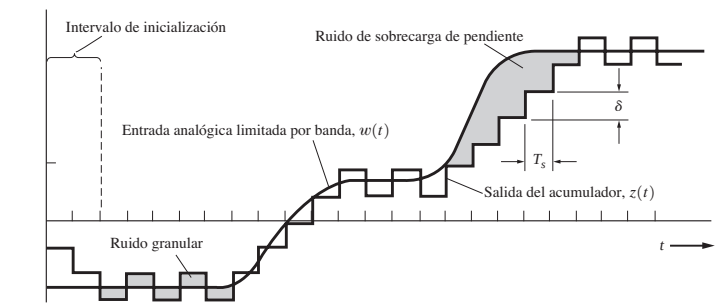


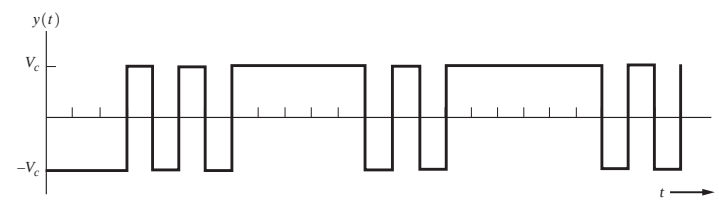
Figura 3–31 Sistema DM.

donde $y_i = y(iT_s)$ y δ es la ganancia del acumulador o tamaño de paso. La forma de onda DM de salida correspondiente se muestra en la figura 3-32b.

En el receptor la señal DM puede convertirse de regreso a una aproximación de señal analógica de aquella a la entrada del sistema. Esto se logra utilizando un integrador para el receptor que produce una forma de onda suavizada correspondiente a una versión suavizada de la forma de onda de salida del acumulador que está presente en el transmisor (figura 3-32a).



(a) Formas de onda de entrada analógica y de salida del acumulador



(b) Forma de onda de modulación delta

Figura 3–32 Formas de onda de un sistema DM.

Ruido granular y ruido de sobrecarga de pendiente

A partir de la figura 3-32a puede observarse que la señal de salida del acumulador no siempre sigue a la analógica de entrada. La señal de error del ruido de cuantificación puede clasificarse en dos tipos: *ruido de sobrecarga de pendiente* y *ruido granular*. El primero ocurre cuando el tamaño de paso δ es demasiado pequeño para que la salida del acumulador pueda seguir los cambios rápidos en la forma de onda de entrada. El segundo se presenta en cualquier tamaño de paso, pero es más pequeño cuando dicho tamaño es también pequeño. Por lo tanto, se desea tener un δ que sea lo más pequeño posible para minimizar el ruido granular. Éste, en un sistema DM, es similar al ruido granular en un sistema PCM, donde el ruido de sobrecarga de pendiente es un nuevo fenómeno debido a la codificación de la señal diferencial, en lugar de la propia señal original. Ambos fenómenos están también presentes en el sistema DPCM discutido previamente.

Es claro que debe existir un valor óptimo para el tamaño de paso δ, ya que si éste aumenta, el ruido granular también aumentará, pero el ruido de sobrecarga de pendiente disminuirá. Esta relación se ilustra en la figura 3-33.

Ejemplo 3–5 DISEÑO DE UN SISTEMA DM

Encuentre el tamaño de paso δ requerido para prevenir el ruido de sobrecarga de pendiente para el caso cuando la señal de entrada es una onda de seno.

La máxima pendiente que puede generarse por la salida del acumulador es

$$\frac{\delta}{T_s} = \delta f_s \tag{3–82}$$

Para el caso de la entrada de onda de seno, donde $w(t) = A \text{ sen } \omega_a t$, la pendiente es

$$\frac{dw(t)}{dt} = A\omega_a \cos\omega_a t \tag{3–83}$$

y la máxima pendiente de la señal de entrada es $A\omega_a$. Por consiguiente, para evitar la sobrecarga de pendiente se requiere que $\delta f_s > A\omega_a$, o

$$\delta > \frac{2\pi f_a A}{f_s} \tag{3–84}$$

Sin embargo, no se debe dejar que δ sea mucho mayor que este valor, o el ruido granular será demasiado grande.

La relación señal a ruido detectada resultante puede también calcularse. Se ha determinado experimentalmente que el espectro del ruido granular está distribuido uniformemente sobre la banda de frecuencia $|f| \leq f_s$. También puede mostrarse que el ruido de cuantización granular total es $\delta^2/3$

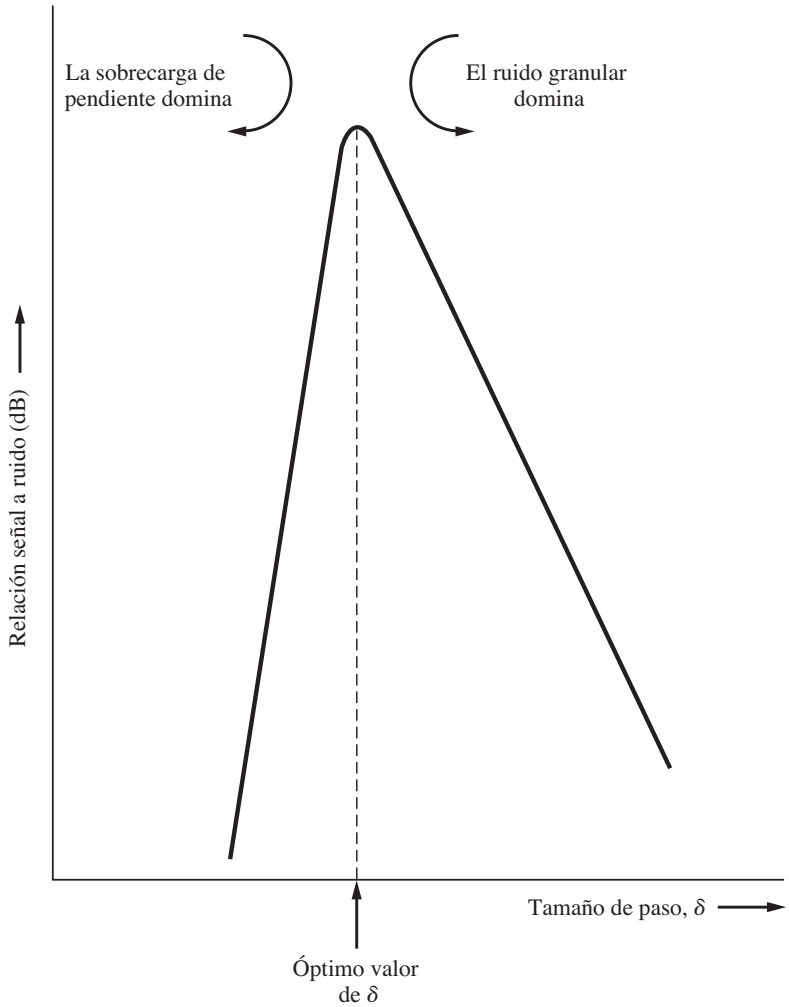


Figura 3–33 La relación señal a ruido a la salida de un sistema DM como una función del tamaño de paso.

(consulte la sección 7-7, donde $\delta/2$ de la PCM se reemplaza por δ para la DM). Por lo tanto, la PSD para el ruido es de $\mathcal{P}_n(f) = \delta^2/(6f_s)$. La potencia de ruido granular en la banda de la señal analógica, $|f| \leq B$, es

$$N = \langle n^2 \rangle = \int_{-B}^{B} \mathcal{P}_n(f)\, df = \frac{\delta^2 B}{3f_s} \tag{3–85}$$

o, de la ecuación (3-84), con igualdad,

$$N = \frac{4\pi^2 A^2 f_a^2 B}{3 f_s^3}$$

La potencia de la señal es

$$S = \langle w^2(t) \rangle = \frac{A^2}{2} \tag{3–86}$$

La relación señal a ruido de cuantización promedio resultante a la salida de un sistema DM con una señal de prueba senoidal es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \frac{3}{8\pi^2} \frac{f_s^3}{f_a^2 B} \tag{3–87}$$

donde f_s es la frecuencia de muestreo de DM, f_a la frecuencia de la entrada senoidal y B el ancho de banda del sistema receptor. Recuerde que se demostró que la ecuación (3-87) es válida sólo para señales de tipo senoidal.

Para las señales de audio de frecuencia de voz (VF), se ha demostrado que la ecuación (3-84) está demasiado restringida si $f_a = 4$ kHz y la sobrecarga de pendiente es despreciable si [de Jager, 1952]

$$\delta \geq \frac{2\pi\, 800 W_p}{f_s} \tag{3–88}$$

donde W_p es el valor pico de la forma de onda de audio de entrada $w(t)$. (Esto es debido al hecho de que las frecuencias a medio rango alrededor de 800 Hz dominan en la señal de VF.) Combinando las ecuaciones (3-88) y (3-85) se obtiene la S/N para el sistema DM con una señal de tipo VF, y se tiene que

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \frac{\langle w^2(t) \rangle}{N} = \frac{3 f_s^3}{(1{,}600\pi)^2 B} \left(\frac{\langle w^2(t) \rangle}{W_p^2}\right) \tag{3–89}$$

donde B es el ancho de banda de audio y $(\langle w^2(t) \rangle / W^2)$ es la relación potencia promedio de audio a potencia pico de audio.

Este resultado puede utilizarse para diseñar un sistema DM de VF. Por ejemplo, suponga que se desea una SNR de por lo menos 30 dB, que el ancho de banda de VF es de 4 kHz y la potencia promedio a pico de audio es $\frac{1}{2}$. Entonces la ecuación (3-89) resulta en una frecuencia de muestreo requerida de 40.7 kbits/s, o $f_s = 10.2B$. Es también de interés comparar este sistema DM con un sistema PCM que tiene el mismo ancho de banda (es decir, velocidad de bit). El número de bits, n, requerido para cada palabra PCM está determinado por $R = (2B)n = 10.2B$ o $n \approx 5$. Entonces la relación señal promedio a ruido de cuantificación del sistema PCM comparable es de 30.1 dB. (Consulte la tabla 3-2.) Por lo tanto, bajo estas condiciones, el sistema PCM con un ancho de banda comparable tiene el mismo rendimiento de SNR que el sistema DM. Aún más, repitiendo el procedimiento previo, se puede mostrar que si se desea una SNR mayor a 30 dB, entonces el sistema PCM tendrá una SNR mayor que la de un sistema DM con un ancho de banda comparable. Por otra parte, si una SNR *menor* a 30 dB fuera suficiente, entonces el sistema sobrepasaría en rendimiento (es decir, tendría una SNR mayor) al sistema PCM con el mismo ancho de banda. Note que la SNR para DM aumenta como f_s^3, o un aumento de 9 dB por octava en f_s.

También es posible mejorar el rendimiento de SNR de un sistema DM utilizando una doble integración en lugar de una sola, como se estudió aquí. Con un sistema de doble integración, la SNR aumenta como f_s^5, o 15 dB por octava [Cayant y Noll, 1984].

Modulación delta adaptable y modulación delta de pendiente continuamente variable

La *modulación delta adaptable* (ADM, por sus siglas en inglés) se utiliza para minimizar el ruido de sobrecarga de pendiente mientras se mantiene el ruido granular a un valor razonable. En este caso el tamaño de paso varía como una función de tiempo conforme la forma de onda de entrada cambia. El tamaño de paso se mantiene pequeño para minimizar el ruido granular hasta que el ruido de sobrecarga de pendiente empieza a dominar. Entonces se aumenta el tamaño de paso para reducir el ruido de sobrecarga de pendiente. El tamaño de paso puede adaptarse, por ejemplo, examinando los pulsos DM en la salida del transmisor. Cuando los pulsos DM consisten en una cadena de pulsos con la misma polaridad, el tamaño de paso se incrementa (consulte la figura 3-32) hasta que los pulsos DM empiezan a alternar en polaridad, en cuyo caso el tamaño de paso se disminuye, y así sucesivamente. Un posible algoritmo para variar el tamaño de paso se muestra en la tabla 3-7, donde cambia con una variación discreta. En este caso el tamaño de paso se establece normalmente a un valor δ cuando la señal ADM contiene datos con 1 y 0 alternantes o cuando ocurren dos 1 o 0 binarios sucesivos. Sin embargo, si ocurren tres 1 binarios sucesivos o tres 0 binarios sucesivos, entonces el tamaño de paso se incrementa a 2δ y 4δ para cuatro 1 o 0 binarios sucesivos. La figura 3-34 presenta un diagrama de bloques para este sistema ADM.

Se han publicado documentos con registros de demostración que ilustran la calidad de la ADM y otras técnicas digitales cuando se envían señales de voz a través de sistemas digitales y se recuperan a su salida [Flanagan *et al*., 1979□□ayant, 1974]. Otra variación de la ADM es la *modulación delta de pendiente continuamente variable* (CVSD). En este caso se utiliza un integrador en lugar de un acumulador, de tal manera que $z(t)$ se hace continuamente variable en lugar de en pasos de incrementos discretos, como se muestra en la figura 3-32a.

El Motorola MC34115 es un circuito integrado de CVSD que varía la pendiente (tamaño de paso) como una función de los últimos tres bits de la secuencia codificada de datos□el MC3418 posee un algoritmo similar de 4 bits. Ambos chips codec de CVSD pueden conectarse como moduladores (codificadores) o como demoduladores (decodificadores), y operarse con velocidades de bit que varían de 9.6 a 64 kbits/s. Se obtiene una SNR mejor a la salida del decodificador si se emplea una velocidad de bit más alta. Si se utilizan MC3418 en un sistema de 37.7 kbits/s, la SNR de salida será de 30 dB. Este rendimiento es similar al que se obtiene de los sistemas DM y PCM discutidos después de la ecuación (3-89).

Puede preguntarse: □cuál es mejor, PCM o DM? La respuesta, por supuesto, depende del criterio utilizado para su comparación y el tipo del mensaje. Si el objetivo es tener un sistema relativamente simple y barato, la modulación delta puede ser la mejor opción.

TABLA 3–7 ALGORITMO DE TAMAÑO DE PASO

Secuencia de datos[a]				Número de 1 o 0 binarios sucesivos	Algoritmo de tamaño de paso, $f(d)$
×	×	0	1	1	δ
×	0	1	1	2	δ
0	1	1	1	3	2δ
1	1	1	1	4	4δ

[a] ×, no importa

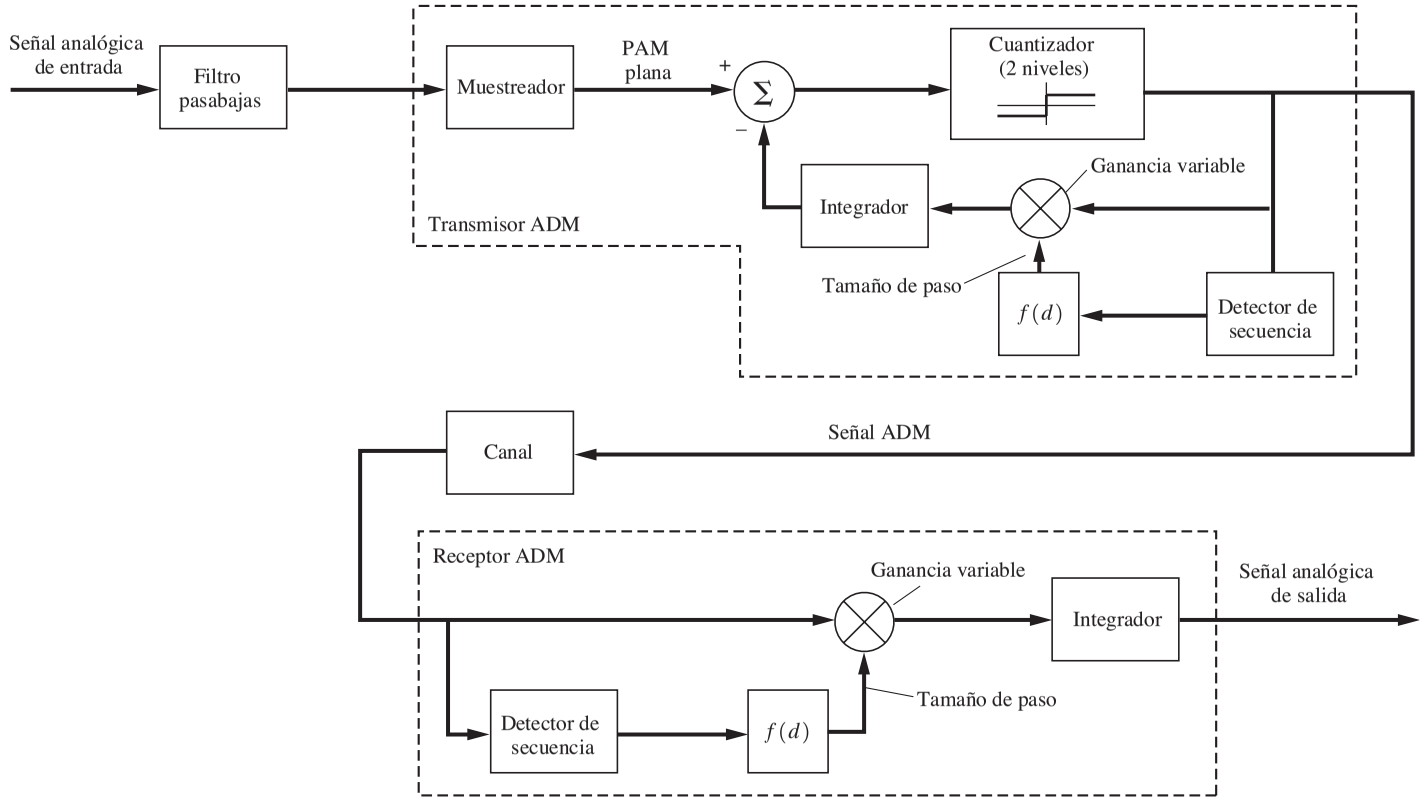


Figura 3–34 Sistema ADM.

Sin embargo, el costo de los ADC continúa bajando, así que esto puede no ser un factor. Si una SNR alta de salida es el criterio, entonces la PCM es probablemente la mejor [O'Neal, 1966a]. Si se desea tener una interfaz con equipo existente, entonces la compatibilidad es una consideración de suma importancia. En este aspecto, la PCM tiene la ventaja, ya que fue la primera en adoptarse y es ampliamente utilizada.

Codificación de voz

Los codificadores digitales de voz pueden clasificarse en dos categorías: codificadores de forma de onda y codificadores de voz. Los *codificadores de forma de onda* utilizan algoritmos para codificar y decodificar la voz de tal modo que la salida del sistema es una aproximación de la forma de onda de entrada. Los *codificadores de voz* se encargan de codificar la voz mediante la extracción utilizada para establecer valores para los parámetros en generadores de funciones y filtros los que, a su vez, sintetizan el sonido de voz de salida. Generalmente la forma de onda de salida del codificador de voz no se aproxima a la de entrada y puede tener un sonido artificial o poco natural. A pesar de que las palabras del orador pueden entenderse claramente, éste puede no ser identificado. Con los codificadores de forma de onda (por ejemplo, PCM, DPCM, DM y CVSD), se ha demostrado que la voz con calidad de VF puede codificarse a velocidades de bit tan bajas como 24 kbits/s. Técnicas más avanzadas reducen la velocidad de bit requerida a 8 kbits/s y la codificación de voz es posible aún a 2 kbits/s. Algunas técnicas disponibles para lograr una codificación a bajas velocidades de bit son la predicción lineal (discutida en cuanto a su aplicación en DPCM), codificación de subbanda adaptable y cuantización vectorial. La codificación de subbanda adaptable atribuye bits de acuerdo al espectro del habla de entrada y las propiedades de escucha. Con la cuantización vectorial se codifican bloques enteros de muestras a la vez, en lugar de muestra por muestra. Algunos ejemplos son la predicción lineal excitada por codificación (CELP) y predicción lineal excitada por suma vectorial (VSELP), empleada en teléfonos celulares digitales, como se describen en la sección 8-8. Estos codificadores emplean técnicas de *análisis por síntesis* basadas en la predicción lineal (LPAS), donde la señal de voz del orador se divide en segmentos de 20 ms para su análisis y síntesis. El codificador genera secuencias a través de los posibles patrones de excitación en libros de codificación y los posibles valores para los parámetros del filtro para encontrar una forma de onda sintetizada que resulta en la mejor pareja para un segmento de voz. Los parámetros del codificador que especifican esta óptima pareja son entonces transmitidos al receptor a través de datos digitales. Los datos recibidos establecen los parámetros para el sintetizador de voz receptor de tal forma que la señal de voz pueda reproducirse para el oyente.

Uno debe esforzarse en usar codecs o codificadores con una velocidad de bit más baja para reducir los costos en la transmisión de datos. Sin embargo, este tipo de codecs requiere de una mayor complejidad en los cálculos, producen retrasos más largos en la voz reproducida a la salida del sistema y tienen una calidad de voz más pobre. (Para mayor detalle acerca de los codificadores de voz y de sus ventajas y desventajas, consulte otras obras [por ejemplo, Gershio, 1994; Spanias, 1994; Budagavi y Gibson, 1998].)

3–9 MULTIPLEXIÓN POR DIVISIÓN DE TIEMPO[16]

DEFINICIÓN. La *multiplexión por división* (TDM) es el entrelazado en el tiempo de muestras de varias fuentes de tal manera que la información de dichas fuentes pueda transmitirse en forma serial sobre un solo canal de comunicación.

[16] En este método, un canal o sistema común se comparte entre muchos usuarios. Otros métodos para compartir un sistema común de comunicación se discuten bajo el tema de técnicas de acceso múltiple en la sección 8-5.

La figura 3-35 ilustra el concepto de TDM aplicado a tres fuentes analógicas sobre las cuales se realiza una multiplexión a través de un sistema PCM. Para mayor conveniencia, el muestreo natural se presenta junto a la forma de onda TDM PAM por compuerta correspondiente. En la práctica se utiliza un conmutador electrónico para la conmutación (muestreador). En este ejemplo, el ancho de pulso de la señal TDM PAM es $T_s/3 = 1(3f_s)$, y el ancho de pulso de la señal TDM PCM es $T_s/(3n)$, donde n es el número de bits utilizados en la palabra PCM. En este caso $f_s = 1/T_s$ denota la frecuencia de rotación para el conmutador y f_s satisface la velocidad de Nyquist para la fuente analógica con el mayor ancho de banda. En algunas aplicaciones en donde el ancho de banda de las fuentes es notablemente diferente, las de un ancho de banda mayor pueden conectarse a varias posiciones del conmutador en el muestreador de tal forma que se puedan muestrear con mayor frecuencia que las de ancho de banda pequeño.

En el receptor, el deconmutador (muestreador) debe estar sincronizado con la forma de onda entrante de modo que las muestras PAM correspondientes a la fuente 1, por ejemplo, aparezcan a la salida del canal 1. A esto se le conoce como *sincronización de trama*. Se emplean filtros pasabajas para reconstruir las señales analógicas a partir de las muestras PAM. La ISI resultante de un pobre filtrado en el canal causará que muestras PCM de un canal aparezcan en otro canal, aun cuando se mantenga una sincronización de bit y de trama perfectas. La presencia de una señal de un canal a través de otro se conoce como *diafonía* o interferencia.

Sincronización de trama

La *sincronización de trama* es necesaria en el receptor TDM tal que los datos multiplexados recibidos se ordenarán y se dirigirán al canal de salida apropiado. La sincronización de trama puede proveerse al circuito demultiplexor (demux) receptor enviando una señal de sincronización de trama a partir del transmisor y a través de un canal separado, o derivando la sincronización de trama a partir de la misma señal TDM. Debido a que la implementación del primer método es obvia, se hará una mayor concentración en el segundo, el cual generalmente es más económico debido a que no se requiere de un canal separado para la sincronización. Como se ilustra en la figura 3-36, puede realizarse una multiplexión de la sincronización de trama con las palabras de información en un sistema TDM de N canales mediante la transmisión de una palabra única de sincronización de K bits al inicio de cada trama. Como se muestra en la figura 3-37, la sincronización de trama se recupera a partir de la señal TDM corrupta utilizando un circuito sincronizador de trama que intercorrelaciona la señal TDM regenerada con la palabra única de sincronización esperada $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$. Los elementos del vector de la palabra única de sincronización $\mathbf{s}$, denotada por $s_1, s_2 \ldots s_j, \ldots s_k$, son 1 o 0 binarios (los cuales, para una lógica TTL, representarían + 5 V y 0 V, respectivamente). El bit actual de la señal TDM regenerada se sincroniza en la primera etapa del registro de desplazamiento y después se desplaza a la siguiente etapa en el próximo pulso de reloj de tal manera que los K bits más inmediatos siempre se almacenan en el registro de desplazamiento. Los términos s_j en los triángulos debajo del registro de desplazamiento denotan la presencia o ausencia de un inversor. Esto es, si s_j es un 0 binario, existirá un inversor en la j-ésima etapa□si s_j es un 1 binario, no existirá un inversor. El detector de coincidencias es una compuerta AND de K entradas.

Si la palabra única de sincronización está presente en el registro de desplazamiento, todas las entradas al detector de coincidencias serán 1 binarios y la salida del detector de coincidencias será también un 1 binario (es decir, un alto nivel). De otra manera, la salida del detector de coincidencias es un 0 binario (es decir, un bajo nivel). Por lo tanto, la salida del detector de coincidencias se disparará a un nivel alto sólo durante el intervalo de T_b segundos cuando la palabra de sincronización está perfectamente alineada en el registro de desplazamiento. Por lo tanto, la sincronización de trama recupera la señal de sincronización para ésta.

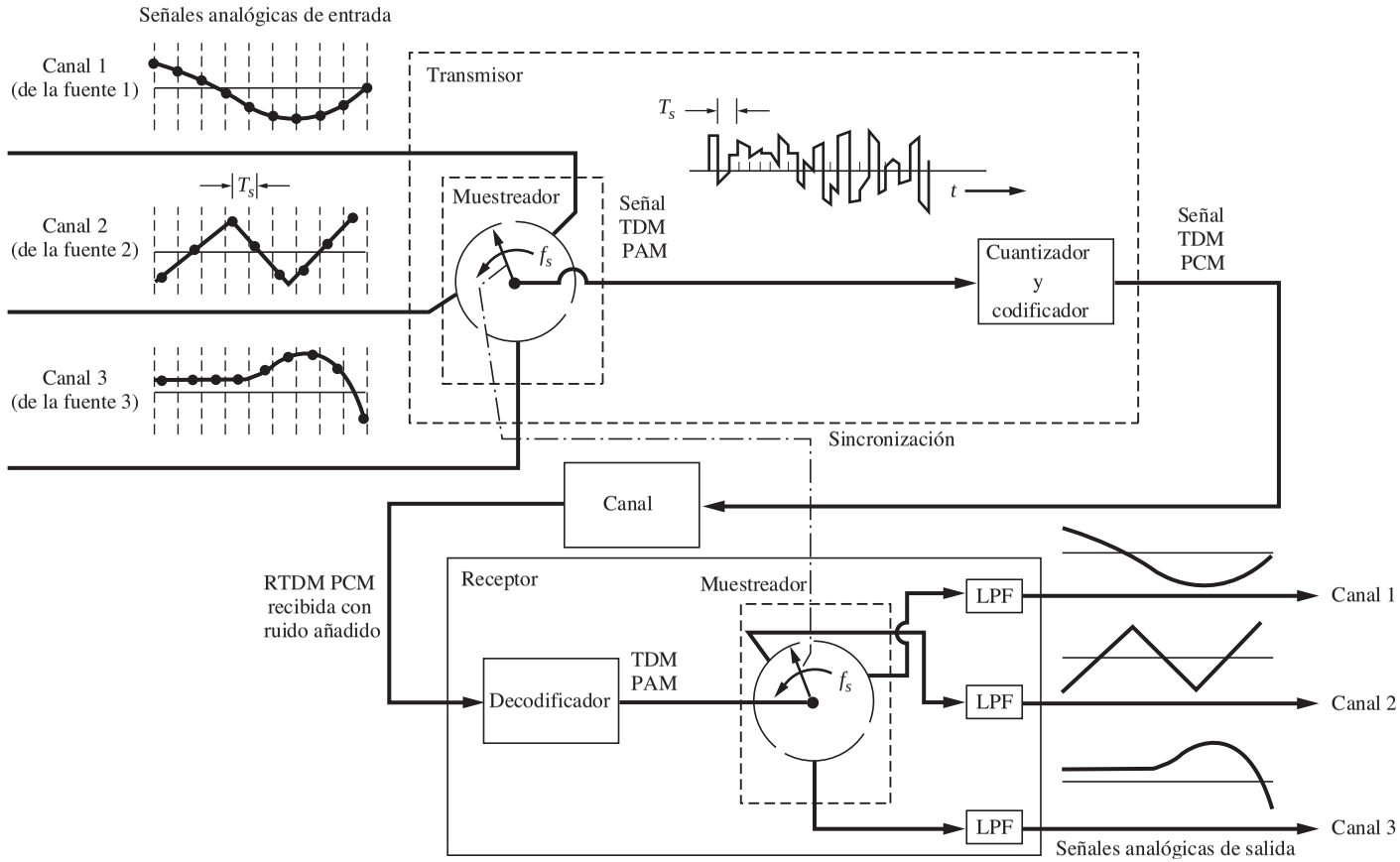


Figura 3–35 Sistema TDM PCM de tres canales.

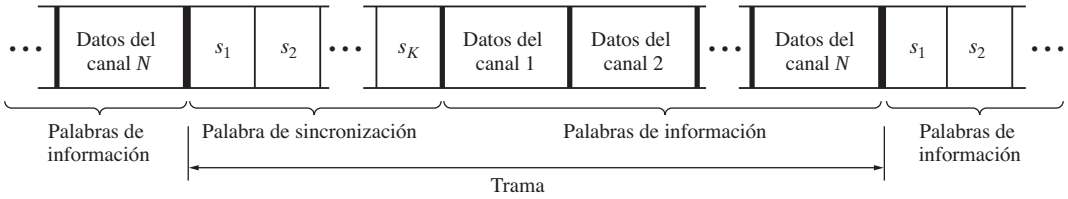


Figura 3–36 Formato de sincronización de trama para TDM.

Si K bits de información sucesivos resultan ser iguales que los bits en la palabra de sincronización, ocurrirán falsos pulsos de sincronización a la salida. Para datos TDM igualmente probables, la probabilidad de ocurrencia de esta sincronización falsa es igual a la probabilidad de obtener la palabra única de sincronización, la cual es

$$P_f = \left(\frac{1}{2}\right)^K = 2^{-K} \tag{3–90}$$

En el diseño del sincronizador de trama, esta ecuación puede utilizarse para determinar el número de bits, K, requeridos en la palabra de sincronización de manera tal que la probabilidad de un enganche falso cumplirá con las especificaciones. Una alternativa es usar técnicas más sofisticadas, como ventanas de apertura para suprimir pulsos falsos de enganche [Ha, 1986]. Las palabras de información también pueden codificarse de tal forma que no se permita que tengan cadenas de bits que asemejan o igualan la palabra única de sincronización.

Debido a que la salida del detector de coincidencias es una intercorrelación digitalizada de la palabra de sincronización con la palabra de K bits almacenada en el registro de desplazamiento, la palabra de sincronización se debe escoger de tal manera que su función de autocorrelación, $R_s(k)$, tenga las propiedades deseables: $R_s(0) = 1$ y $R(k) \approx 0$ para $k \neq 0$. Los códigos PN, estudiados en la sección 5-13, son casi ideales en este aspecto. Por ejemplo, si $P_f = 4 \times 10^{-5}$ es la probabilidad permitida para una sincronización falsa, entonces, según la ecuación (3-90), se requiere de una palabra de sincronización de $K = 15$ bits. En consecuencia, también se necesita un registro de desplazamiento de 15 etapas para el sincronizador de trama en el receptor. La palabra de sincronización PN de 15 bits puede generarse en el transmisor utilizando un registro de desplazamiento de cuatro etapas.

Líneas síncronas y asíncronas

Para la sincronización de bit, los sistemas de transmisión de datos están diseñados para operar mediante líneas de datos seriales, ya sea síncronas o asíncronas. En un sistema *síncrono*, cada dispositivo está diseñado de tal forma que su reloj interno es relativamente estable por un largo espacio de tiempo, y el reloj del dispositivo está sincronizado a un reloj maestro del sistema. Cada bit de los datos se dispara en sincronía con el reloj maestro. Una línea de sincronización separada puede proveer la señal de sincronización o ésta estar incorporada en la señal de datos (por ejemplo, con códigos de línea Manchester). Además, la transmisión síncrona requiere de un alto nivel de sincronización para permitir que el receptor determine el inicio y el final de los bloques de datos. Esto se logra con la sincronización de trama discutida previamente y con protocolos de enlace de datos, como se describen en el apéndice C.

En los sistemas *asíncronos*, la sincronización es precisa sólo para los bits dentro de cada caracter (o palabra). Esto se conoce también como señalización inicio-fin, ya que cada carácter consiste de un "bit de inicio" que inicia el reloj del receptor y concluye con uno o dos "bits finales" que detienen al reloj. Usualmente se utilizan dos bits de paro con terminales que generan una señal a velocidades menores que 300 bits/s y un bit de paro si $R \geq 300$ bits/s. Por lo tanto, en el caso de

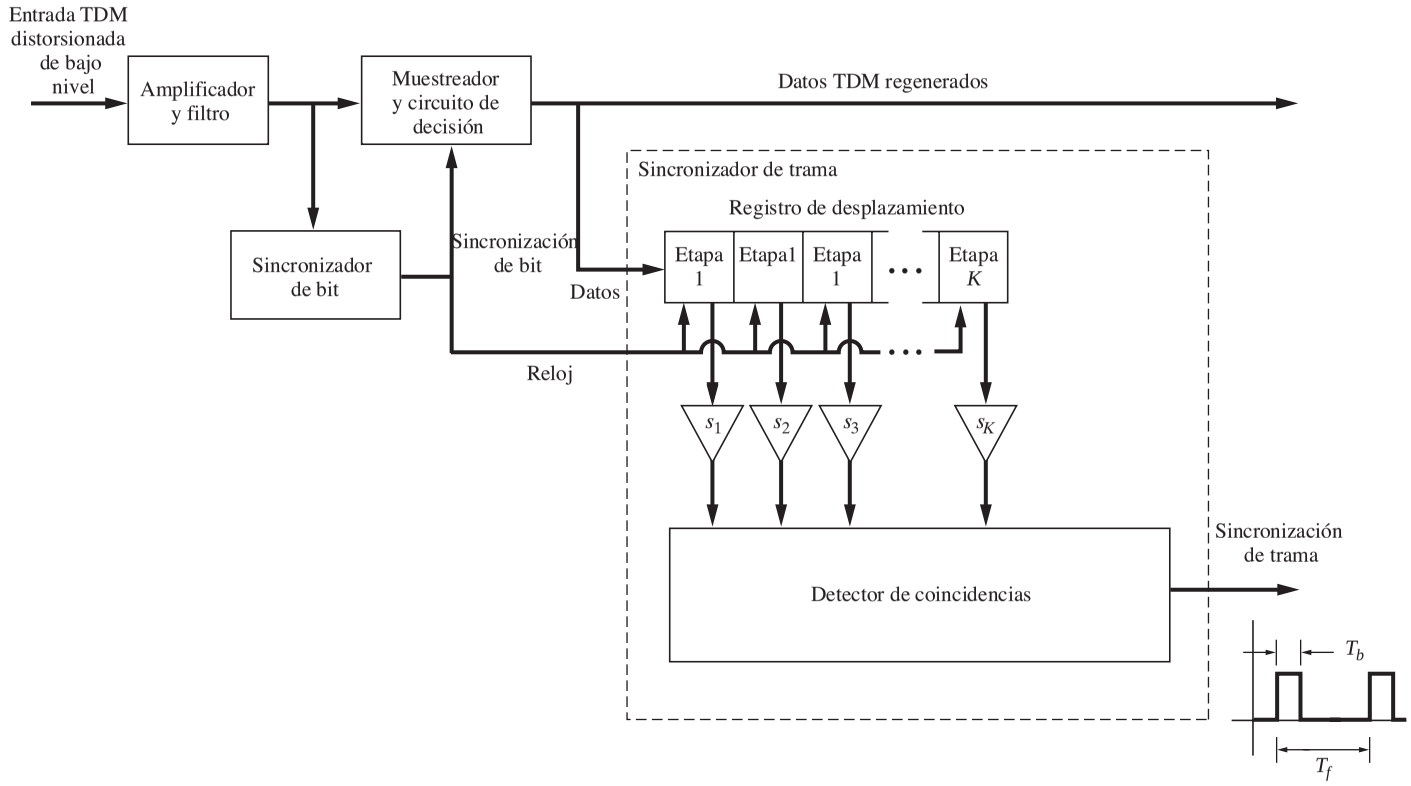


Figura 3–37 Sincronizador de trama con circuitería de entrada de receptor TDM.

líneas asíncronas, el reloj del receptor se inicia aperiódicamente y no se necesita de sincronización con el reloj maestro. La frecuencia del reloj del receptor es lo suficientemente exacta para mantener la sincronización de bit correcta a lo largo de la duración de una palabra. Este modo aperiódico de operación es ideal para terminales con teclado, en donde el usuario no teclea a un paso uniforme y su velocidad de entrada es mucho más lenta que la de un sistema de comunicación de datos. Estas terminales asíncronas a menudo utilizan un código ASCII de 7 bits (consulte el apéndice C) y el caracter completo consiste en un bit de inicio, 7 bits del código ASCII, un bit de paridad y un bit de paro (cuando $R \geq 300$ bits/s). Esto proporciona una longitud total del caracter de 10 bits. En el TDM del tipo asíncrono se lleva a cabo una multiplexión de las diferentes fuentes en base al *entrelazado de caracteres* (es decir, de caracter en caracter) en lugar de un entrelazado de bit a bit. El sistema síncrono de transmisión es más eficiente, ya que no requiere bits de inicio o de paro□sin embargo, necesita que la señal de sincronización se envíe junto a los datos y que el receptor se sincronice a dicha señal.

Se pueden emplear TDM "*inteligentes*" para *concentrar* los datos que provienen de muchas terminales o fuentes diferentes. Estos TDM son capaces de suministrar conversiones de velocidad, código y protocolo. A la entrada de una macrocomputadora, éstos se conocen como *procesadores frontales*. El hardware en el TDM inteligente consiste en microprocesadores o microcomputadoras. Generalmente se conectan a las líneas de datos de entrada que tienen datos presentes y momentáneamente desconectan las líneas que no tienen datos presentes. Por ejemplo, una terminal con teclado se desconecta del sistema cuando está inactiva, a pesar de que para el usuario parece no estar desconectada, y se conecta conforme se envía cada caracter o bloque de datos. Por lo tanto, la velocidad de datos de salida del multiplexor es mucho menor que la suma de las capacidades de datos de las líneas de entrada. Esta técnica se conoce como multiplexión *estadística*, la cual permite que muchas terminales más estén conectadas en línea al sistema.

Los multiplexores pueden clasificarse en tres tipos generales. El primer tipo de TDM es aquel que se conecta a líneas síncronas. El segundo tipo de TDM es el que se conecta a líneas casi síncronas. En este caso, los relojes individuales de las fuentes de datos de entrada no están exactamente sincronizados en frecuencia. Por lo tanto, existirá alguna variación en las velocidades de bit entre los datos provenientes de diferentes fuentes. Además, en algunas aplicaciones las velocidades de reloj de los flujos de datos de entrada no están relacionadas por un número racional. En estos casos, la señal TDM de salida deberá sincronizarse a una velocidad mayor al valor nominal para acomodar aquellas entradas que no son síncronas. Cuando un nuevo bit de entrada no está disponible al tiempo de sincronización del multiplexor, debido a la falta de dicha sincronización, se insertan *bits de relleno*, los cuales son ficticios, al flujo de datos TDM de salida. Esta estrategia se ilustra mediante el multiplexor de entrelazado de bits mostrado en la figura 3-38. Los bits de relleno pueden ser 1 o 0 binarios, o algún patrón alternante, dependiendo de lo que el diseñador de sistema seleccione. El tercer tipo de TDM es el que opera con fuentes asíncronas y produce una salida asíncrona de alta velocidad (sin requerir bits de relleno) o salidas síncronas de alta velocidad (necesitando bits de relleno).

Ejemplo 3–6 DISEÑO DE UN MULTIPLEXOR POR DIVISIÓN DE TIEMPO

Diseñe un multiplexor por división de tiempo que soportará once fuentes. Suponga que las fuentes tienen las siguientes especificaciones:

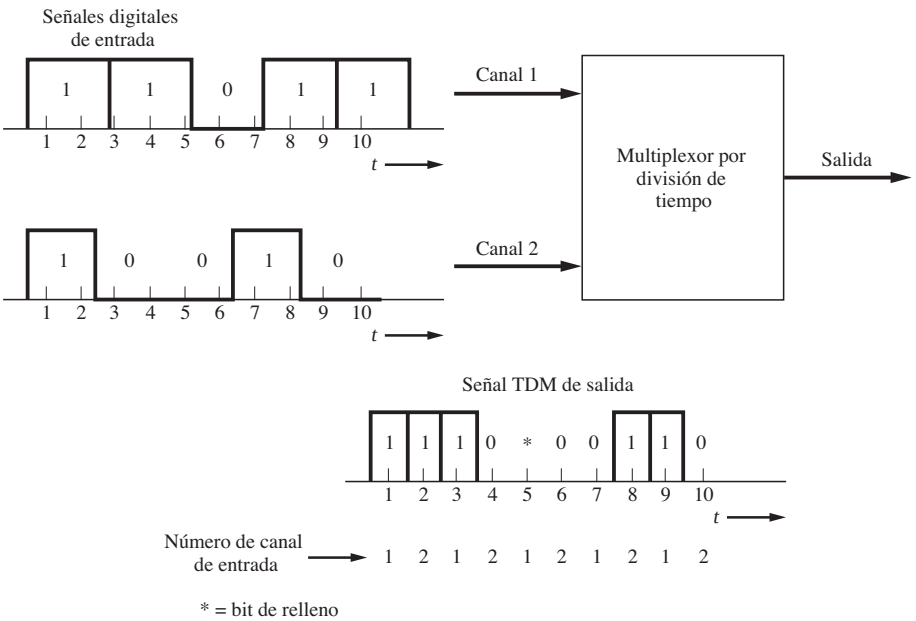

Señales digitales
de entrada
1 1 0 1 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
t
Canal 1
Multiplexor por
división de
tiempo
Salida
1 0 0 1 0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
t
Canal 2
Señal TDM de salida
1 1 1 0 * 0 0 1 1 0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
t
Número de canal
de entrada
1 2 1 2 1 2 1 2 1 2
* = bit de relleno

Figura 3–38 TDM por entrelazado de bits de dos canales con relleno de pulsos.

Fuente 1. Analógica, ancho de banda de 2 kHz.
Fuente 2. Analógica, ancho de banda de 4 kHz.
Fuente 3. Analógica, ancho de banda de 2 kHz.
Fuentes 4-11. Digitales, síncronas a 7,200 bits/s.

Ahora suponga que las fuentes analógicas se convertirán a palabras PCM de 4 bits y que, para simplificar, la sincronización de trama será provista mediante un canal separado y se utilizarán líneas síncronas TDM. Para satisfacer la velocidad de Nyquist para las fuentes analógicas, las fuentes 1, 2 y 3 necesitan muestrearse a 4, 8 y 4 kHz, respectivamente. Como se muestra en la figura 3-39, esto puede lograrse rotando el primer conmutador a $f_1 = 4$ kHz y muestreando dos veces en cada revolución a la fuente 2. Cada una de las muestras analógicas se convierte en una palabra PCM de 4 bits, así que la velocidad de la señal TDM PCM en la salida del ADC es de 64 kbits/s. Los datos digitales a la salida del ADC pueden combinarse con los datos de las fuentes digitales mediante un segundo conmutador rotando a $f_2 = 8$ kHz y conectado de tal manera que una señal PCM de 64 kbits/s esté presente en 8 de 16 terminales. Este arreglo proporciona una velocidad efectiva de muestreo de 64 kbits/s. Las fuentes digitales se conectan a las otras ocho terminales para generar una velocidad de transferencia de datos de 8 kbits/s por cada fuente. □a que las fuentes digitales suministran un flujo de datos de 7.2 kbit/s, se utiliza el relleno de pulsos para elevar la velocidad fuente a 8 kbits/s.

El ejemplo anterior ilustra la principal ventaja de TDM: puede soportar fácilmente fuentes tanto analógicas como digitales. Desafortunadamente, cuando las señales analógicas se convierten a señales digitales sin reducción en redundancia, éstas consumen gran parte de la capacidad del sistema digital.

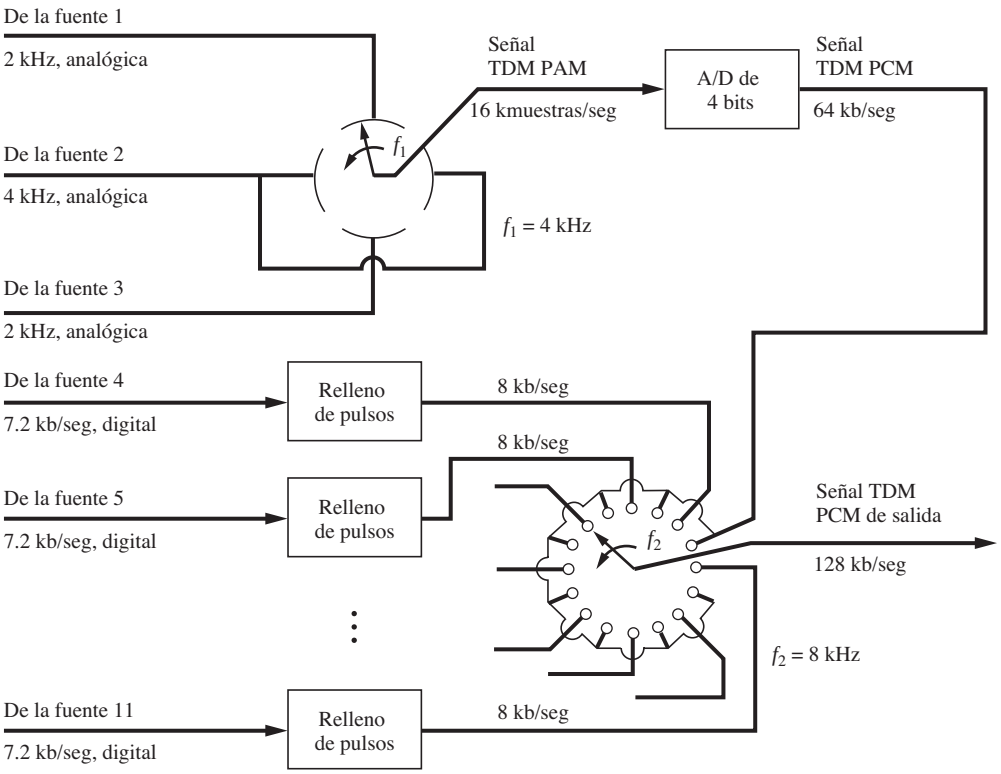


Figura 3–39 TDM con entradas analógicas y digitales, como se describe en el ejemplo 3-6.

Jerarquía de TDM

En la práctica, los TDM pueden agruparse en dos categorías. La primera consiste en multiplexores utilizados en conjunto con sistemas computacionales digitales para combinar señales digitales de varias fuentes para una transmisión TDM a través de una línea de alta velocidad a una computadora digital. La velocidad de salida de estos multiplexores se ha estandarizado a 1.2, 2.4, 3.6, 4.8, 7.2, 9.6, 14.4, 19.2 y 28.8 kbits/s y a 10 y 100 Mbits/s.

La segunda categoría de TDM se utiliza por portadoras comunes, como la American Telephone and Telegraph Company (AT□T), para combinar las diferentes fuentes a una señal TDM digital de alta velocidad para su transmisión a través de redes interurbanas. Desafortunadamente, los estándares adoptados por Estados Unidos y □apón son diferentes de los adoptados en otras partes del mundo. Los estándares estadounidense-japoneses fueron adoptados primero por AT□T, y otro conjunto de estándares por el CCITT bajo los auspicios del ITU. La jerarquía de TDM estadounidense se muestra en la figura 3-40 [□ames y Muench, 1972].[17] La industria de telefonía ha estandarizado sus velocidades de bit a 1.544 Mbits/s, 6.312 Mbits/s, etc., y las nombra como DS-1 para una señal

[17] La jerarquía de TDM japonesa es la misma que la de América del Norte para los niveles 1 y 2 de multiplexión, pero es distinta para los niveles 3, 4 y 5. Para el nivel 3, el estándar japonés es de 32.064 Mbits/s (480 VF), el nivel 4 es de 97.728 Mbits/s (1440 VF) y el nivel 5 es de 397.200 Mbits/s (5760 VF). Las diferencias entre los estándares se discuten brevemente y se resumen por □acobs [1986].

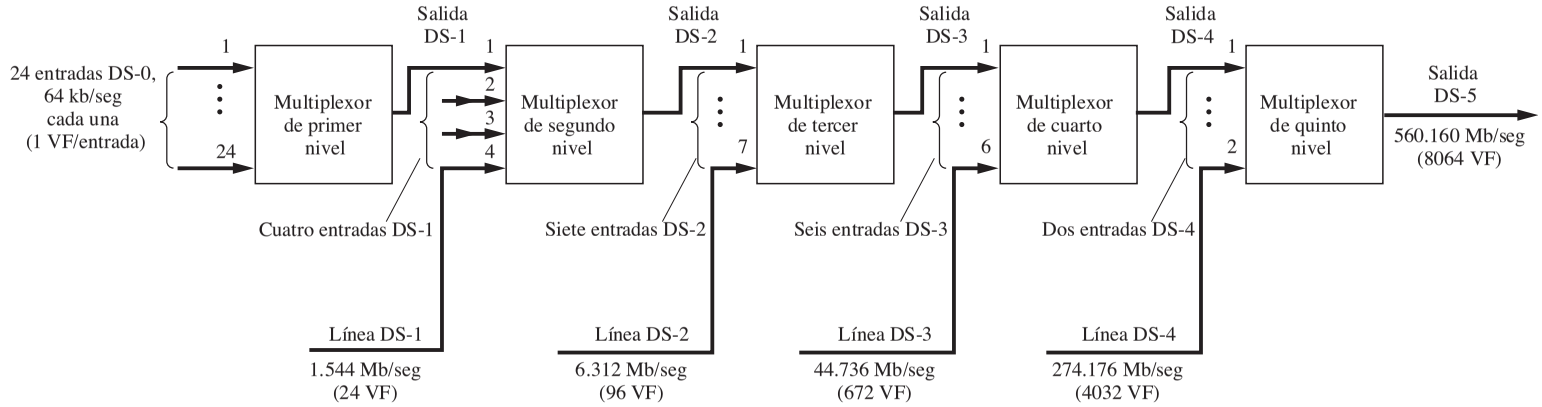


Figura 3–40 Jerarquía de TDM digital estadounidense.

TABLA 3–8 ESTÁNDARES PARA AMÉRICA DEL NORTE DE TDM

Número de la señal digital	Velocidad de bit, *R* (Mbits/segundo)	Número de canales PCM VF de 64 kbits/segundo	Medio de transmisión utilizado
DS-0	0.064	1	Pares de cables
DS-1	1.544	24	Pares de cables
DS-1C	3.152	48	Pares de cables
DS-2	6.312	96	Pares de cables, fibra
DS-3	44.736	672	Coax., radio, fibra
DS-3C	90.254	1344	Radio, fibra
DS-4E	139.264	2016	Radio, fibra, coax.
DS-4	274.176	4032	Coax., fibra
DS-432	432.00	6048	Fibra
DS-5	560.160	8064	Coax., fibra

digital de tipo 1 □ DS-2 para una de tipo 2 □ etc., como se presenta en la tabla 3-8. En la figura 3-40 se asume que todas las líneas de entrada son flujos binarios (digitales) y que el número de señales analógicas de frecuencia de voz (VF) que pueden representarse mediante dichas señales digitales se muestra entre paréntesis. Las entradas de multiplexión de mayor nivel no siempre están derivadas de los multiplexores de niveles más bajos. Por ejemplo, una señal analógica de televisión puede convertirse directamente a un flujo de datos DS-3 (44.73 Mbits/s). De la misma manera, los flujos DS pueden acarrear una mezcla de información de una variedad de fuentes tales como video, VF y computadoras.

El medio de transmisión utilizado para los niveles del multiplexor depende del nivel de DS involucrado y de los requisitos económicos de la utilización de un tipo particular de medio en una ubicación en particular (tabla 3-8). Por ejemplo, niveles más altos de DS pueden transmitirse a través de cables coaxiales o de fibra óptica, o vía radio de microondas o satelital. Una sola señal DS-1 a menudo se transmite a través de un par trenzado (se utiliza un par para cada dirección). Este tipo de transmisión de DS-1 sobre un medio de par trenzado se conoce, a partir de su desarrollo en 1962 por AT □ T, como *sistema de portadora T1*. La señalización de DS-1 a través de un sistema T1 es bastante popular gracias a su costo relativamente bajo y a su excelente historial de mantenimiento (el sistema T1 se discutirá con mayor detalle en la siguiente sección). La tabla 3-9 muestra las especificaciones para los sistemas digitales de banda base con portadora T. La tabla 8-2 es una tabla similar para la capacidad de sistemas pasabanda con portadora común. El estándar CCITT TDM correspondiente utilizado en todo el mundo, a excepción de Estados Unidos y □apón, se muestra en la figura 3-41 [Irmer, 1975].

Con el desarrollo de los sistemas de fibra óptica con una alta velocidad de bit se ha vuelto más evidente que los estándares de TDM originales ya no son adecuados. Bellcore (Bell Communications Research) propuso un nuevo estándar de TDM llamado Red Óptica Síncrona (SONET, por sus siglas en inglés) alrededor de 1985 y ha evolucionado en un estándar internacional que el CCITT adoptó en 1989. Este estándar SONET se muestra en la tabla 3-10. La OC-1 es una señal óptica (de luz) que se enciende y apaga (se modula) mediante una señal eléctrica binaria que tiene una velocidad de línea de 51.84 Mbits/s. La señal eléctrica se llama Señal Síncrona de Transporte nivel 1

TABLA 3–9 ESPECIFICACIONES PARA LOS SISTEMAS DIGITALES DE TRANSMISIÓN DE BANDA BASE CON PORTADORA T

Sistema	Capacidad del sistema		Medio	Código de línea	Distancia entre repetidores (millas)	Máxima longitud del sistema (millas)	Tasa de error en el sistema
	Velocidad (Mbits/s)	Número de la señal digital	Canales de voz				
T1	1.544	DS-1	24	Pares de cables	Bipolar RZ	1	50	10^{-6}
T1C	3.152	DS-1C	48	Pares de cables	Bipolar RZ	1	—	10^{-6}
T1D	3.152	DS-1C	48	Pares de cables	Duobinario NRZ	1	—	10^{-6}
T1G	6.443	DS-2	96	Pares de cables	4 niveles NRZ	1	200	10^{-6}
T2	6.312	DS-2	96	Pares de cables[a]	B6ZS[b] RZ	2.3	500	10^{-7}
T3	44.736	DS-3	672	Coax.	B3ZS[b] RZ	[c]	[c]	[c]
T4	274.176	DS-4	4032	Coax.	Polar NRZ	1	500	10^{-6}
T5	560.160	DS-5	8064	Coax.	Polar NRZ	1	500	4×10^{-7}

[a] Se requiere de cables de dos hilos especiales para una distancia entre repetidores de 12,000 pies. Debido a que un sistema T2 no puede utilizar cables de intercambio estándares, no es tan popular como el sistema T1.

[b] BnZS denota una *sustitución binaria con* n *ceros*, donde una cadena de *n* ceros en el código de línea bipolar se reemplaza con una palabra especial de codificación de tres niveles de tal manera que la sincronización pueda mantenerse [Fike y Friend, 1984□Bic, Duponteil e Imbeaux, 1991].

[c] Utilizado en una oficina central de telefonía para la implementación de niveles en el multiplexor□no se emplea para la transmisión de oficina a oficina.

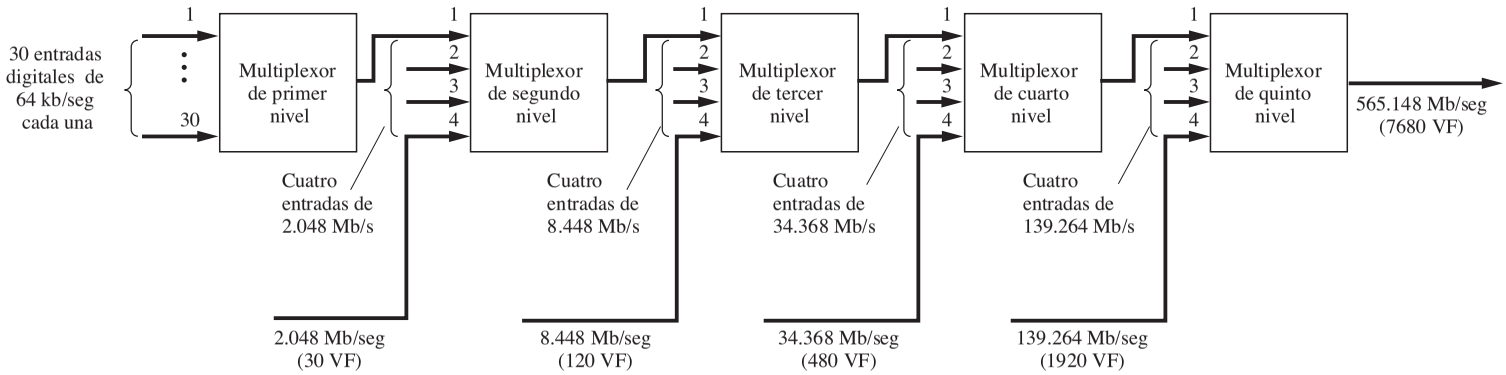


Figura 3–41 Jerarquía de TDM digital CCITT.

TABLA 3–10 JERARQUÍA DE SEÑAL SONET

Nivel de OC	Velocidad de línea (M Bits/s)	Número equivalente de		
		DS-3s	DS-1s	DS-0s
OC-1	51.84	1	28	672
OC-3	155.52	3	84	2,016
OC-9	466.56	9	252	6,048
OC-12	622.08	12	336	8,064
OC-18	933.12	18	504	12,096
OC-24	1,244.16	24	672	16,128
OC-36	1,866.24	36	1,008	24,192
OC-48	2,488.32	48	1,344	32,256
OC-192	9,953.28	192	5,376	129,024

(señal STS-1, por sus siglas en inglés). Otras señales OC-N tienen velocidades de línea de exactamente *N* veces la velocidad de OC-1 y están formadas mediante la modulación de una señal de luz con una señal eléctrica STS-N. La STS-N se obtiene por el entrelazado de bits (cifrado) de *N* señales STS-1. (La sección 8-7 presenta más detalles acerca de los sistemas de fibra óptica.)

La industria de telefonía puede también proporcionar una red totalmente digital que integra voz y datos sobre una sola línea telefónica desde cada usuario hasta el equipo de la compañía telefónica. Una de las técnicas para llevar esto a cabo se conoce como *red digital de servicios integrados* (ISDN, por sus siglas en inglés). Otra es la técnica para la línea de abonado digital (DSL) llamada G.Lite, que suministra una trayectoria para los datos "siempre activa" de 1.5 Mb/s (para acceso a Internet) además de una señal telefónica estándar de VF a través de una sola línea de par trenzado. (Para mayores detalles acerca de estas técnicas consulte la sección 8-3.)

El sistema T1 de PCM

Para el caso de servicio telefónico de voz, el multiplexor TDM de primer nivel en la figura 3-40 es reemplazado por un sistema TDM PCM, el cual convierte 24 señales telefónicas analógicas de VF a un flujo de datos DS-1 (1.544 Mbits/s). En terminología de AT□T, este es un banco de canales tipo D o una unidad de enlace digital de portadora (DCT, por sus siglas en inglés). Un tramo de línea T1 es una línea telefónica de par trenzado que se utiliza como portadora del flujo de datos DS-1 (1.544 Mbit/s). Se emplean dos líneas en el sistema, una para la transmisión y la otra para la recepción. Si la línea T1 conecta equipo telefónico en diferentes sitios, requerirá repetidores cada milla.

El sistema T1 fue desarrollado por Bell Laboratories para la comunicación digital de corto alcance de tráfico VF de hasta 50 millas de largo. La velocidad de muestreo utilizada en cada una de las 24 señales analógicas de VF es de 8 kHz, lo cual significa que la longitud de una trama es $1/(8\text{ kHz}) = 125\ \mu$s, como se muestra en la figura 3-42. Actualmente, cada muestra analógica se codifica nominalmente a una palabra PCM de 8 bits, así que existen $8 \times 24 = 192$ bits de datos, además de uno que se añade para la sincronización de trama, lo cual resulta en un total de 193 bits por trama. La velocidad de datos de T1 es entonces de (193 bits/trama)(8,000 tramas/s) = 1.544 Mbits/s, y la

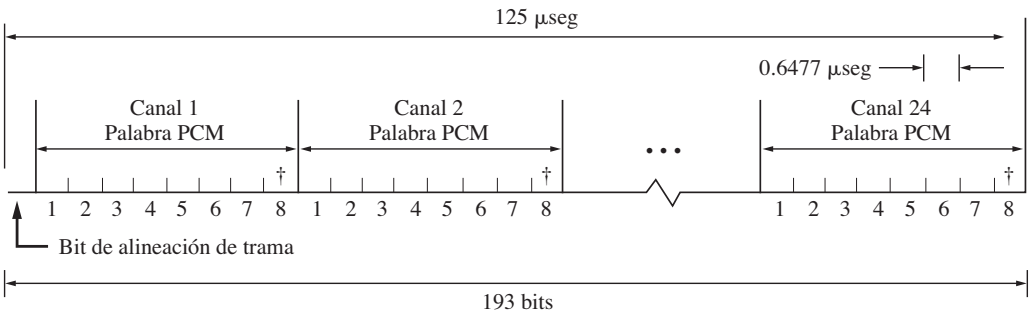


Figura 3–42 Formato T1 TDM para una trama.

duración correspondiente de cada bit es de 0.6477 μs. La señalización se incorpora al formato T1 reemplazando el octavo bit (el menos significativo) en cada uno de los 24 canales de la señal T1 mediante un bit de señalización cada sexta trama. Por lo tanto, la velocidad de datos de señalización para cada uno de los 24 canales de entrada es de (1 bit/6 tramas)(8,000 tramas/s) = 1.333 kbits/s. El bit de alineación de trama utilizado en las tramas pares sigue a la secuencia 001110 y en las tramas impares sigue a la secuencia 101010, de tal manera que las tramas con la información de señalización en la posición del octavo bit (para cada canal) puedan ser identificadas. La señalización digital en la línea T1 puede representarse mediante un modelo de forma de onda bipolar RZ (consulte la figura 3-15) con valores pico de ±3 V a través de una carga de 100 Ω. En consecuencia, no existe un componente de DC en la línea T1, independientemente del patrón de los datos. Se utiliza una característica de compresión de tipo $\mu = 255$ en la codificación de las muestras PAM de VF, como se describió previamente en este capítulo. Debido a que la velocidad de datos de la línea T1 es de 1.544 Mbits/s y el código de línea es bipolar, el primer ancho de banda con cruce por cero es 1.544 MHz y el espectro tiene su pico a 772 kHz, como se muestra en la figura 3-16d. Si la función de transferencia del filtrado del canal fuera de tipo coseno realzado con $r = 1$, entonces el ancho de banda absoluto del canal sería de 1.544 MHz. En el pasado, cuando las líneas de par trenzado se empleaban sólo para la transmisión analógica, se utilizaban bobinas de carga (inductancias) para mejorar la respuesta de frecuencia (amplitud). Sin embargo, éstas ocasionan que la línea tenga una respuesta de fase que no es lineal con respecto a la frecuencia, lo que resulta en ISI. Por lo tanto, deben removerse cuando se usa la línea para un servicio T1.

La portadora T1G se describe en la tabla 3-9. En lugar de niveles binarios utiliza una señalización multinivel polar NRZ con $M = 4$ (cuaternaria), donde +3 V representa a los dos bits binarios 11, +1 V representa 01, −1 V representa 00 y −3V representa 10 [Azaret *et al.*, 1985]. Por tanto, se logra una velocidad de datos de 6.443 Mbits/s a través de una señalización de 3.222 Mbauds, lo cual resulta en un ancho de banda con cruce por cero de 3.221 MHz, el cual está cerca del ancho de banda con cruce por cero de 3.152 MHz del sistema T1C. Este ancho de banda se puede soportar mediante pares trenzados estándares (un par para cada dirección) con una distancia entre repetidores de una milla.

Los sistemas de cable de fibra óptica poseen anchos de banda fenomenales y son relativamente económicos con base en un canal a la vez. Por ejemplo, el sistema TDM de fibra óptica FT-2000 (consulte las tablas 8-2 y 8-6) tiene una capacidad de 32,256 canales de VF, mientras el sistema WaveStar una de 6.25 millones de canales de VF.

3–10 SISTEMA DE TRANSMISIÓN DE PAQUETES

TDM es una tecnología de *modo de transferencia síncrona* (STM, por sus siglas en inglés). Es decir, una fuente de datos se asigna a una ranura de tiempo específica con una velocidad de datos constante (fija). En cierto número de aplicaciones, esta asignación de velocidad de datos fija no es muy efectiva en cuanto a su costo, ya que se insertan bits de relleno para emparejarse a la velocidad de datos asignada cuando la fuente no tiene datos que enviar. Por ejemplo, un usuario puede enviar un archivo grande, para el cual requiere de una alta velocidad de datos, y después capturar algunos parámetros, para lo cual necesita una baja velocidad de datos. Este tipo de fuente de datos a ráfagas no está eficientemente soportada por un sistema STM, pero un sistema de paquetes puede resolver el problema.

Un *sistema de transmisión de paquetes* divide los datos fuente en paquetes de datos, cada uno de los cuales contiene un encabezado con la dirección destino. Muchos usuarios comparten el canal de alta velocidad combinando sus paquetes en un solo flujo de datos de alta velocidad. Ruteadores a lo largo de la red leen la información del encabezado en los paquetes y enrutan al paquete al destino apropiado. Para soportar fuentes de alta velocidad se envían más paquetes de estas fuentes sobre un intervalo de tiempo dado, a comparación de los pocos paquetes que se combinan en una red a partir de fuentes de baja velocidad.

El apéndice C presenta ejemplos de sistemas de transmisión de paquetes, como la tecnología TCP/IP de Internet y la de *modo de transferencia asíncrona* (ATM) de la TELCO (compañía telefónica).

Una red de paquetes asigna eficientemente recursos de la red cuando las fuentes poseen datos a ráfagas. Sin embargo, existe un gasto causado por la transmisión de la información del encabezado del paquete. Las redes STM son más eficientes cuando las fuentes tienen una velocidad de datos fija (es decir, cuando no envían a ráfagas).

3–11 MODULACIÓN POR TIEMPO DE PULSOS: MODULACIÓN POR ANCHO DE PULSO Y MODULACIÓN POR POSICIÓN DE PULSO

La *modulación por tiempo de pulsos* (PTM, por sus siglas en inglés) es una técnica de señalización que codifica las muestras de una señal analógica dentro del *eje de tiempo* de una digital. La PTM es semejante a la modulación de ángulo, la cual se describe en el capítulo 5. (Como se ha visto, las técnicas PAM, PCM y DM codifican las muestras dentro de las características de amplitud de la señal digital).

Los dos tipos principales de PTM son la *modulación por ancho de pulso* (PWM, por sus siglas en inglés) y la *modulación por posición de pulso* (PPM, por sus siglas en inglés). (Consulte la figura 3-43). En PWM, la cual también se conoce como *modulación por duración de pulso* (PDM, por sus siglas en inglés), las muestras de la forma de onda analógica se utilizan para determinar el *ancho* de la señal de pulso. Se puede emplear tanto el muestreo *instantáneo* como el *natural*. La figura 3-44 presenta una técnica para la generación de señales PWM con muestreo instantáneo y la figura 3-45 muestra la PWM con muestreo natural. En PPM, la muestra analógica determina la *posición* de un pulso estrecho relativa al tiempo de sincronización. Las técnicas para generar PPM se muestran también en las figuras y se puede observar que ésta se obtiene fácilmente a partir de la PWM mediante un circuito multivibrador monoestable. En la literatura acerca de las señales PTM, el nivel del comparador V_r se conoce como *nivel de corte*.

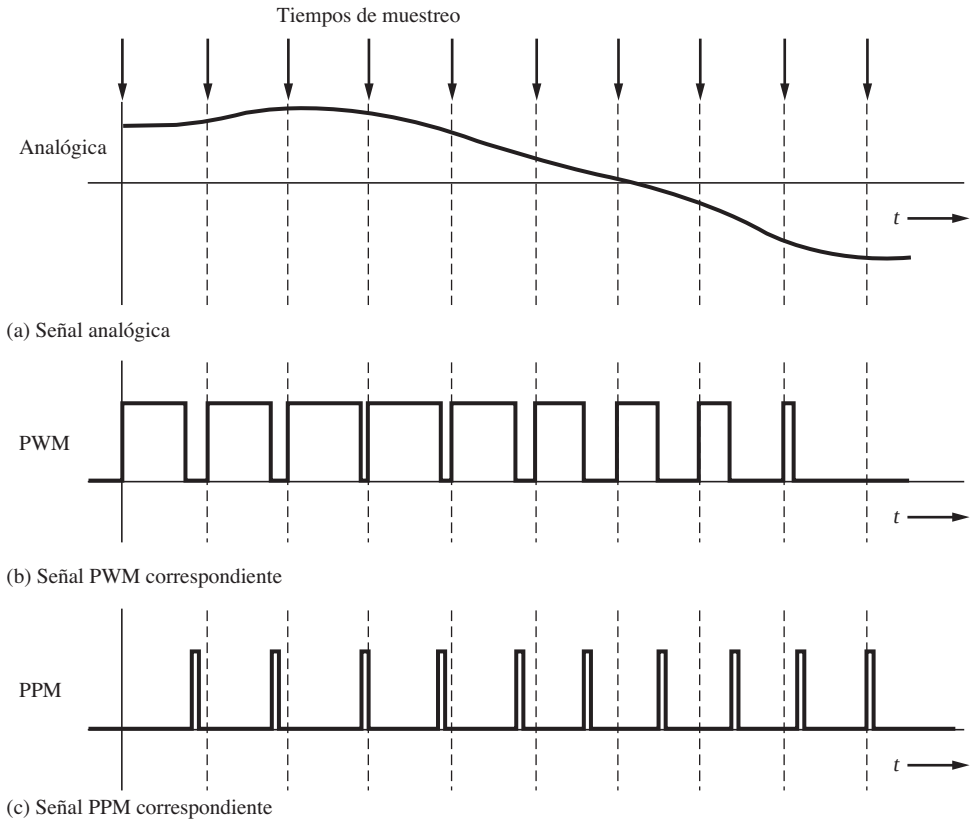


Figura 3–43 Señalización por modulación por tiempo de pulso.

Las señales PWM o PPM pueden convertirse de nuevo a su señal analógica correspondiente mediante un sistema receptor (figura 3-46). Para la detección de PWM, la señal PWM se utiliza para iniciar y detener la operación de un integrador□es decir, el integrador se reinicializa a cero y la integración inicia cuando el pulso PWM se dispara de un bajo nivel a uno alto y el integrador integra hasta que el pulso PWM cambia a bajo nivel. Si la entrada del integrador está conectada a una fuente de voltaje constante, la salida será una rampa truncada. Después de que la señal PWM cambia a bajo nivel, la amplitud de la señal de rampa truncada será igual al de la muestra PAM correspondiente. Al tiempo de sincronización, se hace compuerta de la salida del integrador a la línea de salida PAM (casi justo cuando el integrador se reinicializa a cero), utilizando un circuito muestra y almacena. Es entonces que la señal PAM se convierte a analógica mediante un filtro pasabajas. De manera similar, la PPM puede convertirse a PAM utilizando el pulso de reloj para reinicializar el integrador a cero e iniciar la integración. Después de esto el pulso PPM se emplea para detener la integración. El valor final de la rampa es el de la muestra PAM usada para regenerar la señal analógica.

La señalización por modulación por tiempo de pulso no se utiliza ampliamente para la comunicación a través de canales ya que se requiere de un ancho de banda del canal relativamente grande, especialmente para PPM. Sin embargo, las señales PTM pueden encontrarse internamente en el equipo de terminal digital de comunicaciones. Los espectros de las señales PTM son muy difíciles

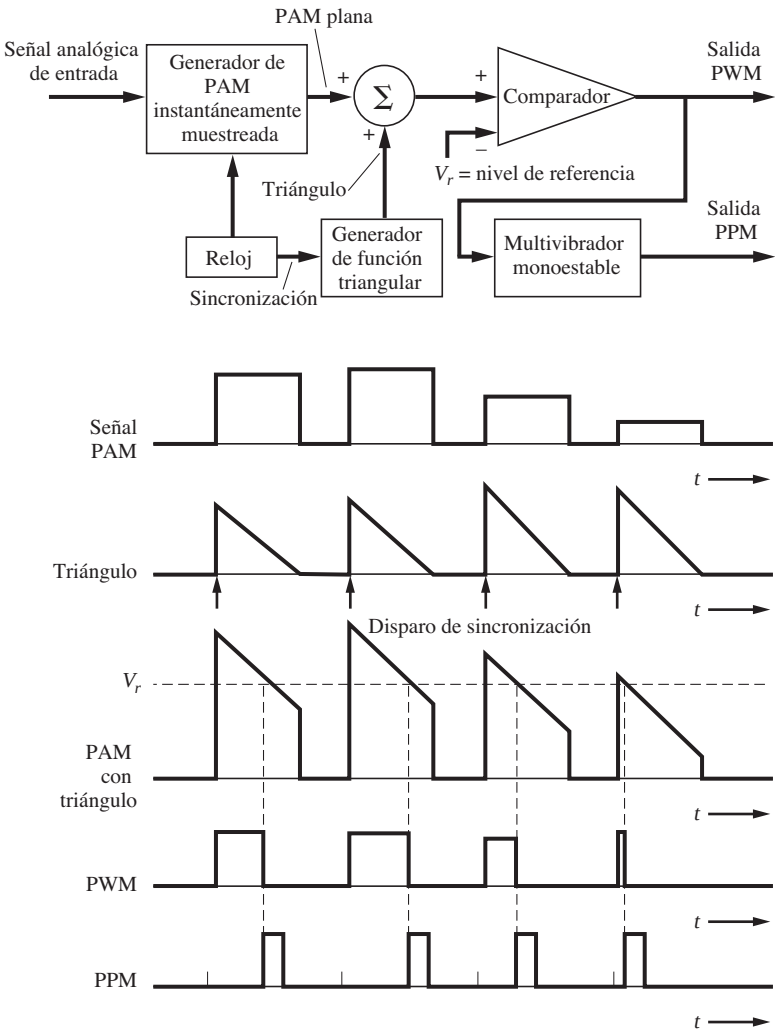


Figura 3–44 Técnica para generar instantáneamente señales PTM muestreadas.

de evaluar debido a la naturaleza no lineal de la modulación [Rowe, 1965.] La ventaja principal de las señales PTM es que tienen una gran inmunidad al ruido aditivo, en comparación de la señalización PAM, y además son más fáciles de generar y detectar que PCM, la cual requiere de ADC.

3–12 RESUMEN

En este estudio acerca de la señalización digital de banda base nos concentramos en cuatro temas importantes: (1) cómo la información en formas de onda analógicas puede representarse mediante la señalización digital□(2) cómo calcular los espectros para los códigos de línea□(3) cómo el filtrado de ka señal digital, debido al canal de comunicaciones, afecta la habilidad para recuperar la informa-

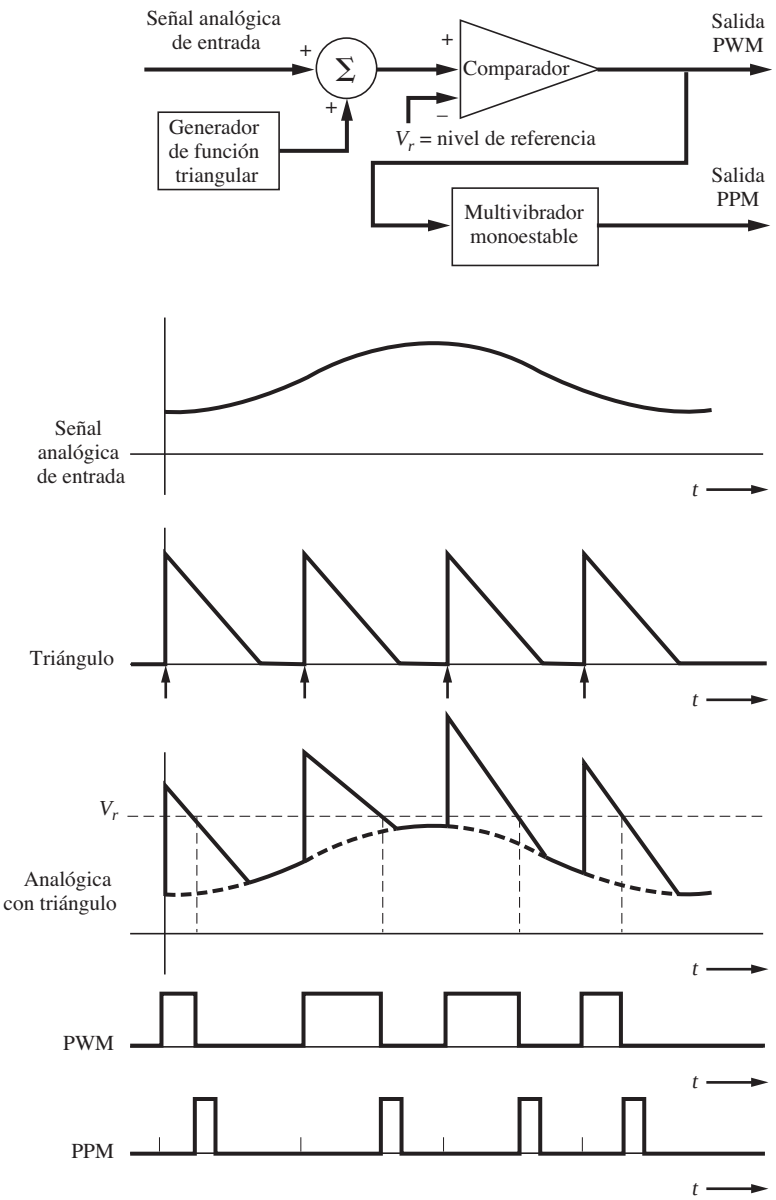


Figura 3–45 Técnica para generar señales PTM naturalmente muestreadas.

ción digital en el receptor [es decir, el problema de la interferencia intersimbólica (ISI)], y (4) cómo se puede combinar la información de varias fuentes a una sola señal digital mediante la multiplexión por división de tiempo (TDM). También se proporcionaron los estándares en Estados Unidos, así como mundiales para los sistemas TDM de telecomunicación.

PCM es un esquema de conversión analógica a digital que involucra tres operaciones básicas: (1) el *muestreo* de una señal analógica limitada por banda, (2) la *cuantización* de las muestras ana-

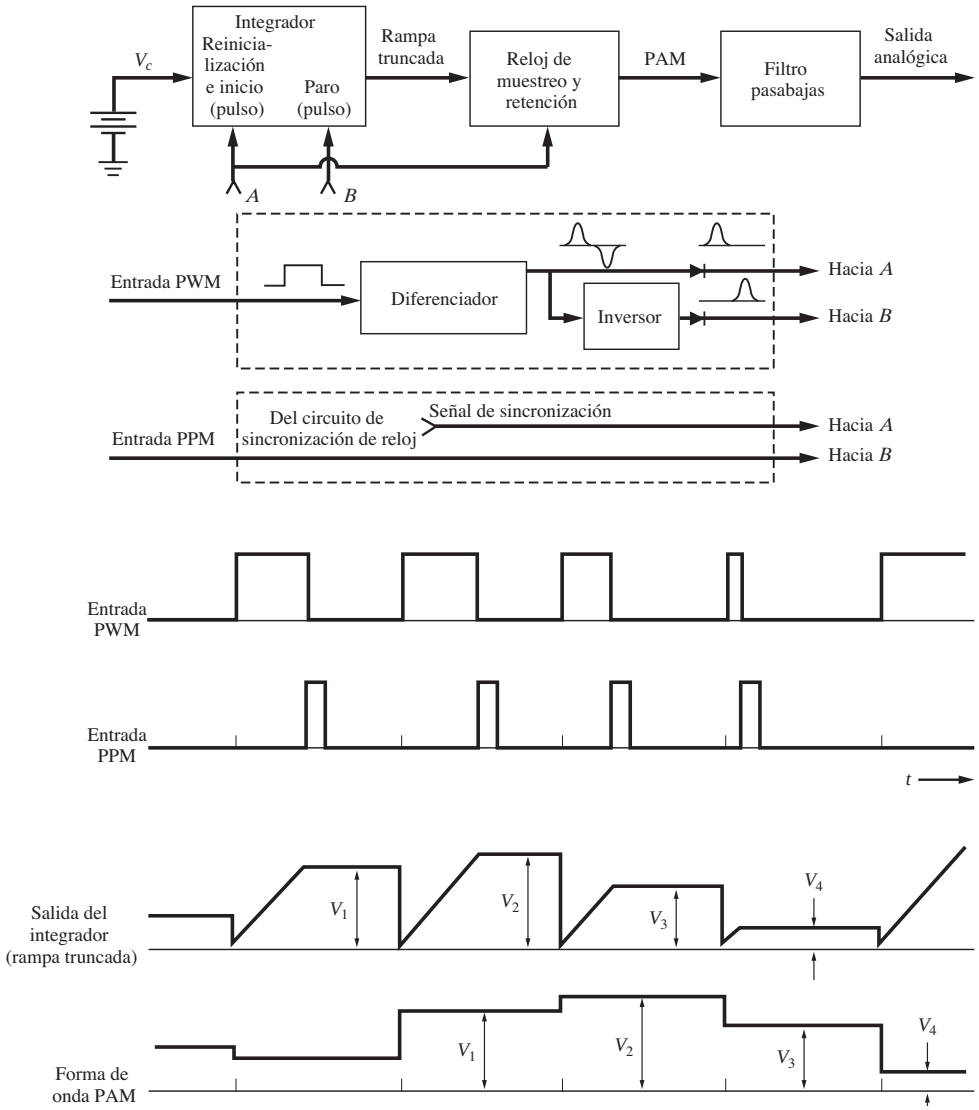


Figura 3–46 Detección de señales PWM y PPM.

lógicas a M valores discretos y (3) la *codificación* de cada muestra dentro de una palabra de n bits donde $M = 2^n$. Existen dos fuentes de ruido en la señal que se recupera a la salida del receptor: (1) el ruido de cuantización debido a la aproximación de las muestras utilizando los M valores permitidos y (2) el ruido debido a los errores de detección de bit en el receptor causado por el ruido en el canal o por la ISI que resulta de una respuesta de frecuencia inadecuada del canal. Si la señal analógica original no está estrictamente limitada por banda, existirá un tercer componente de ruido en la salida del receptor debido al aliasing.

Al estudiar el efecto de un filtrado inadecuado en el canal en la producción de la ISI también se examinó el filtro de coseno realzado de Nyquist. En este caso se encontró que el mínimo ancho

de banda requerido para pasar una señal digital sin ISI era igual a la mitad de la velocidad en bauds. Un ancho de banda de canal igual a la velocidad en bauds ($r = 1$) se consideró más realista.

El ancho de banda del canal puede reducirse si se emplean técnicas de señales multinivel (para una velocidad de datos R).

Este capítulo se enfocó en la señalización de *banda base*. El siguiente se ocupará de la modulación de señales de banda base a una portadora de tal manera que el espectro estará concentrado alrededor de alguna frecuencia deseada llamada *frecuencia de portadora*.

3–13 EJEMPLOS DE ESTUDIO

SA3–1 PAM Espectro y ancho de banda de una señal PAM Una forma de onda, $w(t)$, se convierte a una señal PAM plana utilizando una velocidad de muestreo de 8 kHz y un ancho de pulso de 100 μs. Suponga que $W(f) = 2\Lambda(f/B)$, donde $B = 3$ kHz.

(a) Encuentre y haga un diagrama del espectro de magnitud para la señal PAM.

(b) Determine el valor numérico para el primer ancho de banda nulo de la señal PAM.

Solución.

(a) Utilizando $W(f) = 2\Lambda(f/B)$ en la ecuación (3-10), MATLAB calcula y grafica el espectro mostrado en la figura 3-47. La gráfica muestra cómo $W(f)$ se repite en las armónicas de la frecuencia de muestreo y está ponderada mediante la función $\tau\left(\frac{\text{sen}\,\pi\tau f}{\pi\tau f}\right)$ (causada por una forma de pulso rectangular).

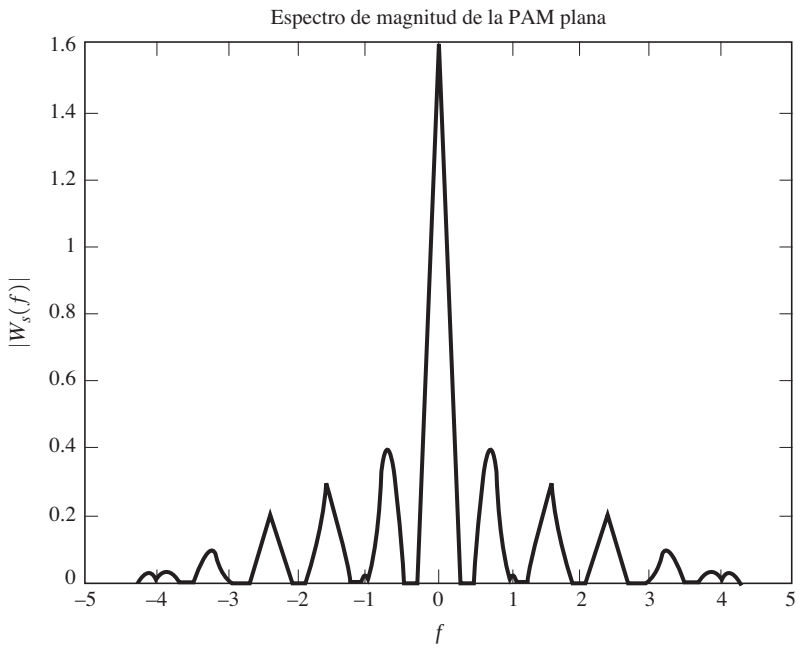


Figura 3–47 Solución para SA3-1.

(b) El espectro encuentra su primer cero a $B = 3$ kHz. Para este espectro, 3 kHz no es una buena medida de su ancho de banda, ya que la magnitud espectral crece una vez más a frecuencias más altas. En ejemplos como éste, los ingenieros utilizan la *envolvente* del espectro para especificar el ancho de banda nulo. Por lo tanto, el primer ancho de banda nulo de la envolvente espectral, $\tau \left| \frac{\text{sen}\,\pi\tau f}{\pi\tau f} \right|$, es $B_{\text{nulo}} = 1/\tau = 1/100\ \mu\text{s} = 10$ kHz.

SA3–2 Ancho de banda y SNR de una señal PCM En un sistema de comunicaciones con calidad de audio, una señal analógica de frecuencia de voz (VF) con un ancho de banda de 3,200 Hz se convierte a una señal PCM muestreando a 7,000 muestras/s y utilizando un cuantificador uniforme con 64 pasos. Los datos binarios PCM se transmiten sobre un canal con ruido a un receptor que cuenta con una tasa de error en bits (BER) de 10^{-4}.

(a) ¿Cuál es el ancho de banda nulo de la señal PCM si se usa un código de línea polar?

(b) ¿Cuál es la SNR promedio de la señal analógica recuperada en el receptor?

Solución.

(a) $M = 64$ pasos de cuantización generan palabras PCM de 6 bits, ya que $M = 2^n$. Empleando la ecuación (3-15b) se encuentra que el ancho de banda nulo es

$$B_{\text{nulo}} = nf_s = 6(7{,}000) = 42 \text{ kHz}$$

Nota: si se utilizaran formas de pulso de sen x/x, entonces el ancho de banda sería

$$B_{\text{nulo}} = \tfrac{1}{2}nf_s = 21 \text{ kHz}$$

(b) Ocupando la ecuación (3-16b) con $M = 64$ y $P_e = 10^{-4}$ resulta que

$$\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e} = \frac{4{,}096}{1 + 1.64} = 1{,}552 = 31.9 \text{ dB}$$

(*Nota*: el 1 en el denominador representa el ruido de cuantización y 1.64 representa el ruido en la señal analógica recuperada causada por errores en bits en el receptor. En este ejemplo, ambos efectos del ruido contribuyen casi idénticamente. Para el caso donde $M = 64$, si la BER fue menor a 10^{-5}, el ruido de cuantización dominará y si la BER fue mayor a 10^{-3}, dominará el ruido resultante de los errores en bits en el receptor.)

SA3–3 Propiedades de los códigos de línea NRZ Un código de línea unipolar NRZ se convierte en una señal multinivel para su transmisión a través de un canal, como se ilustra en la figura 3-13. El número de valores posibles en la señal multinivel es de 32, y la señal consiste en pulsos rectangulares que tienen un ancho de pulso de 0.3472 ms. Para la señal multinivel,

(a) ¿Cuál es la velocidad en bauds?

(b) ¿Cuál es la velocidad de bit equivalente?

(c) ¿Cuál es el ancho de banda nulo?

(d) Repita los incisos (a) y (c) para el código de línea unipolar NRZ.

Solución.

(a) Utilizando la ecuación (3-28) donde $N = 1$ pulso ocurre en $T_0 = 0.3452$ ms, se tiene que

$$D = N/T_0 = 1/0.3472 \text{ ms} = 2{,}880 \text{ bauds}$$

(b) Debido a que $L = 32 = 2^{\ell}$, entonces $\ell = 5$. Empleando la ecuación (3-34),

$$R = \ell D = 5(2880) = 14{,}400 \text{ bits/s}$$

(c) Utilizando la ecuación (3-54) se encuentra que el ancho de banda nulo es

$$B_{\text{nulo}} = R/\ell = D = 2{,}880 \text{ Hz}$$

(d) Para la línea de código unipolar NRZ existen $N = 5$ pulsos en $T_0 = 0.3472$ ms, o

$$D = 5/0.3472 \text{ ms} = 14{,}400 \text{ bauds}$$

$R = D$ ya que el código de línea unipolar NRZ es binario (es decir, $L = 2^{\ell}$ o $\ell = 1$). Por lo tanto, $R = 14{,}400$ bits/s. El ancho de banda nulo es

$$B_{\text{nulo}} = R/\ell = D = 14{,}400 \text{ Hz}$$

SA3–4 Ancho de banda de señales RS-232 El puerto serial RS-232 en una computadora personal transmite datos a una velocidad de 38,400 bits/s usando un código de línea polar NRZ. Suponga que los 1 y 0 binarios tienen igual probabilidad de ocurrir. Calcule y grafique la PSD para esta señal RS-232. Emplee una escala de dB considerando que la PSD está normalizada de tal forma que 0 dB ocurre al pico de la gráfica de PSD. Explique los requisitos del ancho de banda para esta señal.

Solución. Considerando la ecuación (3-41), haga que A^2T_b sea igual a 1 de tal manera que el valor de 0 dB ocurra en el pico. Entonces la PSD, en unidades de dB, es

$$\mathcal{P}_{\text{dB}}(f) = 10 \log \left[\left(\frac{\text{sen}\, \pi f T_b}{\pi f T_b} \right)^2 \right]$$

donde $T_b = 1/R$ y $R = 38{,}400$ bits/s.

Este resultado se grafica en la figura 3-48 utilizando una escala en dB. La gráfica revela que el espectro es ancho para este caso de señalización digital con formas de pulso rectangulares. A pesar de que el ancho de banda nulo es de 38,000 Hz ($B_{\text{nulo}} = R$), esto causa una falsa percepción de que el espectro es relativamente estrecho debido a que el primer pico del lóbulo lateral (a $f = 57{,}600$ Hz $= 1.5R$) es menor por sólo 13.5 dB del lóbulo principal y el segundo pico del lateral (a $f = 96{,}000$ Hz $= 2.5R$) es menor por sólo 17.9 dB. El espectro de potencia decae como $1/f^2$, lo cual equivale a 6 dB por octava. Considerando la figura 3-48 y sabiendo que la envolvente de la PSD está descrito por $(1/\pi f T_b)^2$, se encuentra que se requiere del ancho de banda de $f = 387$ kHz $= 10.1R$ (es decir, 10 veces la velocidad de datos) para pasar los componentes de frecuencia que no están atenuados por más de 30 dB. Por lo tanto, el espectro es ancho cuando se utilizan pulsos rectangulares de muestreo (esto se ilustró por primera vez en la figura 2-24).

Como consecuencia, para las aplicaciones de señalización digital sobre canales limitados por banda, se requiere de algún tipo de forma de pulso filtrado para proporcionar una buena atenuación espectral fuera de banda y al mismo tiempo sin introducir ISI. Por ejemplo, de la ecuación (3-74), un pulso filtrado correspondiente a una característica de coseno realzado de $r = 0.5$ tendrá atenuación infinita a la frecuencia (ancho de banda absoluto) de $B = \frac{1}{2}(1 + r)D = (0.5)(1.5)(38{,}400) = 28{,}800$ Hz $= 0.75R$. Considerando la figura 3-26a y utilizando la ecuación (3-69) se observa que el espectro del coseno realzado con $r = 0.5$ estará atenuado por 30 dB cuando $f = 20{,}070$ Hz $= 0.523R$ y 100 dB cuando $f = 22{,}217$ Hz $= 0.579R$. Para el criterio de un ancho de banda atenuado por 30 dB, este es un ancho de banda (ahorro) 19 veces menor que el requerido para una señalización por pulsos rectangulares.

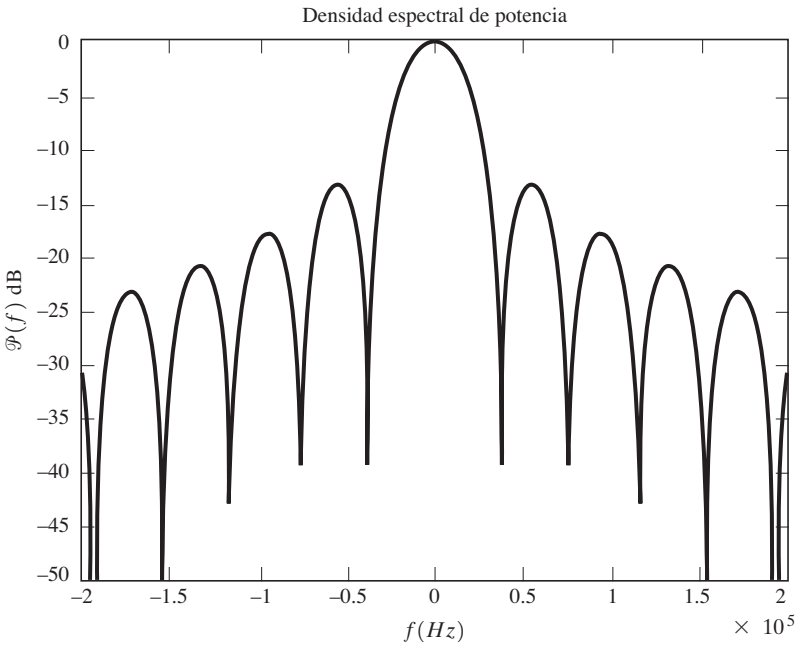


Figura 3–48 La PSD de una señal RS-232 con una velocidad de datos de 38,400 bits/s.

PROBLEMAS

3–1 Demuestre que los coeficientes de la serie de Fourier para la forma de onda de conmutación mostrada en la figura 3-1b están dados por la ecuación (3-5b).

3–2 **(a)** Haga un diagrama de la forma de onda PAM naturalmente muestreada que resulta del muestreo de una onda de seno de 1 kHz a una velocidad de 4 kHz.
(b) Repita la parte (a) para el caso de una forma de onda PAM plana.

★ **3–3** El espectro de una señal analógica de audio se muestra en la figura P3-3. La forma de onda será muestreada a una velocidad de 10 kHz con un ancho de pulso de $\tau = 50$ μs.

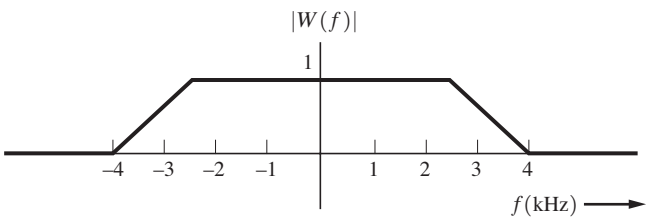


Figura P3–3

(a) Encuentre una expresión para el espectro de la forma de onda PAM naturalmente muestreada. Haga un diagrama de su resultado.
(b) Halle una expresión para el espectro de una forma de onda PAM plana. Realice un diagrama de su resultado.

3–4 **(a)** Muestre que una forma de onda analógica de salida, la cual es proporcional a la forma de onda analógica original de entrada, puede recuperarse a partir de una forma de onda PAM naturalmente muestreada mediante la técnica de demodulación mostrada en la figura 3-4.
(b) Encuentre la constante de proporcionalidad, C, que se obtiene con esta técnica de demodulación, donde $w(t)$ es la forma de onda original y $Cw(t)$ es la forma de onda recuperada. Note que C es una función de n, donde la frecuencia del oscilador es nf_s.

3–5 La figura 3-4 ilustra cómo una señal PAM naturalmente muestreada puede demodularse para recuperar la forma de onda analógica mediante un detector de producto. Muestre que el detector de producto puede también usarse para recuperar $w(t)$ a partir de una señal PAM instantáneamente muestreada, siempre y cuando se utilice el filtro $H(f)$ apropiado. Encuentre la característica $H(f)$ requerida.

★ **3–6** Suponga que una señal analógica con el espectro mostrado en la figura P3-3 será transmitida a través de un sistema PAM que está acoplado a AC. Por lo tanto, se utiliza una forma de pulso PAM del tipo Manchester, como se da en la ecuación (3-46a). La frecuencia de muestreo PAM es de 10 kHz. Encuentre el espectro para la forma de onda PAM plana codificada por Manchester. Haga un diagrama de su resultado.

3–7 En un sistema PCM binario, si el ruido de cuantificación no debe exceder un porcentaje de $\pm P$ del nivel analógico pico a pico, muestre que el número de bits en cada palabra PCM debe ser

$$n \geq [\log_2 10]\left[\log_{10}\left(\frac{50}{P}\right)\right] = 3.32 \log_{10}\left(\frac{50}{P}\right)$$

(*Sugerencia:* consulte la figura 3-8c.)

★ **3–8** La información en una forma de onda analógica de voltaje se transmitirá a través de un sistema PCM con una exactitud de ±0.1□ (escala completa). La forma de onda analógica tiene un ancho de banda absoluto de 100 Hz y un rango de amplitud de −10 V a +10 V.
(a) Determine la mínima velocidad de muestreo requerida.
(b) Encuentre el número de bits requeridos para cada palabra PCM.
(c) Busque la mínima velocidad de bit requerida en la señal PCM.
(d) Halle el mínimo ancho de banda absoluto del canal requerido para la transmisión de esta señal PCM.

3–9 Un disco duro de 850 Mbyte se utiliza para almacenar datos PCM. Suponga que una señal de frecuencia de voz (VF) se muestrea a 8 kmuestras/s y que la PCM codificada deberá tener una SNR promedio de por lo menos 30 dB. □Cuántos minutos de conversación en VF (es decir, datos PCM) pueden almacenarse en el disco duro?

3–10 Una señal analógica con ancho de banda de 4.2 MHz será convertida a PCM binaria y transmitida sobre un canal. La relación señal a ruido de cuantificación pico a la salida del receptor debe ser de por lo menos 55 dB.
(a) Si se asume que $P_e = 0$ y que no existe ISI, □cuál será la longitud de palabra y el número de pasos de cuantificación requeridos?
(b) □Cuál será la velocidad de bit equivalente?
(c) □Cuál será el ancho de banda nulo del canal requerido si se usan formas de pulso rectangulares?

★ **3–11** Los reproductores de discos compactos (CD) emplean PCM de 16 bits, incluyendo un bit de paridad y un sobremuestreo de 8 veces la señal analógica original. El ancho de banda de la señal analógica es 20 kHz.
(a) □Cuál es el ancho de banda nulo de esta señal PCM?
(b) Utilizando la ecuación (3-18) encuentre el pico (SNR) en decibeles.

3–12 Dada una señal de audio con componentes espectrales en la banda de frecuencias de 300 a 3,000 Hz, suponga que se empleará una velocidad de muestreo de 7 kHz para generar una señal PCM. Diseñe un sistema PCM apropiado como sigue:

(a) Dibuje un diagrama de bloques del sistema PCM, incluyendo el transmisor, el canal y el receptor.

(b) Especifique el número de pasos de cuantización uniforme y el ancho de banda nulo de canal requeridos, asumiendo que la relación señal a ruido pico a la salida del receptor debe ser de por lo menos 30 dB y que se utilizará la señalización polar NRZ.

(c) Explique cómo puede usarse la cuantización no uniforme para mejorar el rendimiento del sistema.

3–13 Las SNRS, como están dadas por las ecuaciones (3-17a) y (3-17b), asumen que no existe ISI ni errores en bits debido al ruido en el canal (es decir, que $P_e = 0$). ¿Qué tan grande puede hacerse P_e antes de que las ecuaciones (3-17a) y (3-17b) presenten un error de un 0.1% si $M = 4$, 8 o 16?

★ **3–14** En un sistema PCM, la tasa de error en bits debido al ruido en el canal es de 10^{-4}. Suponga que la relación señal a ruido pico en la señal analógica recuperada debe de ser de por lo menos 30 dB.

(a) Encuentre el mínimo número de pasos de cuantificación que pueden usarse para codificar la señal analógica dentro de una señal PCM.

(b) Si la señal analógica original contaba con un ancho de banda absoluto de 2.7 kHz, ¿cuál es el ancho de banda nulo de la señal PCM para el caso de una señalización polar NRZ?

3–15 Considerando la figura 3-20 para un sincronizador de bit empleando un dispositivo de ley cuadrada, haga un diagrama de algunas formas de onda típicas que aparecerán en el sincronizador de bit si una señal PCM codificada por Manchester está presente a la entrada. Explique si usted espera que este sincronizador de bit funcione mejor para la señal PCM codificada por Manchester o para una señal PCM codificada por polar NRZ.

3–16 **(a)** Haga un diagrama para completar la característica de compresión de $\mu = 10$ que manipulará voltajes de entrada sobre un rango de −5 a +5 V.

(b) Grafique la característica de expansión correspondiente.

(c) Haga un diagrama de una característica de cuantizador no uniforme de 16 niveles que corresponda a la característica de compresión de $\mu = 10$.

3–17 Para un sistema PCM de 4 bits, calcule y grafique la SNR de salida (en decibeles) como una función del nivel relativo de entrada, $20 \log(x_{\text{rms}}/V)$ para

(a) Un sistema PCM que utiliza una compresión y expansión de $\mu = 10$ law.

(b) Un sistema PCM que emplea cuantización uniforme (sin compresión y expansión).

¿Cuál de estos sistemas es mejor para su uso en la práctica? ¿Por qué?

★ **3–18** El rendimiento de un sistema PCM con compresión y expansión de $\mu = 255$ law será examinado cuando la entrada consiste en una onda senoidal con un valor pico de V volts. Suponga que $M = 256$.

(a) Encuentre una expresión que describa la SNR de salida para este sistema PCM con compresión y expansión.

(b) Grafique $(S/N)_{\text{salida}}$ (en decibeles) como una función del nivel relativo de entrada, $20 \log(x_{\text{rms}}/V)$. Compare este resultado con el que se muestra en la figura 3-10.

3–19 Un sistema digital multinivel de comunicación envía uno de sus 16 posibles niveles a través del canal cada 0.8 ms.

(a) ¿Cuál es el número de bits correspondientes a cada nivel?

(b) ¿Cuál es la velocidad en bauds?

(c) ¿Cuál es la velocidad de bits?

3–20 Un sistema digital multinivel de comunicación operará a una velocidad de datos de 9,600 bits/s.

(a) Si se codifican palabras de 4 bits dentro de cada nivel para su transmisión a través del canal, ¿cuál es el mínimo ancho de banda requerido para el canal?

(b) Repita la parte (a) para el caso de una codificación de 8 bits dentro de cada nivel.

★ **3–21** Considere un patrón de prueba determinista que consiste en 1 y 0 binarios alternantes. Determine los espectros de magnitud (no la PSD) para los siguientes tipos de formatos de señalización como una función de T_b, el cual es el tiempo requerido para enviar un bit de datos:

(a) Señalización unipolar NRZ.
(b) Señalización unipolar RZ donde el ancho de pulso es de $\tau = \frac{3}{4}T_b$.
¿Cómo cambiaría cada uno de estos espectros de magnitud si el patrón de prueba se modifica a una secuencia alternante de cuatro 1 binarios seguidos de cuatro 0 binarios?

3–22 Considere un patrón de datos aleatorios que consiste en 1 y 0 binarios, donde la probabilidad de obtener ya sea un 1 binario o un 0 binario es de $\frac{1}{2}$. Calcule la PSD para los siguientes tipos de formatos de señalización como una función de T_b, el cual es el tiempo necesario para enviar un bit de los datos:
(a) Señalización unipolar NRZ.
(b) Señalización unipolar RZ donde el ancho de pulso es de $\tau = \frac{3}{4}T_b$.
¿Cómo se comparan estas PSD para los casos de datos aleatorios con los espectros de magnitud para el caso determinista del problema 3-21? ¿Cuál es la eficiencia espectral para cada uno de estos casos?

3–23 Considere un patrón de datos deterministas que consiste en 1 y 0 binarios. Determine los espectros de magnitud (no la PSD) para los siguientes tipos de formatos de señalización como una función de T_b, el cual es el tiempo necesario para enviar un bit de los datos:
(a) Señalización polar NRZ.
(b) Señalización Manchester NRZ.
¿Cómo cambiaría cada uno de estos espectros de magnitud si el patrón de prueba se cambia a una secuencia alternante de cuatro 1 binarios seguido de dos 0 binarios?

★ **3–24** Considere un patrón de datos aleatorios que consiste en 1 y 0 binarios, donde la probabilidad de obtener ya sea un 1 binario o un 0 binario es de $\frac{1}{2}$. Calcule la PSD para los siguientes tipos de formatos de señalización como una función de T_b, el cual es el tiempo necesario para enviar 1 bit de los datos:
(a) Señalización polar RZ donde el ancho de pulso es de $\tau = \frac{1}{2}T_b$.
(b) Señalización Manchester RZ donde el ancho de pulso es de $\tau = \frac{1}{4}T_b$. ¿Cuál es el primer ancho de banda nulo de estas señales? ¿Cuál es la eficiencia espectral para cada uno de estos casos de señalización?

3–25 Obtenga las ecuaciones para la PSD de los códigos de línea bipolar NRZ y bipolar RZ (ancho de pulso de $\frac{1}{2}$ T_b) asumiendo valores pico de ±3 V. Grafique los resultados de estas PSD para el caso donde $R = 1.544$ Mbits/s.

★ **3–26** La figura 3-16 muestra las PSD para varios códigos de línea. Estas PSD fueron derivadas asumiendo una potencia con valor de la unidad para cada señal de tal manera que las PSD puedan compararse con base en una potencia de transmisión igual. Vuelva a derivar estas PSD para los códigos de línea, asumiendo que el nivel pico es la unidad (es decir, $A = 1$). Grafique las PSD de tal forma que se puedan comparar sus espectros con base en un nivel pico igual de señal.

3–27 Utilizando la ecuación (3-36) determine las condiciones requeridas para la existencia de funciones delta en la PSD para los códigos de línea. Explique cómo afecta esto el diseño de sincronizadores de bit para estos códigos de línea. [*Sugerencia*: vea las ecuaciones (3-43) y (6-70d).]

3–28 Considere un patrón de datos aleatorios que consiste en 1 y 0 binarios, donde la probabilidad de obtener ya sea un 1 binario o un 0 binario es de $\frac{1}{2}$. Asuma que estos datos están codificados en una forma de onda de tipo polar de manera tal que la forma de pulso de cada bit esté dada por

$$f(t) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi t}{T_b}\right), & |t| < T_b/2 \\ 0, & |t| \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde T_b es el tiempo necesario para enviar un bit.
(a) Haga un diagrama de un ejemplo típico de esta forma de onda.
(b) Encuentre la expresión para la PSD de esta forma de onda y realice un diagrama de la misma.
(c) ¿Cuál es la eficiencia espectral de este tipo de señal binaria?

3–29 El flujo de datos 01101000101 aparece a la entrada de un codificador diferencial. Dependiendo de la condición de inicialización del codificador, encuentre dos posibles flujos de datos codificados diferencialmente que pueden aparecer a la salida.

3–30 Dibuje un diagrama de bloques práctico para un sistema de codificación y decodificación diferencial. Explique cómo funciona el sistema mostrando la codificación y decodificación para la secuencia 001111010001. Suponga que el dígito de referencia es un 1 binario. Muestre que no puede ocurrir el error de propagación.

3–31 Diseñe un repetidor regenerativo con su sincronizador de bit asociado para un código de línea polar RZ. Explique cómo funciona su diseño. (*Sugerencia*: consulte la figura 3-19 y la discusión acerca de los sincronizadores de bit).

3–32 Diseñe un sincronizador de bit para un código de línea Manchester NRZ cumpliendo con los siguientes pasos:
(a) Presente un diagrama de bloques simplificado.
(b) Explique cómo funciona el sincronizador.
(c) Especifique los requisitos del filtro del sincronizador.
(d) Diga las ventajas y desventajas de la utilización de este diseño para un código de línea Manchester NRZ en comparación de un código de línea polar NRZ con su sincronizador de bit asociado.

3–33 La figura 3-22c ilustra una señal multinivel de ocho niveles. Suponga que este código de línea se pasa a través de un canal que filtra la señal y agrega cierto ruido.
(a) Dibuje el diagrama de ojo para la forma de onda recibida.
(b) Diseñe un posible receptor con su sincronizador de símbolo asociado para este código de línea.
(c) Explique cómo funciona su receptor.

★ **3–34** La información en una forma de onda analógica se codifica primero dentro de una PCM binaria y después se convierte a una señal multinivel para su transmisión a través del canal. El número de multiniveles es ocho. Asuma que la señal analógica tiene un ancho de banda de 2,700 Hz y que se reproducirá a la salida del receptor con una exactitud de ±1□ (escala completa).
(a) Determine la mínima velocidad de bit de la señal PCM.
(b) Indique la mínima velocidad en bauds de la señal multinivel.
(c) Halle el mínimo ancho de banda absoluto del canal requerido para la transmisión de esta señal PCM.

★ **3–35** Una forma de onda binaria de 9,600 bits/s se convierte a una forma de onda octal (multinivel) que se pasa a través de un canal con una característica de filtro de coseno realzado de Nyquist. El canal tiene una respuesta condicionada (ecualizada) de fase a 2.4 kHz.
(a) □Cuál es la velocidad en bauds de la señal multinivel?
(b) □Cuál es el factor de *rolloff* de la característica de filtro?

3–36 Suponga que las propiedades espectrales de una forma de onda de $L = 64$ niveles con formas de pulso rectangulares de tipo RZ serán examinadas. La forma de pulso está dada por

$$f(t) = \Pi\left(\frac{2t}{T_s}\right)$$

donde T_s es el tiempo necesario para enviar uno de los símbolos multinivel.
(a) Determine la expresión para la PSD para el caso de niveles igualmente probables donde los niveles pico de señal para esta forma de onda multinivel son de + 10 V.
(b) □Cuál es el ancho de banda nulo?
(c) □Cuál es la eficiencia espectral?

3–37 Un sistema binario de comunicación utiliza la señalización polar. La respuesta de impulso general está diseñada para ser del tipo (sen x)/x, como está dada en la ecuación (3-67), de tal manera que no exista ISI. La velocidad de bit es de $R = f_s = 300$ bits/s.
(a) □Cuál es el ancho de banda de la señal polar?
(b) Grafique la forma de onda de la señal polar a la salida del sistema cuando los datos binarios de entrada equivalen a 01100101. □Se pueden discernir los datos con tan sólo observar esta forma de onda polar?

★ **3–38** La ecuación (3-67) presenta una posible respuesta de impulso no causal para un sistema de comunicación sin ISI. Para una aproximación causal, escoja

$$h_e(t) = \frac{\text{sen } \pi f_s(t - 4 \times 10^{-3})}{\pi f_s(t - 4 \times 10^{-3})} \Pi\left(\frac{t - 4 \times 10^{-3}}{8 \times 10^{-3}}\right)$$

donde $f_s = 1{,}000$.

(a) Utilizando una PC, calcule $H_e(f)$ mediante la integral de la transformada de Fourier, y grafique $|H_e(f)|$.

(b) ¿Cuál es el ancho de banda de esta aproximación causal y cómo se compara con el ancho de banda del filtro no causal descrito por las ecuaciones (3-67) y (3-68)?

3–39 Iniciando con la ecuación (3-69), demuestre que la respuesta al impulso del filtro de coseno realzado está dada por la ecuación (3-73).

3–40 Considere el filtro de coseno realzado de Nyquist dado por las ecuaciones (3-69) y (3-73).

(a) Grafique $|H_e(f)|$ para el caso donde $r = 0.75$, indicando f_1, f_2 y B en su gráfica de una manera similar a la figura 3-25.

(b) Grafique $h_e(t)$ para el caso donde $r = 0.75$ en términos de $1/f_0$. Su gráfica deberá ser parecida a la figura 3-26.

3–41 Encuentre la PSD de la forma de onda a la salida de un canal de coseno elevado con $r = 0.5$ cuando la entrada es una señal polar NRZ. Asuma que se emplea una señalización binaria igualmente probable y que el ancho de banda del canal es de un tamaño justo para prevenir ISI.

★ **3–42** La ecuación (3-66) suministra la condición para la ausencia de ISI (primer método de Nyquist). Utilizando dicha ecuación con $C = 1$ y $\tau = 0$, muestre que el primer método de Nyquist para la eliminación de ISI también se satisface si

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_e\left(f + \frac{k}{T_s}\right) = T_s \qquad \text{para } |f| \leq \frac{1}{2T_s}$$

3–43 Usando los resultados del problema 3-42, demuestre si las siguientes características de filtro satisfacen o no el criterio de Nyquist para la eliminación de ISI ($f_s = 2f_0 = 2/T_0$).

(a) $H_e(f) = \frac{T_0}{2} \Pi\left(\frac{1}{2} fT_0\right)$.

(b) $H_e(f) = \frac{T_0}{2} \Pi\left(\frac{2}{3} fT_0\right)$.

3–44 Suponga que un sistema de transmisión por pulsos tiene una característica general de filtro de coseno realzado de Nyquist descrita por la ecuación (3-69).

(a) Encuentre la función $Y(f)$ de Nyquist de la ecuación (3-75) que corresponde a la característica de filtro de coseno realzado de Nyquist.

(b) Haga un diagrama de $Y(f)$ para el caso donde $r = 0.75$.

(c) Realice otro diagrama de $Y(f)$ que no sea del tipo de coseno realzado y determine el ancho de banda absoluto de la característica de filtro de Nyquist resultante.

★ **3–45** Una señal analógica será convertida a una señal PCM que es un código de línea binario polar NRZ. La señal se transmite a través de un canal que está absolutamente limitado en banda a 4 kHz. Suponga que el cuantizador PCM tiene 16 pasos y que la función de transferencia equivalente del sistema en general es del tipo de coseno realzado con $r = 0.5$.

(a) Encuentre la máxima velocidad de bit PCM que el sistema puede soportar sin introducir ISI.

(b) Halle el máximo ancho de banda permitido para la señal analógica.

3–46 Resuelva el problema 3-45 para el caso de un código de línea multinivel polar NRZ con cuatro niveles.

★ **3–47** Datos multinivel con una velocidad de bit equivalente de 2,400 bits/s se envían a través de una canal utilizando un código de línea de cuatro niveles que tiene una forma de pulso rectangular a la salida del transmisor. El sistema general de transmisión (es decir, el transmisor, canal y receptor) tiene una característica de filtro de coseno realzado de Nyquist con $r = 0.5$.

(a) Encuentre la velocidad en bauds de la señal recibida.

(b) Halle el ancho de banda de 6 dB para este sistema de transmisión.

(c) Determine el ancho de banda absoluto del sistema.

3–48 Suponga que se diseñará un sistema de tipo PCM de tal manera que una señal de audio se pueda entregar a la salida del receptor. Esta señal de audio tendrá un ancho de banda de 3,400 Hz y una SNR de por lo menos 40 dB. Determine los requisitos para la velocidad de bit para un diseño que emplea:

(a) Señalización PCM con compresión y expansión de $\mu = 255$.

(b) Señalización DPCM.

Explique cuáles de los sistemas previos pueden utilizarse en su diseño y por qué.

3–49 Remítase a la figura 3-32, la cual muestra formas de onda DM típicas. Dibuje una forma de onda analógica que sea diferente de la mostrada en la figura. Dibuje la DM correspondiente y la forma de onda de la salida del integrador. Denote las regiones donde domina el ruido de sobrecarga de pendiente y donde lo hace el ruido granular.

3–50 Un sistema DM es probado mediante una señal senoidal de 10 kHz, 1 V pico a pico, a la entrada. La señal se muestrea a 10 veces la velocidad de Nyquist.

(a) ¿Cuál es el tamaño de paso requerido para prevenir la sobrecarga de pendiente y minimizar el ruido granular?

(b) ¿Cuál es la PSD para el ruido granular?

(c) Si la entrada al receptor está limitada por banda a 200 kHz, ¿cuál es la relación señal a potencia de ruido de cuantificación promedio?

3–51 Suponga que la entrada a una DM es $0.1t^8 - 5t + 2$. El tamaño de paso de la DM es 1 V y el muestreador opera a 10 muestras/s. Haga un diagrama de la forma de onda de entrada, la salida del modulador delta y la salida del integrador sobre un intervalo de tiempo de 0 a 2 s. Denote las regiones del ruido granular y la sobrecarga de pendiente.

3–52 Resuelva el problema 3-51 para el caso de un modulador delta adaptable donde el tamaño de paso se selecciona de acuerdo al número de 1 o 0 binarios sucesivos en la salida DM. Asuma que el tamaño de paso es 1.5 V cuando existen cuatro o más dígitos binarios del mismo signo, 1 V para el caso de tres dígitos sucesivos y 0.5 V para el caso de dos o menos dígitos sucesivos.

★ **3–53** Un modulador delta será diseñado para transmitir la información de una forma de onda analógica que tiene un nivel de pico a pico de 1 V y un ancho de banda de 3.4 kHz. Suponga que la forma de onda será transmitida a través de un canal cuya respuesta de frecuencia es extremadamente pobre sobre 1 MHz.

(a) Seleccione el tamaño de paso apropiado y la velocidad de muestreo para una señal de prueba senoidal y discuta el rendimiento del sistema, utilizando los valores de los parámetros que ha seleccionado.

(b) Si el sistema DM será utilizado para transmitir la información de una señal (analógica) de voz, seleccione el tamaño de paso apropiado cuando la velocidad de muestreo es de 25 kHz. Discuta el rendimiento del sistema bajo estas condiciones.

3–54 Una forma de onda analógica $w_1(t)$ está limitada en banda a 3 kHz y otra, $w_2(t)$, lo está en banda también a 9 kHz. Ambas señales se enviarán por TDM a través de un sistema PAM.

(a) Determine la mínima frecuencia de muestreo para cada señal y diseñe un conmutador y deconmutador TDM para soportar las señales.

(b) Haga un diagrama de algunas formas de onda típicas para $w_1(t)$ y $w_2(t)$ e ilustre la forma de onda TDM PAM correspondiente.

★ **3–55** Se llevará a cabo una multiplexión por división de tiempo de tres formas de onda a través de un canal utilizando PAM instantáneamente muestreada. Suponga que el ancho de pulso PAM es muy estrecho y

que cada una de las formas de onda analógicas se muestrea cada 0.15 s. Grafique la forma de onda TDM (compuesta) cuando las formas de onda analógicas de entrada son

$$w_1(t) = 3\ \text{sen}(2\pi t)$$

$$w_2(t) = \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

y

$$w_3(t) = -\Lambda(t-1)$$

3–56 Veintitrés señales analógicas, cada una con un ancho de banda de 3.4 kHz, se muestrean a una velocidad de 8 kHz y se hace una multiplexión de todas ellas con un canal de sincronización (8 kHz) dentro de una señal TDM PAM. Esta señal TDM se pasa a través de un canal con una característica general de filtro de coseno realzado de Nyquist de $r = 0.75$.

(a) Dibuje un diagrama de bloques para el sistema, indicando la f_s del conmutador y la velocidad general de pulso de la señal TDM PAM.

(b) Evalúe el ancho de banda absoluto requerido para el canal.

★ **3–57** Se realiza una multiplexión por división de tiempo de dos señales PAM planas para producir una señal TDM PAM compuesta que se transmite a través de un canal. La primera señal PAM se obtiene de una analógica que posee un espectro rectangular, $W_1(f) = W_1(f) = \Pi(f/2B)$. La segunda señal PAM se obtiene a partir de una analógica que cuenta con un espectro triangular $W_2(f) = \Lambda(f/B)$, donde $B = 3$ kHz.

(a) Determine la mínima frecuencia de muestreo para cada señal y diseñe un conmutador y deconmutador TDM para soportar dichas señales.

(b) Calcule y haga un diagrama del espectro de magnitud para la señal TDM PAM compuesta.

3–58 Resuelva el problema 3-56 para un sistema de modulación por código de pulso TDM en el cual se utilizan un cuantizador de 8 bits para generar las palabras PCM para cada una de las entradas analógicas y una palabra de sincronización de 8 bits en el canal de sincronización.

3–59 Diseñe un sistema TDM PCM que soportará cuatro entradas digitales (síncronas) de 300 bit/s y una entrada analógica con un ancho de banda de 500 Hz. Suponga que las muestras analógicas estarán codificadas dentro de palabras PCM de 4 bits. Dibuje un diagrama de bloques para su diseño, semejante a la figura 3-39, indicando la velocidad de datos en varios puntos del diagrama. Explique cómo funciona su diseño.

★ **3–60** Diseñe un sistema TDM que soportará dos entradas síncronas digitales de 2,400 bit/s y una entrada analógica con ancho de banda de 2,700 Hz. Suponga que la entrada analógica se muestrea a 1.11111 veces la velocidad de Nyquist y que se convierte a palabras PCM de cuatro bits. Dibuje un diagrama a bloques para su diseño, indicando la velocidad de datos en varios puntos de su diagrama. Explique cómo funciona su esquema TDM.

3–61 Encuentre el número de los siguientes dispositivos que pueden ser soportados por una línea TDM de tipo T1 si 1□ de la capacidad de la línea está reservada para propósitos de sincronización.

(a) Terminales teleimpresor de 110 bit/s.

(b) Codecs de voz de 8,000 bits/s.

(c) Puertos de salida de una computadora de 9,600 bits/s.

(d) Líneas PCM VF de 64 kbit/s.

(e) Terminales ISDN de 144 kbit/s.

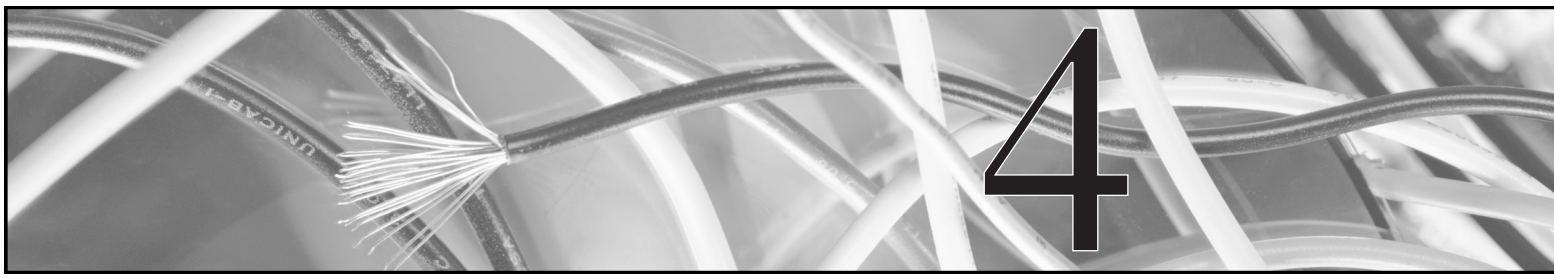
□Cómo cambiarían estos números si cada una de las fuentes operara a 10□ de su tiempo?

3–62 Suponga que una onda senoidal se muestrea a cuatro veces la velocidad de Nyquist usando muestreo instantáneo.
(a) Dibuje la señal PWM correspondiente.
(b) Dibuje la señal PPM correspondiente.

3–63 Explique por qué un sistema PPM requiere de una señal de sincronización, mientras que PAM y PWM pueden detectarse sin la necesidad de ella.

★ **3–64** Compare el ancho de banda requerido para enviar un mensaje utilizando señalización PPM y PCM. Suponga que la fuente digital envía 8 bits/carácter, de tal manera que puede enviar 256 mensajes diferentes (caracteres). Asuma que la velocidad de la fuente es de 10 caracteres/s. Empleando el teorema de dimensionalidad, $N/T_0 = 2B$, determine el mínimo ancho de banda B requerido.
(a) Determine el mínimo ancho de banda requerido para una señal PCM que codificará la información fuente.
(b) Halle el mínimo ancho de banda requerido para una señal PPM que codificará la información fuente.

Capítulo



4

PRINCIPIOS Y CIRCUITOS DE SEÑALIZACIÓN PASABANDA

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Envolventes complejas y señales moduladas
- Espectros de señales pasabanda
- Distorsión no lineal
- Circuitos de comunicación (mezcladores, lazos enganchados por fase, sintetizadores de frecuencia y detectores)
- Transmisores y receptores
- Software radio

Este capítulo estudia las técnicas de señalización *pasabanda*. Como se explicó al principio de la obra, la señal pasabanda de comunicación se obtiene al modular una señal pasabanda analógica o digital dentro de una portadora. Lo atractivo e interesante de este capítulo es que revela los principios básicos de la señalización pasabanda. Se utiliza la envolvente compleja debido a que puede representar cualquier tipo de señal pasabanda, que es la base para la comprensión de los sistemas de comunicación digitales y analógicos que se analizarán más a fondo en los capítulos 5 y 8. Este capítulo también describe los aspectos prácticos de los bloques de construcción empleados en los sistemas de comunicación, como filtros, amplificadores lineales y no lineales, mezcladores, convertidores elevadores y reductores, moduladores, detectores y lazos enganchados por fase. Se concluye con descripciones de transmisores, receptores y software radio.

4–1 REPRESENTACIÓN DE ENVOLVENTES COMPLEJAS DE FORMAS DE ONDA PASABANDA

¿Cómo pueden representarse en general las señales pasabanda digitales y analógicas? ¿Cómo se debe representar una señal modulada? ¿Cómo se representa el ruido pasabanda? Éstas son algunas de las preguntas que se responderán en esta sección.

Definiciones: banda base, pasabanda y modulación

DEFINICIÓN. Una forma de onda de *banda base* tiene una magnitud espectral diferente de cero para las frecuencias alrededor del origen (es decir, $f = 0$) y es despreciable en cualquier otro caso.

DEFINICIÓN. Una forma de onda *pasabanda* tiene una magnitud espectral diferente de cero para las frecuencias en cierta banda concentrada alrededor de una frecuencia $f = \pm f_c$, donde $f_c \gg 0$. La magnitud espectral es despreciable en cualquier otro caso. A la frecuencia f_c se le llama *frecuencia portadora*.

Para formas de onda de banda base el valor de f_c puede asignarse arbitrariamente como conveniencia matemática en *ciertos* problemas. En otros casos, principalmente en los problemas de modulación, f_c es la frecuencia de una señal oscilante en el circuito de transmisión y es la frecuencia asignada del transmisor, como por ejemplo 850 kHz para una estación radiodifusora de AM.

En los problemas de comunicaciones, la señal fuente de información es a menudo una señal en banda base, por ejemplo una forma de onda de lógica transistor-transistor (TTL, por sus siglas en inglés) de un circuito digital o una señal de audio (analógica) de un micrófono. El ingeniero en comunicaciones tiene la responsabilidad de construir un sistema que transfiera la información en la señal fuente $m(t)$ al destino deseado. Como muestra la figura 4-1, para esto se requiere con frecuencia del uso de una señal pasabanda, $s(t)$, la cual posee un espectro pasabanda concentrado alrededor de $\pm f_c$, donde f_c se escoge de tal manera que $s(t)$ se propagará a través del canal de comunicaciones, ya sea alámbrico o inalámbrico.

DEFINICIÓN. La *modulación* es el proceso de plasmar la información fuente sobre una señal pasabanda con una frecuencia de portadora f_c mediante la introducción de perturbaciones en amplitud o fase, o quizás ambas. Esta señal pasabanda se conoce como *modulada* $s(t)$ y a la señal fuente de banda base se le llama *moduladora* $m(t)$.

Más adelante se presentan en este mismo capítulo algunos ejemplos de cómo se logra exactamente la modulación. Esta definición indica que la modulación puede visualizarse como una operación de mapeo que plasma la información fuente sobre la señal pasabanda, $s(t)$. La señal pasabanda se transmitirá a través del canal.

La señal modulada se corrompe a causa del ruido conforme pasa a través del canal. Esto resulta en una forma de onda de señal pasabanda con ruido disponible a la entrada del receptor, $r(t)$ (consulte la figura 4-1). El receptor tiene la responsabilidad de intentar recuperar la información que fue enviada por la fuente. $\tilde{m}$ denota la versión contaminada de m.

Representación de la envolvente compleja

Todas las formas de onda *pasabanda*, independientemente de si provienen de una señal modulada, de señales interferentes o de ruido, pueden representarse en una forma conveniente dada por el teorema siguiente. Se utilizará $v(t)$ para representar canónicamente a la forma de onda pasabanda.

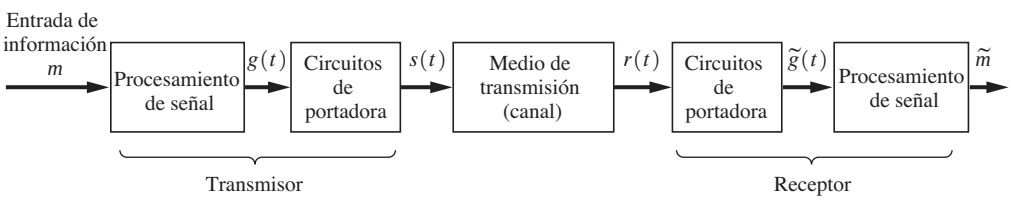


Figura 4–1 Sistema de comunicación.

específicamente, $v(t)$ puede representar la señal cuando $s(t) \equiv v(t)$□el ruido cuando $n(t) \equiv v(t)$□ la señal filtrada con ruido a la salida del canal cuando $r(t) \equiv v(t)$, o cualquier otro tipo de forma de onda pasabanda.[1]

TEOREMA. *Cualquier forma de onda pasabanda física puede representarse mediante*

$$v(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\} \tag{4–1a}$$

En este caso, $\text{Re}\{\cdot\}$ *denota la parte real de* $\{\cdot\}$, $g(t)$ *se conoce como la envolvente compleja de* $v(t)$ *y* f_c *es la frecuencia de portadora asociada (en hertz) donde* $\omega_c = 2\pi f_c$. *Más aún, otras dos representaciones equivalentes son*

$$v(t) = R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{4–1b}$$

y

$$v(t) = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\,\text{sen}\,\omega_c t \tag{4–1c}$$

donde

$$g(t) = x(t) + jy(t) = |g(t)|e^{j\underline{/g(t)}} \equiv R(t)e^{j\theta(t)} \tag{4–2}$$

$$x(t) = \text{Re}\{g(t)\} \equiv R(t)\cos\theta(t) \tag{4–3a}$$

$$y(t) = \text{Im}\{g(t)\} \equiv R(t)\,\text{sen}\,\theta(t) \tag{4–3b}$$

$$R(t) \triangleq |g(t)| \equiv \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \tag{4–4a}$$

y

$$\theta(t) \triangleq \underline{/g(t)} = \tan^{-1}\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) \tag{4–4b}$$

Demostración. Cualquier forma de onda física (no requiere ser periódica) puede representarse a lo largo de todo el tiempo, $T_0 \to \infty$, mediante la serie compleja de Fourier:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n\, e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = 2\pi/T_0 \tag{4–5}$$

Aún más, debido a que la forma de onda física es real, $c_{-n} = c_n^*$ y, utilizando $\text{Re}\{\cdot\} = \frac{1}{2}\{\cdot\} + \frac{1}{2}\{\cdot\}^*$ se obtiene que

$$v(t) = \text{Re}\left\{c_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}\right\} \tag{4–6}$$

Además, debido a que $v(t)$ es una forma de onda pasabanda, los coeficientes c_n poseen magnitudes despreciables para n alrededor de 0 y, en particular, $c_0 = 0$. Por lo tanto, con la introducción de un parámetro arbitrario f_c, la ecuación (4-6) se convierte en[2]

[1] El símbolo $\equiv$ denota una equivalencia y $\triangleq$ una definición.

[2] Como las frecuencias involucradas en el argumento de $\text{Re}\{\cdot\}$ son todas positivas, puede mostrarse que la función compleja $2\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$ es analítica en la mitad superior del plano complejo t. Muchas propiedades de interés resultan a razón de que esta función es una función analítica de una variable compleja.

$$v(t) = \text{Re}\left\{\left(2 \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n e^{j(n\omega_0 - \omega_c)t}\right) e^{j\omega_c t}\right\} \tag{4–7}$$

de tal manera que la ecuación (4-1a) sigue, donde

$$g(t) \equiv 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{j(n\omega_0 - \omega_c)t} \tag{4–8}$$

Debido a que $v(t)$ es una forma de onda pasabanda con espectro diferente a cero concentrado cerca de $f = f_c$, los coeficientes de Fourier c_n son diferentes a cero sólo para valores de n en el rango de $\pm nf_0 \approx f_c$. Por lo tanto, a partir de la ecuación (4-8), $g(t)$ posee un espectro concentrado cerca de $f = 0$. Es decir, $g(t)$ es una forma de onda de *banda base*.

Las formas de onda $g(t)$ y, por consiguiente, $x(t)$, $y(t)$, $R(t)$ y $\theta(t)$ son formas de onda de banda base y, a excepción de $g(t)$, todas son formas de onda reales. $R(t)$ es una forma de onda real no negativa. La ecuación (4-1) es una transformación de pasabajas a pasabanda. El factor $e^{j\omega_c t}$ en la ecuación (4-1a) desplaza (es decir, hace una traslación) del espectro de la señal de banda base $g(t)$ de una banda base hasta una frecuencia de portadora f_c. En el lenguaje de las comunicaciones, las frecuencias en la señal de banda base $g(t)$ se consideran *heterodinadas* hasta f_c. La envolvente compleja, $g(t)$, es a menudo una función compleja del tiempo y la generalización del concepto de fasores. Es decir, si $g(t)$ es una constante compleja, $v(t)$ es una forma de onda senoidal pura de frecuencia f_c y esta constante compleja es el fasor correspondiente a la senoide. Si $g(t)$ no es una constante, entonces $v(t)$ no es una senoide pura, ya que la amplitud y la fase de $v(t)$ varían con el tiempo, causadas por las variaciones en $g(t)$.

Representando la envolvente compleja en términos de dos funciones reales en las coordenadas cartesianas se tiene que

$$g(x) \equiv x(t) + jy(t)$$

donde $x(t) = \text{Re}\{g(t)\square$ y $y(t) = \text{Im}\{g(t)\square$ Se dice que $x(t)$ es la *modulación por fase* asociada con $v(t)$ y $y(t)$ está asociada con la *modulación en cuadratura* asociada con $v(t)$. Como alternativa, la ecuación (4-2) resulta en la forma polar de $g(t)$, representada por $R(t)$ y $\theta(t)$, donde las identidades entre las coordenadas cartesianas y polares se obtienen de las ecuaciones (4-3) y (4-4). $R(t)$ y $\theta(t)$ son formas de onda reales y, además, $R(t)$ siempre es no negativa. Se dice que $R(t)$ es la *modulación de amplitud* (AM) sobre $v(t)$ y $\theta(t)$ la *modulación de fase* (PM) sobre $v(t)$.

La utilidad de la representación de la envolvente compleja para formas de onda pasabanda no puede dejar de enfatizarse. En los sistemas modernos de comunicación, la señal pasabanda a menudo se divide en dos canales, uno para $x(t)$ llamado canal I (en fase, del inglés *in-phase*) y otro para $y(t)$ llamado canal Q (fase en cuadratura, del inglés *quadrature-phase*). En las simulaciones digitales por computadora de señales pasabanda, la velocidad de muestreo empleada en la simulación puede minimizarse si se trabaja con la envolvente compleja $g(t)$ en lugar de la señal pasabanda $v(t)$, ya que $g(t)$ es la equivalencia en banda base de la señal pasabanda.

4–2 REPRESENTACIÓN DE SEÑALES MODULADAS

La modulación es el proceso de codificación de la información fuente $m(t)$ (señal moduladora) dentro de una señal pasabanda $s(t)$ (señal modulada). En consecuencia, la señal modulada es solamente una aplicación especial de la representación pasabanda. La *señal modulada* se obtiene de

$$s(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\} \tag{4–9}$$

donde $\omega_c = 2\pi f_c$, en la cual f_c es la frecuencia de la portadora. La envolvente compleja $g(t)$ es una función de la señal moduladora $m(t)$. Esto es,

$$g(t) = g[m(t)] \tag{4–10}$$

Por lo tanto, $g[\cdot]$ realiza una operación de mapeo sobre $m(t)$. Esto se mostró en la figura 4-1.

La tabla 4-1 plantea una imagen completa del problema de la modulación. En ella se presentan ejemplos de la función de mapeo $g[m]$ para la modulación de amplitud (AM), doble banda lateral con portadora suprimida (DSB-SC), modulación de fase (PM), modulación de frecuencia (FM), banda lateral única de AM con portadora suprimida (SSB-AM-SC), banda lateral única de PM (SSB-PM), banda lateral única de FM (SSB-FM), banda lateral única de envolvente detectable (SSB-EV), banda lateral única de ley cuadrada detectable (SSB-SQ) y modulación en cuadratura (QM). Las señales moduladas digitales y analógicas se discutirán a detalle en el capítulo 5. Las señales pasabanda digitalmente moduladas se obtienen cuando $m(t)$ es una señal digital de banda base□por ejemplo, la salida de un circuito de lógica transistor-transistor (TTL).

Por supuesto que es posible utilizar otras funciones de $g[m]$ que no aparecen en la tabla 4-1. La pregunta es: □son útiles? Se buscan las funciones $g[m]$ que sean fáciles de implementar y que darán propiedades espectrales deseables. Aún más, se requiere de la función inversa $m[g]$ en el receptor. La inversa tiene que ser un solo valor sobre el rango utilizado y poder implementarse fácilmente. El mapeo debe suprimir tanto ruido como sea posible de tal manera que $m(t)$ pueda recuperarse con la mínima distorsión.

4–3 ESPECTRO DE SEÑALES PASABANDA

El espectro de una señal pasabanda se relaciona directamente con el espectro de su envolvente compleja.

TEOREMA. *Si una forma de onda pasabanda se representa mediante*

$$v(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\} \tag{4–11}$$

entonces el espectro de la forma de onda pasabanda es

$$V(f) = \tfrac{1}{2}[G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)] \tag{4–12}$$

y la PSD de la forma de onda es

$$\mathcal{P}_v(f) = \tfrac{1}{4}[\mathcal{P}_g(f - f_c) + \mathcal{P}_g(-f - f_c)] \tag{4–13}$$

donde $G(f) = \mathcal{F}[g(t)]$ *y* $\mathcal{P}_g(f)$ *es la PSD de* $g(t)$.

Demostración.

$$v(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\} = \tfrac{1}{2}g(t)e^{j\omega_c t} + \tfrac{1}{2}g^*(t)e^{-j\omega_c t}$$

Por lo tanto,

$$V(f) = \mathcal{F}[v(t)] = \tfrac{1}{2}\,\mathcal{F}[g(t)e^{j\omega_c t}] + \tfrac{1}{2}\mathcal{F}[g^*(t)e^{-j\omega_c t}] \tag{4–14}$$

TABLA 4–1 FUNCIONES DE ENVOLVENTE COMPLEJA PARA VARIOS TIPOS DE MODULACIÓN[a]

Tipo de modulación	Funciones de mapeo $g(m)$	Modulación en cuadratura correspondiente	
		$x(t)$	$y(t)$
AM	$A_c[1 + m(t)]$	$A_c[1+m(t)]$	0
DSB-SC	$A_c m(t)$	$A_c m(t)$	0
PM	$A_c e^{jD_p m(t)}$	$A_c \cos[D_p m(t)]$	$A_c \operatorname{sen}[D_p m(t)]$
FM	$A_c e^{jD_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\, d\sigma}$	$A_c \cos\left[D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\, d\sigma\right]$	$A_c \operatorname{sen}\left[D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\, d\sigma\right]$
SSB-AM-SC[b]	$A_c[m(t) \pm j\hat{m}(t)]$	$A_c m(t)$	$\pm A_c \hat{m}(t)$
SSB-PM[b]	$A_c e^{jD_p[m(t) \pm j\hat{m}(t)]}$	$A_c e^{\mp D_p \hat{m}(t)} \cos[D_p m(t)]$	$A_c e^{\mp D_p \hat{m}(t)} \operatorname{sen}[D_p m(t)]$
SSB-FM[b]	$A_c e^{jD_f \int_{-\infty}^{t} [m(\sigma) \pm j\hat{m}(\sigma)]\, d\sigma}$	$A_c e^{\mp D_f \int_{-\infty}^{t} \hat{m}(\sigma)\, d\sigma} \cos\left[D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\, d\sigma\right]$	$A_c e^{\mp D_f \int_{-\infty}^{t} \hat{m}(\sigma)\, d\sigma} \operatorname{sen}\left[D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\, d\sigma\right]$
SSB-EV[b]	$A_c e^{\{\ln[1+m(t)] \pm j\hat{\ln}[1+m(t)]\}}$	$A_c[1+m(t)] \cos\{\hat{\ln}[1+m(t)]\}$	$\pm A_c[1+m(t)] \operatorname{sen}\{\hat{\ln}[1+m(t)]\}$
SSB-SQ[b]	$A_c e^{(1/2)\{\ln[1+m(t)] \pm j\hat{\ln}[1+m(t)]\}}$	$A_c\sqrt{1+m(t)} \cos\{\frac{1}{2}\hat{\ln}[1+m(t)]\}$	$\pm A_c\sqrt{1+m(t)} \operatorname{sen}\{\frac{1}{2}\hat{\ln}[1+m(t)]\}$
QM	$A_c[m_1(t) + jm_2(t)]$	$A_c m_1(t)$	$A_c m_2(t)$

TABLA 4–1 FUNCIONES DE ENVOLVENTE COMPLEJA PARA VARIOS TIPOS DE MODULACIÓN (*cont.*)

Tipo de modulación	Modulación de amplitud y fase correspondiente		Linealidad	Comentarios
	$R(t)$	$\theta(t)$		
AM	$A_c\lvert 1 + m(t)\rvert$	$\begin{cases} 0, & m(t) > -1 \\ 180°, & m(t) < -1 \end{cases}$	L[c]	Se requiere que $m(t) > -1$ para la detección de envolvente
DSB-SC	$A_c\lvert m(t)\rvert$	$\begin{cases} 0, & m(t) > 0 \\ 180°, & m(t) < 0 \end{cases}$	L	Se requiere de detección coherente
PM	A_c	$D_p m(t)$	NL	D_p es la constante de desviación de fase (rad/volt)
FM	A_c	$D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\, d\sigma$	NL	D_f es la constante de desviación de frecuencia (rad/volt-sec)
SSB-AM-SC[b]	$A_c\sqrt{[m(t)]^2 + [\hat{m}(t)]^2}$	$\tan^{-1}[\pm\hat{m}(t)/m(t)]$	L	Se requiere de detección coherente
SSB-PM[b]	$A_c e^{\pm D_p \hat{m}(t)}$	$D_p m(t)$	NL	
SSB-FM[b]	$A_c e^{\pm D_f \int_{-\infty}^{t} \hat{m}(\sigma) d\sigma}$	$D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\, d\sigma$	NL	
SSB-EV[b]	$A_c\lvert 1 + m(t)\rvert$	$\pm\ln[1 + m(t)]$	NL	Se requiere que $m(t) > -1$ tal que $\ln(\cdot)$ resultará en un valor real
SSB-SQ[b]	$A_c\sqrt{1 + m(t)}$	$\pm\frac{1}{2}\ln[1 + m(t)]$	NL	Se requiere que $m(t) > -1$ tal que $\ln(\cdot)$ resultará en un valor real
QM	$A_c\sqrt{m_1^2(t) + m_2^2(t)}$	$\tan^{-1}[m_2(t)/m_1(t)]$	L	Utilizado en la televisión a colores NTSC; requiere detección coherente

[b] [a] $A_c > 0$ es una constante que establece el nivel de potencia de la señal como se evalúa mediante el uso de la ecuación (4-17); L, lineal; NL, no lineal; $\hat{\cdot}$ es la transformada de Hilbert (es decir, la versión desplazada en fase por −90°) de $[\cdot]$. (Consulte la sección 5-5 y la sección A-7 en el apéndice A.)

[b] Utilice signos superiores para las señales de banda lateral superiores y signos inferiores para las señales de banda lateral inferiores.

[c] En realidad, las señales AM no son lineales ya que el término de portadora no satisface la condición de linealidad (superposición).

Si se utiliza $\mathcal{F}[g^*(t)] = G^*(-f)$ de la tabla 2-1 y la propiedad de traslación de frecuencia de las transformadas de Fourier de la tabla 2-1, esta ecuación se convierte en

$$V(f) = \tfrac{1}{2}\{G(f - f_c) + G^*[-(f + f_c)]\} \tag{4–15}$$

la cual se reduce a la ecuación (4-12).

La PSD para $v(t)$ se obtiene evaluando primero la autocorrelación para $v(t)$:

$$R_v(\tau) = \langle v(t)v(t+\tau)\rangle = \langle \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\}\ \text{Re}\{g(t+\tau)\ e^{j\omega_c(t+\tau)}\}\rangle$$

Utilizando la identidad (consulte el problema 2-66)

$$\text{Re}(c_2)\ \text{Re}(c_1) = \tfrac{1}{2}\ \text{Re}(c_2^* c_1) + \tfrac{1}{2}\ \text{Re}(c_2 c_1)$$

donde $c_2 = g(t)e^{j\omega_c t}$ y $c_1 = g(t+\tau)\ e^{j\omega_c(t+\tau)}$ se tiene que

$$R_v(\tau) = \langle \tfrac{1}{2}\ \text{Re}\{g^*(t)g(t+\tau)\ e^{-j\omega_c t}\ e^{j\omega_c(t+\tau)}\}\rangle + \langle \tfrac{1}{2}\ \text{Re}\{g(t)g(t+\tau)\ e^{j\omega_c t}\ e^{j\omega_c(t+\tau)}\}\rangle$$

Considerando que tanto $\langle\ \rangle$ como Re{ } son operadores lineales, entonces se puede intercambiar el orden de los operadores sin afectar el resultado y la autocorrelación se convierte en

$$R_v(\tau) = \tfrac{1}{2}\ \text{Re}\{\langle g^*(t)g(t+\tau)\ e^{j\omega_c\tau}\rangle\} + \tfrac{1}{2}\ \text{Re}\{\langle g(t)g(t+\tau)\ e^{j2\omega_c t}e^{j\omega_c\tau}\rangle\}$$

o

$$R_v(\tau) = \tfrac{1}{2}\ \text{Re}\{\langle g^*(t)g(t+\tau)\rangle\ e^{j\omega_c\tau}\} + \tfrac{1}{2}\ \text{Re}\{\langle g(t)g(t+\tau)\ e^{j2\omega_c t}\rangle e^{j\omega_c\tau}\}$$

Pero $\langle g^*(t)g(t+\tau)\rangle = R_g(\tau)$. El segundo término en el lado derecho es despreciable, ya que $e^{j2\omega_c t} = \cos 2\omega_c t + j \text{ sen } 2\omega_c t$ oscila mucho más rápido que las variaciones en $g(t)g(t+\tau)$. En otras palabras, f_c es mucho mayor que las frecuencias en $g(t)$, así que la integral es despreciable. Esta es una aplicación del lema de Riemann-Lebesque para el cálculo de integrales [Olmsted, 1961]. Por lo tanto, la autocorrelación se reduce a

$$R_v(\tau) = \tfrac{1}{2}\ \text{Re}\{R_g(\tau)e^{j\omega_c\tau}\} \tag{4–16}$$

La PSD se obtiene tomando la transformada de Fourier de la ecuación (4-16) (es decir, aplicando el teorema de Wiener-Khintchine). Note que la ecuación (4-16) posee la misma forma matemática que la (4-11) cuando t se reemplaza con τ, así que la transformada de Fourier tiene la misma forma que la ecuación (4-12). Por lo tanto,

$$\mathcal{P}_v(f) = \mathcal{F}[R_v(\tau)] = \tfrac{1}{4}\ [\mathcal{P}_g(f - f_c) + \mathcal{P}_g^*(-f - f_c)]$$

Pero $\mathcal{P}_g^*(f) = \mathcal{P}_g(f)$, ya que la PSD es una función real. Por ende, la ecuación (4-13) genera el resultado para la PSD.

4–4 EVALUACIÓN DE POTENCIA

TEOREMA. *La potencia normalizada promedio total de una forma de onda pasabanda $v(t)$ es*

$$P_v = \langle v^2(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_v(f)\ df = R_v(0) = \tfrac{1}{2}\langle |g(t)|^2\rangle \tag{4–17}$$

donde "normalizada" implica que la carga es equivalente a un ohm.

Demostración. Sustituyendo $v(t)$ dentro de la ecuación (2-67) se tiene que

$$P_v = \langle v^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_v(f)\, df$$

Pero $R_v(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{P}_v(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_v(f) e^{j2\pi f\tau}\, df$, así que

$$R_v(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_v(f)\, df$$

Además, a partir de la ecuación (4-16),

$$R_v(0) = \tfrac{1}{2} \operatorname{Re}\{R_g(0)\} = \tfrac{1}{2} \operatorname{Re}\{\langle g^*(t) g(t+0) \rangle\}$$

o

$$R_v(0) = \tfrac{1}{2} \operatorname{Re}\{\langle |g(t)|^2 \rangle\}$$

Pero $|g(t)|$ siempre es real, así que

$$R_v(0) = \tfrac{1}{2} \langle |g(t)|^2 \rangle$$

Otro tipo de clasificación de potencia, llamada *potencia pico de envolvente* (PEP, por sus siglas en inglés), es de utilidad en las especificaciones para transmisores.

Definición. La *potencia pico de envolvente* (PEP) es la potencia promedio que se obtendría si $|g(t)|$ se mantuviera constante a su máximo valor.

Esto es equivalente a la evaluación de la potencia promedio en una senoide de RF no modulada que tiene un valor pico de $A_p = \text{máx}\,[v(t)]$, como se puede observar de la figura 5-1b.

Teorema. *La PEP normalizada se obtiene mediante*

$$P_{\text{PEP}} = \tfrac{1}{2}\,[\text{máx}\,|g(t)|]^2 \tag{4–18}$$

Una demostración de este teorema sigue al aplicar la definición a la ecuación (4-17). Como se describirá en los capítulos 5 y 8, la PEP es útil para especificar la capacidad de potencia de transmisores de AM, SSB y televisión.

Ejemplo 4–1 Señal de amplitud modulada

Evalúe el espectro de magnitud para una señal de amplitud modulada (AM). De la tabla 4-1 se sabe que la envolvente compleja de una señal AM es

$$g(t) = A_c[1 + m(t)]$$

así que el espectro de la envolvente compleja es

$$G(f) = A_c \delta(f) + A_c M(f) \tag{4–19}$$

Usando la ecuación (4-9) se obtiene la forma de onda de la señal AM

$$s(t) = A_c[1 + m(t)] \cos \omega_c t$$

y, utilizando la ecuación (4-12), se tiene que el espectro de AM

$$S(f) = \tfrac{1}{2} A_c[\delta(f-f_c) + M(f-f_c) + \delta(f+f_c) + M(f+f_c)] \tag{4–20a}$$

donde, debido a que $m(t)$ es real, se utilizan $M^*(f) = M(-f)$ y $\delta^*(f) = \delta(-f)$ (la función delta se definió como par). Suponga que el espectro de magnitud de la modulación es una función triangular, como se muestra en la figura 4-2a. Este espectro puede surgir de una fuente analógica de audio en donde se enfatizan las frecuencias bajas. El espectro AM resultante, empleando la ecuación (4-20a), se muestra en la figura 4-2b. Note que como no hay solape entre $G(f-f_c)$ y $G^*(-f-f_c)$, el espectro de magnitud es

$$|S(f)| = \begin{cases} \tfrac{1}{2}A_c\delta(f-f_c) + \tfrac{1}{2}A_c|M(f-f_c)|, & f > 0 \\ \tfrac{1}{2}A_c\delta(f+f_c) + \tfrac{1}{2}A_c|M(-f-f_c|, & f < 0 \end{cases} \tag{4–20b}$$

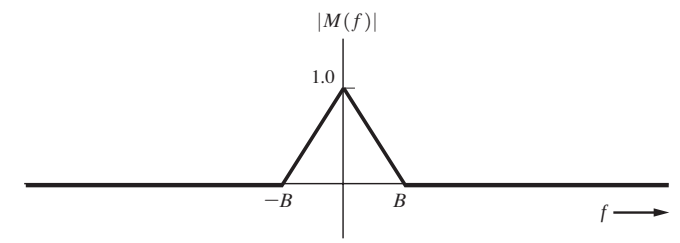
El valor 1 en $g(t) = A_c[1 + m(t)]$ causa la ocurrencia de funciones delta en el espectro cuando $f = \pm f_c$, donde f_c es la frecuencia de portadora asignada. Utilizando la ecuación (4-17) se obtiene la potencia promedio total de la señal

$$\begin{aligned} P_s &= \tfrac{1}{2} A_c^2\langle|1 + m(t)|^2\rangle = \tfrac{1}{2} A_c^2\langle 1 + 2m(t) + m^2(t)\rangle \\ &= \tfrac{1}{2} A_c^2[1 + 2\langle m(t)\rangle + \langle m^2(t)\rangle] \end{aligned}$$

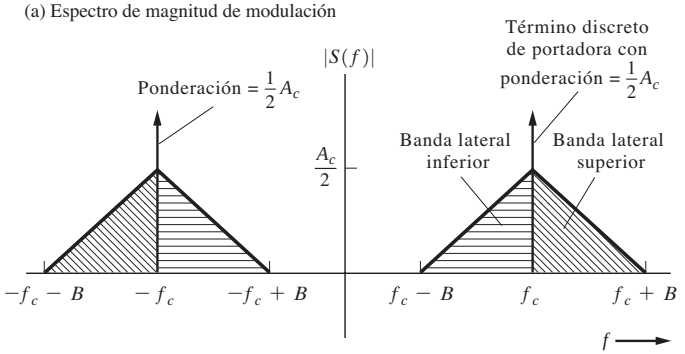
Si se asume que el valor de DC de la modulación es igual a cero, como se muestra en la figura 4-2a, entonces la potencia promedio de la señal se convierte en

$$P_s = \tfrac{1}{2} A_c^2[1 + P_m] \tag{4–21}$$

donde $P_m = \langle m^2(t)\rangle$ es la potencia en la modulación $m(t)$, $\frac{1}{2} A_c^2$ la potencia de portadora y $\frac{1}{2} A_c^2 P_m$ la potencia en las bandas laterales de $s(t)$.



(a) Espectro de magnitud de modulación



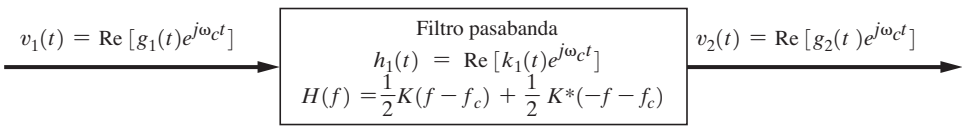
(b) Espectro de magnitud de señal AM

Figura 4–2 Espectro de una señal AM.

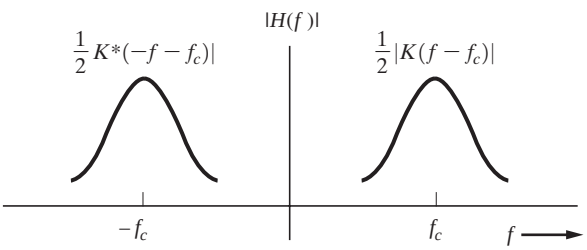
4–5 FILTRADO PASABANDA Y DISTORSIÓN LINEAL

Filtro pasabajas equivalente

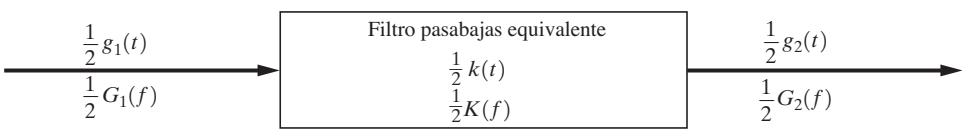
En la sección 2-6 se describió la técnica de función general de transferencia para el tratamiento de problemas de filtros lineales. A continuación se desarrollará una técnica para modelar un filtro pasabanda mediante un filtro pasabajas equivalente que tiene una respuesta al impulso de valor complejo (consulte la figura 4-3a)□$v_1(t)$ y $v_2(t)$ son las formas de onda pasabajas de entrada y de salida, con sus envolventes complejas correspondientes $g_1(t)$ y $g_2(t)$. La respuesta al impulso del filtro pasabanda, $h(t)$, puede también representarse por su envolvente compleja correspondiente $k(t)$.


$v_1(t) = \text{Re}\,[g_1(t)e^{j\omega_c t}]$
Filtro pasabanda
$h_1(t) = \text{Re}\,[k_1(t)e^{j\omega_c t}]$
$H(f) = \frac{1}{2}K(f - f_c) + \frac{1}{2}K^*(-f - f_c)$
$v_2(t) = \text{Re}\,[g_2(t)e^{j\omega_c t}]$

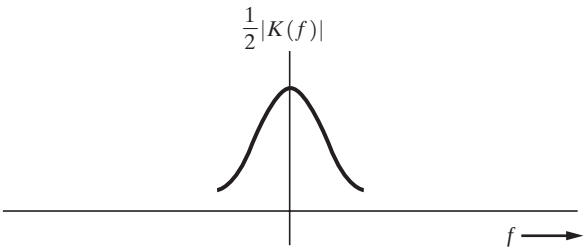
(a) Filtro pasabanda



(b) Respuesta de frecuencia típica de filtro pasabanda



(c) Filtro pasabajas equivalente (respuesta al impulso compleja)



(d) Respuesta de frecuencia típica de filtro pasabajas equivalente

Figura 4–3 Filtrado pasabanda.

Además, como se muestra en la figura 4-3a, la descripción en el dominio de frecuencia, $H(f)$, puede expresarse en términos de $K(f)$ con la ayuda de las ecuaciones (4-11) y (4-12). La figura 4-3b muestra una característica típica de respuesta de frecuencia pasabaja $|H(f)|$.

TEOREMA. *Las envolventes complejas para la entrada, salida y respuesta al impulso de un filtro pasabanda se relacionan a través de*

$$\tfrac{1}{2}g_2(t) = \tfrac{1}{2}g_1(t) * \tfrac{1}{2}k(t) \tag{4–22}$$

donde $g_1(t)$ es la envolvente compleja de la entrada y $k(t)$ es la envolvente compleja de la respuesta al impulso. También sigue que

$$\tfrac{1}{2}G_2(f) = \tfrac{1}{2}G_1(f)\tfrac{1}{2}K(f) \tag{4–23}$$

Demostración. Se sabe que el espectro de la salida es

$$V_2(f) = V_1(f)\ H(f) \tag{4–24}$$

□a que $v_1(t)$, $v_2(t)$ y $h(t)$ son todas formas de onda pasabanda, sus espectros se relacionan con los de sus envolventes complejas mediante la ecuación (4-15)□por lo tanto, la ecuación (4-24) se convierte en

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}[G_2(f-f_c) + G_2^*(-f-f_c)] \\
&\quad = \tfrac{1}{2}[G_1(f-f_c) + G_1^*(-f-f_c)]\tfrac{1}{2}[K(f-f_c) + K^*(-f-f_c)] \\
&\quad = \tfrac{1}{4}[G_1(f-f_c)K(f-f_c) + G_1(f-f_c)K^*(-f-f_c) \\
&\qquad + G_1^*(-f-f_c)K(f-f_c) + G_1^*(-f-f_c)K^*(-f-f_c)]
\end{aligned} \tag{4–25}$$

Pero $G_1(f-f_c)\ K^*(-f-f_c) = 0$ debido a que el espectro de $G_1(f-f_c)$ es cero en la región de frecuencias alrededor de $-f_c$, donde $K^*(-f-f_c)$ es diferente de cero. Es decir, no existe solape espectral de $G_1(f-f_c)$ y $K^*(-f-f_c)$ ya que $G_1(f)$ y $K(f)$ poseen espectros diferentes de cero alrededor de sólo $f = 0$ (es decir, de banda base, como se ilustra en la figura 4-3d). De la misma manera, $G_1^*(-f-f_c)$ $K(f-f_c) = 0$. En consecuencia, la ecuación (4-25) se convierte en

$$\begin{aligned}
&[\tfrac{1}{2}G_2(f-f_c)] + [\tfrac{1}{2}G_2^*(-f-f_c)] \\
&\qquad = [\tfrac{1}{2}G_1(f-f_c)\ \tfrac{1}{2}K(f-f_c)] + [\tfrac{1}{2}G_1^*(-f-f_c)\ \tfrac{1}{2}K^*(-f-f_c)]
\end{aligned} \tag{4–26}$$

Por lo tanto, $\frac{1}{2}G_2(f) = \frac{1}{2}G_1(f)\ \frac{1}{2}K(f)$, lo cual es idéntico a la ecuación (4-23). Tomando la transformada de Fourier inversa de ambos lados de la ecuación (4-23) se obtiene la ecuación (4-22).

Este teorema indica que cualquier sistema de filtro pasabanda puede describirse y analizarse mediante un *filtro pasabajas equivalente* como muestra la figura 4-3c. En la figura 4-3d se aprecia una característica típica de respuesta de frecuencia pasabajas equivalente. Las ecuaciones para los filtros pasabajas equivalentes son a menudo mucho menos complicadas que las empleadas para los filtros pasabanda, así que el modelo para un sistema de filtro pasabajas es de gran utilidad. La frecuencia más alta es mucho más pequeña en el filtro pasabajas equivalente, y esto es la base para los programas por computadora que emplean muestreo en la simulación de sistemas de comunicación pasabanda (discutidos en la sección 4-6). Además, como el problema 4-12 y la figura P4-12 muestran, el filtro pasabajas equivalente con respuesta al impulso compleja puede lograrse empleando cuatro filtros pasabajas con respuesta al impulso real□sin embargo, si la respuesta de frecuencia del filtro pasabajas es simétrica hermitiana alrededor de $f = f_c$, entonces sólo se requieren dos filtros pasabajas con respuesta de impulso real.

Un filtro pasabanda lineal puede causar variaciones en la modulación de fase a la salida, $\theta_2(t) = \angle g_2(t)$, como una función de la modulación de amplitud en la envolvente compleja de entrada, $R_1(t) = |g_1(t)|$. A esto se le llama *conversión AM a PM*. De manera similar, el filtro puede causar variaciones en la modulación de amplitud a la salida, $R_2(t)$, debido a la PM en la entrada, $\theta_1(t)$. Esto recibe el nombre de *conversión PM a AM*.

Dado que $h(t)$ representa un filtro lineal, $g_2(t)$ será una versión filtrada lineal de $g_1(t)$; sin embargo, $\theta_2(t)$ y $R_2(t)$, los componentes de PM y AM, respectivamente, de $g_2(t)$, serán una versión filtrada *no lineal* de $g_1(t)$, debido a que $\theta_2(t)$ y $R_2(t)$ son funciones no lineales de $g_2(t)$. El análisis de la distorsión no lineal es muy complicado, y a pesar de que muchas técnicas de análisis se han publicado, ninguna ha satisfecho completamente. Panter [1965] presenta un resumen en tres capítulos sobre algunas de estas técnicas; también se recomienda uno de los tratados clásicos [Bedrosian y Rice, 1968]. Más aún, la no linealidad que ocurre en un sistema práctico puede causar distorsión no lineal, así como efectos de conversión AM a PM. Los efectos no lineales pueden analizarse mediante varias técnicas, incluyendo el análisis de serie de potencia, que se discute más adelante en este capítulo en la sección sobre amplificadores. Si se desea analizar un efecto no lineal en un sistema *pasabanda*, una técnica de la serie de Fourier que utiliza la Transformada de Chebyshev puede ser de gran utilidad [Spilker, 1977].

Distorsión lineal

En la sección 2-6 se encontraron las condiciones generales para una transmisión sin distorsión. A continuación se mostrará un conjunto de condiciones de menor restricción que son satisfactorias para *filtros pasabanda* (canales) no lineales. Para una transmisión sin distorsión de señales pasabanda, la función de transferencia de canal, $H(f) = |H(f)|e^{j\theta(f)}$, requiere satisfacer los siguientes requisitos:

- La respuesta de amplitud es constante. Es decir,

$$|H(f)| = A \tag{4–27a}$$

  donde A es una constante positiva (real).
- La derivada de la respuesta de fase es una constante. Es decir,

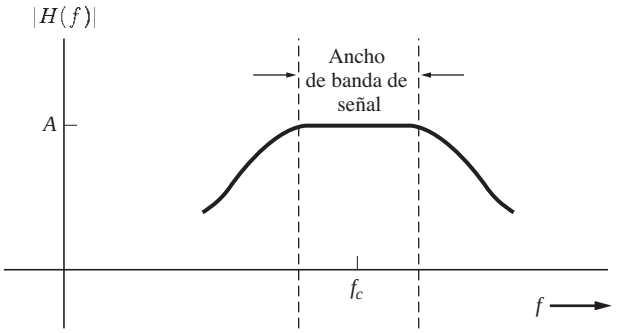
$$-\frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(f)}{df} = T_g \tag{4–27b}$$

  donde T_g es una constante llamada el *retraso de la envolvente* compleja o, de manera más concisa, el *retraso de grupo* y $\theta(f) = \angle H(f)$.

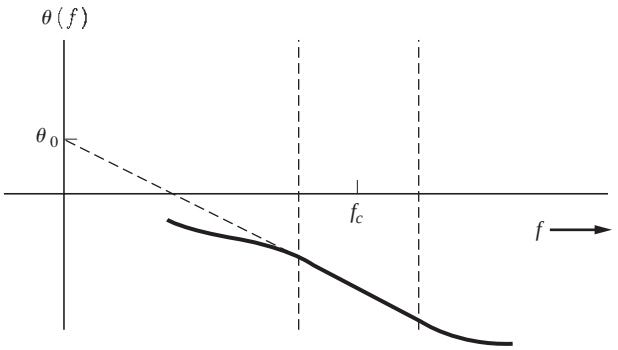
Esto se ilustra en la figura 4-4. Note que la ecuación (4-27a) es idéntica al requisito general de la ecuación (2-150a), pero la ecuación (4-27b) es más restrictiva que la ecuación (2-150b). Es decir, si se satisface la ecuación (2-150b), entonces la ecuación (4-27b) también se cumple, donde $T_d = T_g$; sin embargo, si se satisface la ecuación (4-27b), la ecuación (2-150) no se cumple necesariamente, ya que la integral de (4-27b) es

$$\theta(f) = -2\pi f T_g + \theta_0 \tag{4–28}$$

donde θ_0 es una constante de desplazamiento de fase, como se muestra en la figura 4-4b. Si θ_0 resulta ser diferente de cero, la ecuación (2-150b) no se satisfará.



(a) Respuesta de magnitud



(b) Respuesta de fase

Figura 4–4 Características de transferencia de un canal pasabanda sin distorsión.

A continuación se mostrará que las ecuaciones (4-27a) y (4-27b) son requisitos suficientes para una transmisión sin distorsión de señales pasabanda. A partir de las ecuaciones (4-27a) y (4-27b) se tiene que la función de transferencia de canal (o filtro) es

$$H(f) = Ae^{j(-2\pi f\, T_g + \theta_0)} = (Ae^{j\theta_0})e^{-j2\pi f\, T_g} \tag{4–29}$$

sobre el rango pasabanda de la señal. Si la entrada del canal pasabanda está representada por

$$v_1(t) = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\,\text{sen}\,\omega_c t$$

entonces, usando la ecuación (4-29) y sabiendo que $e^{-j2\pi f T_g}$ causa un retraso de T_g, se encuentra que la salida del canal es

$$v_2(t) = Ax(t - T_g)\cos[\omega_c(t - T_g) + \theta_0] - Ay(t - T_g)\,\text{sen}[\omega_c(t - T_g) + \theta_0]$$

Empleando la ecuación (4-28) se obtiene que

$$v_2(t) = Ax(t - T_g)\cos[\omega_c t + \theta(f_c)] - Ay(t - T_g)\,\text{sen}[\omega_c t + \theta(f_c)]$$

donde, mediante el uso de la ecuación (2-150b) evaluada a $f = f_c$,

$$\theta(f_c) = -\omega_c T_g + \theta_0 = -2\pi f_c T_d$$

Por lo tanto, la señal pasabanda de salida puede describirse mediante

$$v_2(t) = Ax(t - T_g)\cos[\omega_c(t - T_d)] - Ay(t - T_g)\,\text{sen}[\omega_c(t - T_d)] \tag{4–30}$$

donde la modulación sobre la portadora (es decir, los componentes x y y) se han retrasado debido al *retraso de tiempo de grupo*, T_g, y la portadora se ha retrasado a causa del *retraso de tiempo de portadora*, T_d. Como $\theta(f_c) = -2\pi f_c T_d$, donde $\theta(f_c)$ es el desplazamiento de fase de la portadora, a T_d también se le conoce como *retraso de fase*. La ecuación (4-30) demuestra que el filtro pasabanda causa retrasos en la envolvente compleja de entrada (es decir, la información de entrada) de T_g, mientras que la portadora se retrasa por T_d. Esta es una transmisión sin distorsión, la cual se obtiene cuando se satisfacen las ecuaciones (4-27a) y (4-27b). Note que T_g será diferente a T_d, a menos que θ_0 sea cero.

En resumen, los requisitos generales para una transmisión sin distorsión de señales de banda base o señales pasabanda se obtienen de las ecuaciones (2-150a) y (2-150b). Sin embargo, para el caso de pasabanda, la ecuación (2-150b) es demasiado restrictiva y puede reemplazarse con la ecuación (4-27b). En este caso, $T_d \neq T_g$ a menos que $\theta_0 = 0$, donde T_d es el *retraso de fase o de portadora* y T_g el *retraso de grupo o envolvente*. Para una transmisión *pasabanda* sin distorsión sólo es necesario contar con una función de transferencia con una *amplitud constante* y una *derivada constante de fase* sobre el ancho de banda de la señal.

4–6 TEOREMA DE MUESTREO PASABANDA

El muestreo se utiliza en software radio y para la simulación de sistemas de comunicaciones. Si el muestreo se lleva a cabo a la velocidad de Nyquist o mayor ($f_s \geq 2B$, donde B es la frecuencia más alta involucrada en el espectro de la señal RF), entonces la velocidad de muestreo puede resultar ridícula. Por ejemplo, considere un sistema de comunicaciones vía satélite con una frecuencia de portadora de $f_c = 6$ GHz. La velocidad de muestreo puede ser de por lo menos 12 GHz. Afortunadamente, puede mostrarse que la velocidad de muestreo para señales de este tipo (pasabanda) depende solamente de su *ancho de banda* y no de las frecuencias absolutas involucradas. Esto es equivalente a decir que se puede reproducir la señal a partir de muestras de la envolvente compleja.

TEOREMA. TEOREMA DE MUESTREO PASABANDA: *si una forma de onda pasabanda (real) posee un espectro diferente de cero sobre el intervalo de frecuencia $f_1 < |f| < f_2$, donde el ancho de banda de transmisión B_T se considera como el ancho de banda absoluto $B_T = f_2 - f_1$, entonces la forma de onda puede reproducirse a partir de muestras si la velocidad de muestreo es de*

$$f_s \geq 2B_T \tag{4–31}$$

Por ejemplo, la ecuación (4-31) indica que si la señal pasabanda de 6 GHz discutida anteriormente tiene un ancho de banda de 10 MHz, se requerirá de una frecuencia de muestreo de sólo 20 MHz en lugar de 12 GHz. Esto resulta en un ahorro de un orden de magnitud de tres.

El teorema de muestreo pasabanda de la ecuación (4-31) puede demostrarse mediante el teorema de muestreo de Nyquist de las ecuaciones (2-158) y (2-160) en la representación pasabanda en cuadratura, la cual es

$$v(t) = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\,\text{sen}\,\omega_c t \tag{4–32}$$

Sea f_c el centro del rango pasabanda tal que $f_c = (f_2 + f_1)/2$. Entonces, de la ecuación (4-8) se sabe que tanto $x(t)$ como $y(t)$ son señales en banda base y están absolutamente limitadas en banda a

$B = B_T/2$. De la ecuación (2-160) se observa que la velocidad de muestreo requerida para la representación de la señal de banda base es de $f_b \geq 2B = B_T$. La ecuación (4-32) se convierte en

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left[x\left(\frac{n}{f_b}\right) \cos \omega_c t - y\left(\frac{n}{f_b}\right) \text{sen } \omega_c t \right] \left[\frac{\text{sen}\{\pi f_b[t - (n/f_b)]\}}{\pi f_b[t - (n/f_b)]} \right] \tag{4–33}$$

Para el caso general donde las muestras $x(n/f_b)$ y $y(n/f_b)$ son independientes, se obtienen dos muestras reales para cada valor de n, de tal manera que la velocidad de muestreo general para $v(t)$ es de $f_s = 2f_b \geq 2B_T$, que es el requisito de frecuencia de muestreo pasabanda de la ecuación (4-31). Las muestras x y y pueden obtenerse al muestrear $v(t)$ a $t \approx (n/f_b)$ pero ajustando t ligeramente, tal que cos $\omega_c t = 1$ y sen $\omega_c t = -1$ al tiempo de muestreo *exacto* para x y y, respectivamente. Es decir, para $t \approx n/f_s$, $v(n/f_b) = x(n/f_b)$ cuando cos $\omega_c t = 1$ (en otras palabras, sen $\omega_c t = 0$) y $v(n/f_b) = y(n/f_b)$ cuando sen $\omega_c t = -1$ (o cos $\omega_c t = 0$). Por otra parte, $x(t)$ y $y(t)$ pueden obtenerse primero con dos detectores de producto en cuadratura, como lo describe la ecuación (4-76). Después de esto, las señales en banda base $x(t)$ y $y(t)$ pueden muestrearse individualmente a una velocidad de f_b, y la velocidad de muestreo equivalente general sigue siendo $f_s = 2f_b \geq 2B_T$.

Al aplicar este teorema se asume que la señal pasabanda $v(t)$ es reconstruida utilizando la ecuación (4-33). Esto implica que se emplean muestras sincronizadas de $v(t)$ con un espacio *no uniforme* entre ellas, ya que las muestras se toman en pares (para los componentes x y y) en lugar de estar uniformemente separadas por T_s. Pueden usarse muestras *uniformemente* separadas de la misma $v(t)$ con una mínima frecuencia de muestreo de $2B_T$, *siempre y cuando* cualquiera de las frecuencias f_1 o f_2 sea una armónica de f_s, [Hsu, 1999□Γaub y Schilling, 1986]. De otra forma se requerirá de una mínima frecuencia de muestreo mayor a $2B_T$ pero de no más de $4B_T$ [Hsu, 1999□Γaub y Schilling, 1986]. Este fenómeno ocurre con el muestreo por impulsos [ecuación (2-173)] debido a que se requiere seleccionar a f_s de tal manera que no exista solape espectral en la banda de $f_1 < f < f_2$ cuando el espectro pasabanda se convierte a las armónicas de f_s.

TEOREMA. TEOREMA DE DIMENSIONALIDAD PASABANDA: *Suponga que una forma de onda pasabanda tiene un espectro diferente de cero sólo sobre el intervalo de frecuencias $f_1 < |f| < f_2$, donde el ancho de banda de transmisión B_T se considera como el ancho de banda absoluto dado por $B_T = f_2 - f_1$ y $B_T \ll f_1$. La forma de onda puede especificarse completamente sobre un intervalo de T_0 segundos mediante*

$$N = 2B_T T_0 \tag{4–34}$$

piezas independientes de información. Se dice que N es el número de dimensiones requeridas para especificar la forma de onda.

La simulación por computadora se utiliza a menudo para el análisis de sistemas de comunicaciones. El teorema de dimensionalidad pasabanda establece que la señal pasabanda de B_T Hz de ancho puede representarse sobre un intervalo de T_0 s, siempre y cuando se utilicen al menos $N = 2B_T T_0$ muestras. Para ahondar en el teorema de muestreo pasabanda consulte el problema de estudio SA4-5.

4–7 SEÑAL RECIBIDA CON RUIDO AÑADIDO

Con la representación de señales pasabanda y los efectos del filtrado del canal se puede obtener un modelo para la señal recibida con ruido añadido. Considerando la figura 4-1 se observa que la señal a la salida del transmisor es

$$s(t) = \text{Re}[g(t)e^{j\omega_c t}]$$

donde $g(t)$ es la envolvente compleja para el tipo en particular de modulación utilizada (consulte la tabla 4-1). Si el canal es lineal e invariante con el tiempo, la señal recibida con ruido añadido es

$$r(t) = s(t) * h(t) + n(t) \tag{4–35}$$

donde $h(t)$ es la respuesta de impulso del canal y $n(t)$ el ruido a la entrada del receptor. Aún más, si el canal no tiene distorsión, la ecuación (4-29) representa su función de transferencia y, en consecuencia, la señal con ruido añadido a la entrada del receptor es

$$r(t) = \text{Re}[Ag(t - T_g)e^{j(\omega_c t + \theta(f_c))} + n(t)] \tag{4–36}$$

donde A es la ganancia del canal (un número positivo generalmente menor que 1), T_g el retraso de grupo del canal y $\theta(f_c)$ el desplazamiento de fase de portadora causada por el canal. En la práctica, los valores para T_g y $\theta(f_c)$ con frecuencia son desconocidos, de tal manera que si el receptor requiere de valores para T_g y $\theta(f_c)$ para detectar la información que se transmitió, los circuitos del receptor realizan una estimación de la fase de portadora recibida $\theta(f_c)$, así como del retraso de grupo (por ejemplo, un sincronizador de bit en el caso de señalización digital). Se asume que los circuitos del receptor se diseñan para hacer que los errores debido a estos efectos sean despreciables; por lo tanto, se puede considerar que la señal con ruido añadido a la entrada del receptor es

$$r(t) = \text{Re}[g(t)e^{j\omega_c t}] + n(t) \tag{4–37}$$

donde los efectos de filtrado del canal, si los hay, se incluyen mediante alguna modificación de la envolvente compleja $g(t)$, y la constante A_c que está implícita en $g(t)$ (consulte la tabla 4-1) se ajusta para reflejar el efecto que tiene la atenuación del canal. La sección 8-6 presenta detalles acerca de este enfoque.

4–8 CLASIFICACIÓN DE FILTROS Y AMPLIFICADORES

Filtros

Los filtros son dispositivos que toman una forma de onda de entrada y modifican el espectro de frecuencia para producir la forma de onda de salida. Pueden clasificarse de varias maneras, y una de ellas es por el tipo de material empleado, como elementos *LC* o de cristal de cuarzo. Otra clasificación es por el tipo de función de transferencia que se lleva a cabo, como las respuestas de Butterworth o Chebyshev, definidas más adelante. Estas dos clasificaciones se discuten en esta sección.

Los filtros utilizan elementos de almacenamiento de energía para obtener una discriminación de frecuencia. En cualquier filtro físico, los elementos de almacenamiento de energía son imperfectos. Por ejemplo, una bobina o inductor físico posee cierta resistencia en serie e inductancia, mientras un condensador o capacitor tiene alguna resistencia a fugas y capacitancia. Naturalmente uno puede cuestionarse cuál es la calidad Q de un elemento de circuito o filtro. Desafortunadamente, en la literatura técnica se emplean dos diferentes medidas de calidad del filtro. La primera definición se enfoca en la eficiencia de *almacenamiento de energía* en un circuito [Ramo, Whinnery y vanDuzer, 1967, 1984], la cual es

$$Q = \frac{2\pi(\text{máxima energía almacenada durante un ciclo})}{\text{energía disipada por ciclo}} \tag{4–38}$$

Un valor mayor para Q corresponde a un elemento de almacenamiento más perfecto. Esto es, un elemento perfecto L o C tendrá una Q infinita. La segunda definición se enfoca a la *selectividad de frecuencia* de un circuito y es

$$Q = \frac{f_0}{B} \tag{4–39}$$

donde f_0 es la frecuencia de resonancia y B el ancho de banda a 3 dB. En este caso, conforme más grande sea la Q, lo mejor es la selectividad de frecuencia ya que, para una f_0 dada, el ancho de banda será más pequeño.

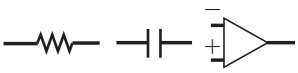
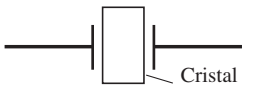
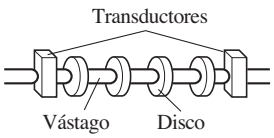
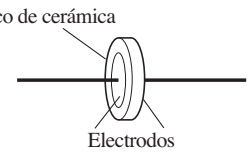
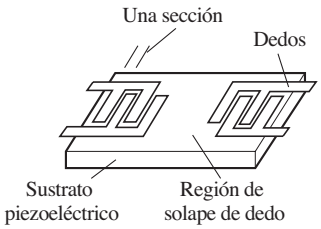
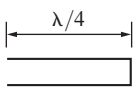
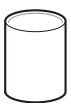
En general, el valor de Q, como se evalúa en la ecuación (4-38), es diferente al valor de Q obtenido en la ecuación (4-39). Sin embargo, estas dos definiciones generan valores idénticos para un circuito resonante en serie *RLC* controlado por una fuente de voltaje o por un circuito resonante en paralelo *RLC* controlado por una fuente de corriente [Nilsson, 1990]. Para aplicaciones de filtrado pasabanda, la selectividad de frecuencia es la característica deseada, así que en estos casos se utiliza la ecuación (4-39), que además es fácil de evaluar a partir de mediciones en laboratorio. Si se diseña un filtro pasivo (no necesariamente un circuito sintonizado a una sola frecuencia) con frecuencia central f_0 y ancho de banda B a 3 dB, todos los elementos individuales del circuito necesitarán de una Q mayor a f_0/B. Por lo tanto, para un diseño práctico de un filtro, primero se debe responder la pregunta: ¿cuáles son los valores para Q requeridos para los elementos del filtro y qué tipos de elementos suministran estos valores de Q? La respuesta a esta pregunta está en la tabla 4-2, la cual presenta una lista de filtros clasificados por el tipo de elementos de almacenamiento de energía utilizado en su construcción y valores típicos para la Q de los elementos. Los filtros que emplean elementos L y C concentrados[3] se vuelven imprácticos en su construcción arriba de 300 MHz porque la capacitancia e inductancia parásita de las terminales afectan significativamente la respuesta de frecuencia para el caso de altas frecuencias. Los filtros activos, los cuales utilizan amplificadores operacionales (opam) con elementos de circuito *RC*, son prácticos sólo por debajo de 500 kHz debido a que los opam requieren de un valor grande en la ganancia de lazo abierto sobre la banda operacional. Para filtros de muy baja frecuencia generalmente se prefieren los *RC* activos en lugar de los *LC* pasivos porque el tamaño de los componentes *LC* crece y la Q de las inductancias disminuye en este rango de frecuencias. Los filtros activos son difíciles de implementar en circuitos integrados debido a que las resistencias y los condensadores acaparan una porción significativa del área del chip. Esta dificultad se puede reducir empleando un diseño de condensador conmutado para su implementación en IC. En este caso, las resistencias se reemplazan con un arreglo de conmutadores electrónicos y condensadores controlados mediante una señal digital de reloj [Schaumann, *et al*., 1990].

Los filtros de cristal se fabrican a partir de elementos de cristal de cuarzo, los cuales actúan como circuito resonante en serie con una capacidad en paralelo causada por el soporte (montadura). Por lo tanto, es posible obtener un modo de operación resonante en paralelo y otro en serie. El elemento de cuarzo se vuelve demasiado pequeño para su fabricación arriba de 100 MHz, y por debajo de 1 kHz el tamaño del elemento se vuelve extremadamente grande. Los filtros de cristal suministran un excelente rendimiento debido a la Q inherentemente alta de los elementos, pero a su vez son más caros que los *LC* y de cerámica.

Los filtros mecánicos utilizan las vibraciones de un sistema mecánico resonante para obtener la acción de filtrado. Dicho sistema generalmente consiste en una serie de discos separados a lo lar-

[3] Un elemento concentrado es un elemento discreto del tipo R, L o C, comparado con un elemento *RLC* continuamente distribuido, como aquellos encontrados en una línea de transmisión.

TABLA 4–2 TÉCNICAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE FILTROS

Tipo de construcción	Descripción de elementos o filtro	Rango de frecuencia central	*Q* sin carga (típica)	Aplicación de filtro[a]
LC (pasivo)		dc–300 MHz	100	Audio, video IF y RF
Condensador activo y conmutado		dc–500 kHz	200[b]	Audio
Cristal		1 kHz–100 MHz	100,000	IF
Mecánica		50–500 kHz	1,000	IF
Cerámica		10 kHz–10.7 MHz	1,000	IF
Ondas acústicas de superficie (SAW)		10–800 MHz	[c]	IF y RF
Línea de transmisión		UHF y microondas	1,000	RF
Cavidad		Microondas	10,000	RF

[a] IF, frecuencia intermedia□RF, radiofrecuencia (consulte la sección 4-16).

[b] Valores para *Q* de pasabanda.

[c] Depende del diseño: $N = f_0/B$, donde N es el número de secciones, f_0 la frecuencia central y B el ancho de banda. Los valores de Q con carga han sido de 18,000.

go de un vástago. Se montan transductores a cada lado del vástago para convertir las señales eléctricas a vibraciones mecánicas a la entrada y viceversa a la salida. Cada disco es el equivalente mecánico de un circuito eléctrico resonante en paralelo con un alto valor de Q. El filtro mecánico a menudo posee una alta pérdida de inserción por la ineficiencia de los transductores de entrada y salida.

Los filtros de cerámica se construyen a partir de discos piezoeléctricos de cerámica con conexiones a electrodos con recubierta de metal en lados opuestos del disco. El comportamiento del elemento de cerámica es parecido al del elemento de filtro de cristal, como se discutió previamente, a excepción de que la Q del elemento de cerámica es mucho más baja. La ventaja del filtro de cerámica es que a menudo proporciona un rendimiento adecuado a un costo bajo en comparación con el de filtros de cristal.

Los filtros de onda acústica de superficie (SAW, por sus siglas en inglés) utilizan ondas acústicas que se lanzan y viajan a través de la superficie de un sustrato piezoeléctrico (plancha). En el sustrato se depositan "dedos" metálicos entrelazados. La señal de voltaje en los dedos se convierte en una señal acústica (y viceversa) como resultado del efecto piezoeléctrico. La geometría de los dedos determina la respuesta de frecuencia del filtro y proporciona el acoplamiento de la entrada y salida [Dorf, 1993, pp. 1073 y 1074]. La pérdida de inserción es un poco mayor que en los filtros de cristal o de cerámica. Sin embargo, la facilidad con la que se puede moldear la función de transferencia y el tamaño del ancho de banda que puede obtenerse con características de atenuación controladas hacen que los filtros SAW sean bastante atractivos. Esta tecnología se emplea para proporcionar excelentes características de amplificación de IF en los televisores modernos.

También se pueden hacer tomas en los dispositivos SAW de tal manera que sean de utilidad para las configuraciones de filtros transversales (figura 3-28) operando en el rango de RF. Se pueden utilizar dispositivos de transferencia de carga (CTD) para implementar filtros transversales a bajas frecuencias [Gersho, 1975].

Los filtros en líneas de transmisión utilizan las propiedades de resonancia de éstas a circuito abierto o a corto circuito. Estos filtros son útiles a frecuencias de UHF y de microondas, en las cuales las longitudes de onda son lo suficientemente pequeñas para que se puedan construir filtros de un tamaño razonable. De manera similar, el efecto de resonancia de cavidades es útil en la construcción de filtros para frecuencias de microondas en las cuales el tamaño de la cavidad se hace demasiado pequeño para ser práctico.

Los filtros también se caracterizan por el tipo de función de transferencia que llevan a cabo. La función de transferencia de un filtro lineal con elementos de circuitos concentrados puede escribirse como la razón de dos polinomios,

$$H(f) = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \cdots + b_k(j\omega)^k}{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \cdots + a_n(j\omega)^n} \tag{4–40}$$

donde las constantes a_i y b_i son funciones de los valores de los elementos y $\omega = 2\pi f$. Se dice que el parámetro n es el *orden* del filtro. Se pueden obtener las características deseables de una función de transferencia al ajustar las constantes a ciertos valores. La tabla 4-3 presenta una lista de tres características de filtro diferentes y el criterio de optimización que define a cada una. El filtro de Chebyshev se emplea cuando se requiere de una característica aguda de atenuación para un número mínimo de elementos de circuito. El filtro de Bessel se usa a menudo en la transmisión de datos cuando la forma de pulso debe preservarse, ya que intenta mantener una respuesta de fase lineal en la banda de paso. El filtro de Butterworth se utiliza a menudo como un compromiso entre las características de Chebyshev y de Bessel.

El tema de los filtros es inmenso y aquí no se pueden cubrir todos sus aspectos. Por ejemplo, con el auge de los microprocesadores económicos, el filtrado *digital* y el *procesamiento digital de señales* se han vuelto muy importantes [Oppenheim y Schafer, 1975, 1989].

TABLA 4–3 ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DE FILTROS

Tipo	Criterio de optimización	Transferencia característica para un filtro pasabajas[a]
Butterworth	Máximamente plana: cuantas derivadas de $\|H(f)\|$ como sean posibles se vuelven cero conforme $f \to 0$	$\|H(f)\| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (f/f_b)^{2n}}}$
Chebyshev	Para una ondulación pico a pico en la banda de paso de la característica $\|H(f)\|$ dada, la $\|H(f)\|$ se atenúa lo más rápido posible para cualquier filtro de n-ésimo orden	$\|H(f)\| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(f/f_b)}}$ ε = una constante de diseño $C_n(f)$ es el polinomio de Chebyshev de n-ésimo orden definido por la relación recursiva $C_n(x) = 2xC_{n-1}(x) - C_{n-2}(x)$, donde $C_0(x) = 1$ y $C_1(x) = x$
Bessel	Intenta mantener una fase lineal en la banda de paso	$H(f) = \dfrac{K_n}{B_n(f/f_b)}$ K_n es una constante seleccionada para hacer que $H(0) = 1$ y la relación recursiva de Bessel es $B_n(x) = (2n-1)\,B_{n-1}(x) - x^2 B_{n-2}(x)$, donde $B_0(x) = 1$ y $B_1(x) = 1 + jx$

[a] f_b es la frecuencia de corte del filtro.

Si desea profundizar en el estudio de los filtros analógicos con énfasis en las aplicaciones en sistemas de comunicaciones, consulte Bowron y Stephenson [1979].

Amplificadores

Para fines de análisis, los circuitos electrónicos y, específicamente, los amplificadores, pueden clasificarse en dos categorías principales: no lineales y lineales. En la sección 2-6 se definió la linealidad. En la práctica, todos los circuitos son no lineales hasta cierto grado, incluso a niveles bajos de señal (voltaje y corriente) y se convierten altamente no lineales para niveles altos de señal. El análisis de circuitos lineales se emplea a menudo para los niveles bajos de señal, ya que simplifica en gran escala las matemáticas requeridas y suministra respuestas exactas si el nivel de la señal es lo suficientemente pequeño.

Las principales categorías de amplificadores no lineales y lineales pueden clasificarse aún más en subcategorías de circuitos con memoria y sin memoria. Los primeros contienen efectos inductivos y de capacitancia que causan que el valor actual a la salida sea una función de valores de entrada anteriores, así como del valor de entrada actual. Si un circuito no tiene memoria, entonces el valor a la salida actual es una función sólo de su valor de entrada actual.

En algunos cursos de introducción a la ingeniería eléctrica se asume primero que los circuitos son lineales y sin memoria (circuitos de resistencia) y, después, lineales con memoria (circuitos *RLC*). De aquí se sigue que los amplificadores lineales con memoria pueden describirse por una función de transferencia que es la razón de la transformada de Fourier de la señal de salida sobre la transformada de Fourier de la señal de entrada. Como se discutió en la sección 2-6, la función de

transferencia de un amplificador sin distorsión se obtiene mediante $Ke^{-j\omega_c T_d}$, donde K es la ganancia de voltaje del amplificador y T_d el retraso entre las formas de onda de salida y de entrada. Si la función de transferencia del amplificador lineal no es de esta forma, la señal de salida será una versión *linealmente* distorsionada de la de entrada.

4–9 DISTORSIÓN NO LINEAL

En la práctica, los amplificadores producen distorsión no lineal además de una distorsión lineal. Se asume que *no hay memoria* en el siguiente análisis para examinar los efectos de la no linealidad y aun así mantener un modelo matemático manejable. Por lo tanto, se considerará que la salida actual es una función de la entrada actual en el dominio del tiempo. Si el amplificador es lineal, entonces esta relación es

$$v_0(t) = Kv_i(t) \tag{4–41}$$

donde K es la ganancia de voltaje del amplificador. En la práctica, la salida del amplificador se satura a algún valor conforme la amplitud de la señal de entrada se incrementa. La característica no lineal de salida a entrada mostrada en la figura 4-5 ilustra este efecto. Una expansión de Taylor alrededor de $v_i = 0$ (es decir, una serie de Maclaurin) puede modelar esta característica de salida a entrada. Esto es,

$$v_0 = K_0 + K_1 v_i + K_2 v_i^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} K_n v_i^n \tag{4–42}$$

donde

$$K_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n v_0}{dv_i^n} \right) \Bigg|_{v_i = 0} \tag{4–43}$$

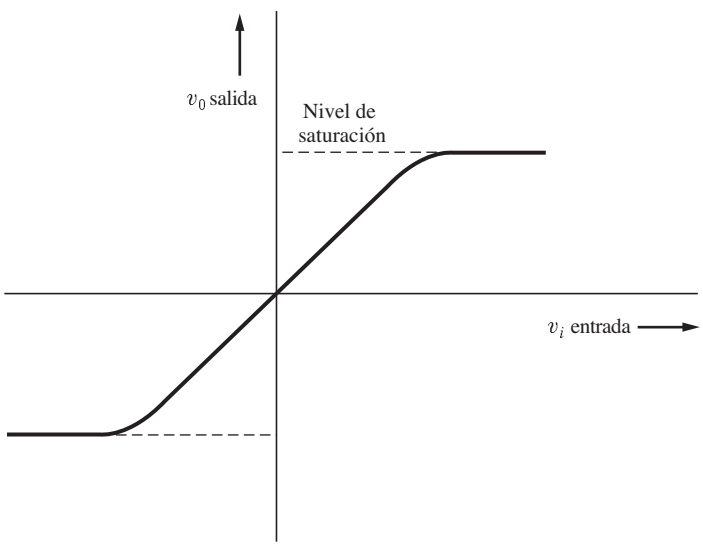


Figura 4–5 Característica de salida a entrada de un amplificador no lineal.

Existirá una distorsión no lineal en la señal de salida si K_2, K_3, . . ., no son cero. K_0 es el nivel de desplazamiento de DC a la salida, $K_1 v_i$ es el término (lineal) de primer orden, $K_2 v_i^2$ es el término (ley cuadrada) de segundo orden, y así sucesivamente. Por supuesto que K_1 será mayor que K_2, K_3, . . . si el amplificador está cerca de considerarse lineal.

La *distorsión armónica* asociada con la salida del amplificador se determina aplicando un solo tono de prueba senoidal a la entrada del amplificador. Si el tono de prueba a la entrada se representa mediante

$$v_i(t) = A_0 \text{ sen } \omega_0 t \tag{4–44}$$

Entonces el término de segundo orden de la salida es

$$K_2(A_0 \text{ sen } \omega_0 t)^2 = \frac{K_2 A_0^2}{2} (1 - \cos 2\omega_0 t) \tag{4–45}$$

Esto indica que la distorsión de segundo orden genera un nivel de DC $K_2 A_0^2/2$, además de cualquier polarización de DC, y una segunda distorsión armónica con amplitud de $K_2 A_0^2/2$. En general, para cualquier entrada de un solo tono, la salida será

$$\begin{aligned} v_{\text{salida}}(t) = {} & V_0 + V_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + V_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) \\ & + V_3 \cos(3\omega_0 t + \varphi_3) + \cdots \end{aligned} \tag{4–46}$$

donde V_n es el valor pico de la salida a la frecuencia nf_0 hertz. Entonces, el porcentaje de *distorsión armónica total* (THD, por sus siglas en inglés) se define como

$$\text{THD } (\square) = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} V_n^2}}{V_1} \times 100 \tag{4–47}$$

La THD de un amplificador puede medirse con un analizador de distorsión o mediante la ecuación (4-47), y un analizador de espectros suministra los valores de V_n.

La *distorsión de intermodulación* (IMD, por sus siglas en inglés) del amplificador se obtiene al emplear una prueba de dos tonos. Si las señales (tonos) de entrada son

$$v_i(t) = A_1 \text{ sen } \omega_1 t + A_2 \text{ sen } \omega_2 t \tag{4–48}$$

entonces el término de segundo orden es

$$K_2(A_1 \text{ sen } \omega_1 t + A_2 \text{ sen } \omega_2 t)^2 = K_2(A_1^2 \text{ sen}^2 \omega_1 t + 2A_1 A_2 \text{ sen } \omega_1 t \text{ sen } \omega_2 t + A_2^2 \text{ sen}^2 \omega_2 t)$$

El primer y último términos al lado derecho de esta ecuación producen una distorsión armónica a frecuencias de $2f_1$ y $2f_2$. El término de producto cruzado genera IMD. Este término se presenta sólo cuando lo hacen *ambos* términos de entrada, de aquí el nombre de "distorsión de intermodulación". Entonces la IMD de segundo orden es

$$2K_2 A_1 A_2 \text{ sen } \omega_1 t \text{ sen } \omega_2 t = K_2 A_1 A_2 \{\cos[(\omega_1 - \omega_2)t] - \cos[(\omega_1 + \omega_2)t]\}$$

Resulta claro que la IMD genera frecuencias de suma y de diferencia.

El término de tercer orden es

$$\begin{aligned} K_3 v_i^3 &= K_3(A_1 \text{ sen } \omega_1 t + A_2 \text{ sen } \omega_2 t)^3 \\ &= K_3(A_1^3 \text{ sen}^3 \omega_1 t + 3A_1^2 A_2 \text{ sen}^2 \omega_1 t \text{ sen } \omega_2 t \\ &\quad + 3A_1 A_2^2 \text{ sen } \omega_1 t \text{ sen}^2 \omega_2 t + A_2^3 \text{ sen}^3 \omega_2 t) \end{aligned} \tag{4–49}$$

El primer y último términos del lado derecho de esta ecuación producirán una distorsión armónica, y el segundo término, que es un producto cruzado, se convierte en

$$\begin{aligned} 3K_3A_1^2A_2 \operatorname{sen}^2 \omega_1 t \operatorname{sen} \omega_2 t &= \tfrac{3}{2} K_3 A_1^2 A_2 \operatorname{sen} \omega_2 t(1 - \cos 2\omega_1 t) \\ &= \tfrac{3}{2} K_3 A_1^2 A_2 \{\operatorname{sen} \omega_2 t - \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(2\omega_1 + \omega_2) t \\ &\quad - \operatorname{sen}(2\omega_1 - \omega_2)t]\} \end{aligned} \tag{4–50}$$

De la misma manera, el tercer término de la ecuación (4-49) es

$$\begin{aligned} &3K_3A_1A_2^2 \operatorname{sen} \omega_1 t \operatorname{sen}^2 \omega_2 t \\ &\quad = \tfrac{3}{2} K_3 A_1 A_2^2 \{\operatorname{sen} \omega_1 t - \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(2\omega_2 + \omega_1)t - \operatorname{sen}(2\omega_2 - \omega_1)t]\} \end{aligned} \tag{4–51}$$

Los últimos dos términos en las ecuaciones (4-50) y (4-51) son de intermodulación a frecuencias no armónicas. Para el caso de amplificadores *pasabanda* donde f_1 y f_2 están en la banda de paso con f_1 cerca de f_2 (es decir, $f_1 \approx f_2 \gg 0$), los productos de distorsión en $2f_1 + f_2$ y $2f_2 + f_1$ generalmente caerán fuera de la banda de paso y, en consecuencia, pueden no ser un problema. Sin embargo, los términos a $2f_1 + f_2$ y $2f_2 + f_1$ caerán en la banda de paso y estarán cerca de las frecuencias deseadas f_1 y f_2. Estos serán los productos de distorsión principales para los amplificadores pasabanda, como los utilizados para la amplificación de RF en transmisores y receptores.

Como se muestra en las ecuaciones (4-50) y (4-51), si A_1 o A_2 se incrementan suficientemente, la IMD se volverá significativa, ya que la salida deseada varía linealmente con A_1 o A_2 y la salida de IMD varía como $A_1^2A_2$ o $A_1A_2^2$. Por supuesto que el nivel exacto de entrada requerido para que los productos de intermodulación se conviertan en problemas depende de los valores relativos de K_3 y K_1. El nivel puede especificarse mediante el *punto de intercepción* de tercer orden del amplificador, el cual se evalúa aplicando dos tonos de prueba de igual amplitud (es decir, $A_1 = A_2 = A$). Las salidas lineales amplificadas deseadas tendrán amplitudes de K_1A y cada uno de los productos de intermodulación de tercer orden tendrá amplitudes de $3K_3A^3/4$. La razón de la salida deseada sobre la salida de IMD es entonces

$$R_{\text{IMD}} = \frac{4}{3}\left(\frac{K_1}{K_3A^2}\right) \tag{4–52}$$

La figura 4-6 muestra el punto de intercepción de la entrada, definido como el nivel de entrada que causa que R_{IMD} sea igual a la unidad. Las curvas en sólido se obtienen a través de mediciones, utilizando dos generadores de señales senoidales para producir los tonos y el nivel de medición de la salida deseada (a f_1 y f_2) y un analizador espectral que genera los productos de IMD (a $2f_1 - f_2$ o $2f_2 - f_1$). El punto de intercepción es ficticio y se obtiene al extrapolar la porción lineal (gráfico en decibeles) de la salida deseada y las curvas de IMD hasta que se llega a la intersección de ambas. La salida deseada, es decir, a f_1 o f_2, en realidad se satura cuando se realizan las mediciones, ya que los términos de más alto orden en la serie de Taylor tienen componentes a f_1 y f_2 que substraen de la salida linealmente amplificada. Por ejemplo, si K_3 es negativo, el término más significativo en la ecuación (4-51) ocurre a f_1 y sustraerá del componente linealmente amplificado a f_1 y por ende producirá una característica saturada para el componente senoidal a f_1. Para un amplificador que posee una característica lineal en particular mostrado en la figura 4-6, el punto de intercepción ocurre para un nivel de entrada de RF de −10 dBm. Las características de sobrecarga de los receptores, como los utilizados en los emisores receptores portátiles de la policía, se caracterizan por la especificación del punto de intercepción de tercer orden. Este valor dBm es el nivel de la señal RF a la entrada de la

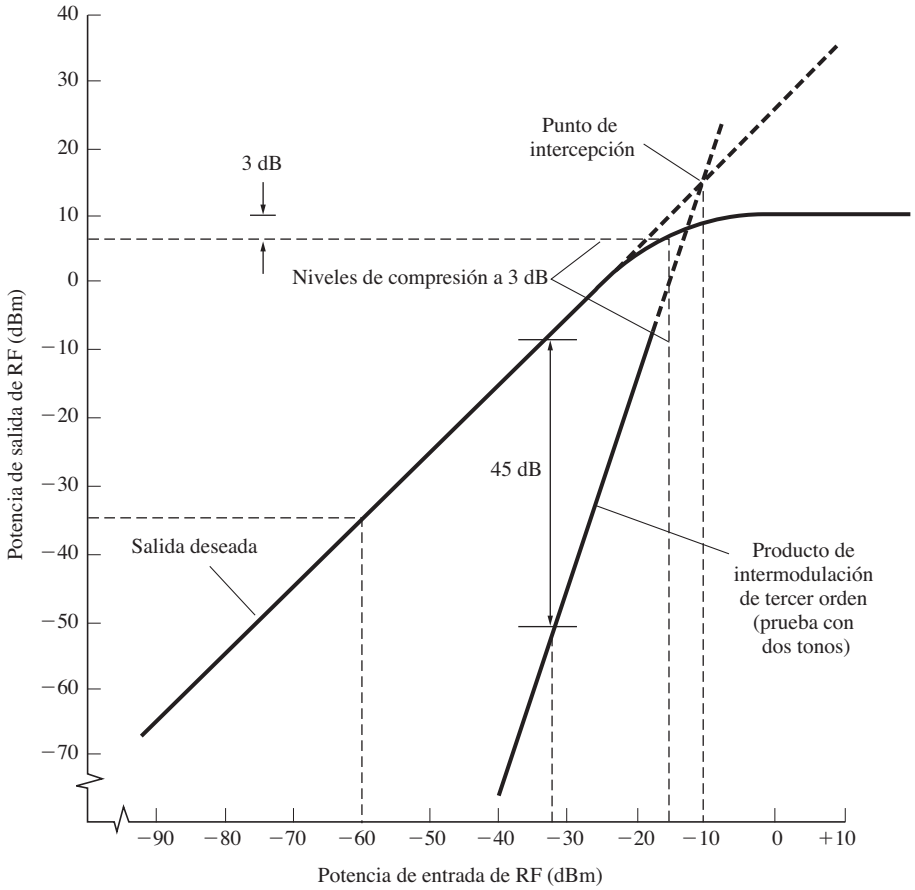


Figura 4–6 Características de salida de un amplificador.

antena que corresponde al punto de intercepción. Cuando el receptor se activa, los niveles de las señales de entrada deberán ser mucho menores que dicho valor para mantener las señales interferentes de intermodulación indeseadas que se generan por los circuitos del receptor a un nivel aceptable. Para las aplicaciones de transmisores, la especificación del punto de intercepción es el nivel de la señal de salida correspondiente al punto de intercepción.

La figura 4-6 también ilustra otras propiedades de un amplificador. La ganancia del amplificador es de 25 dB en la región lineal debido a que una entrada de −60 dBm produce un nivel de salida de −35 dBm. La salida deseada se comprime por 3 dB para un nivel de entrada de −15 dBm. En consecuencia, el amplificador puede considerarse lineal sólo si el nivel de entrada es menor a −15 dBm. Aún más, si los productos de IMD de tercer orden deberán disminuir por lo menos 45 dBm, el nivel de entrada deberá mantenerse menor a −32 dBm.

La *modulación cruzada* es otro término en los productos de distorsión a la salida de un amplificador lineal. Los términos de modulación cruzada se obtienen cuando se examinan los productos de tercer orden resultantes de una prueba con dos tonos. Como se muestra en las ecuaciones (4-50) y (4-51), los términos $\frac{3}{2}K_3A_1^2A_2$ sen $\omega_2 t$ y $\frac{3}{2}K_3\ A_1A_2^2$ sen $\omega_1\ t$ son términos de modulación cruzada. Examine el término $\frac{3}{2}K_3A_1^2A_2$ sen $\omega_2 t$. Si se permite alguna variación en la amplitud de la señal de entrada A_1 sen $\omega_1 t$ de tal manera que se parezca a la señal de AM $A_1[1 + m_1(t)]$

sen $\omega_1 t$, donde $m_1(t)$ es la señal moduladora, entonces el producto de distorsión de tercer orden se convierte en

$$\tfrac{3}{2}K_3 A_1^2 A_2[1 + m_1(t)]^2 \text{ sen } \omega_2 t \tag{4–53}$$

Por lo tanto, la AM en la señal a la frecuencia de portadora f_1 producirá una señal a la frecuencia f_2 con modulación distorsionada. Es decir, si dos señales se pasan a través de un amplificador con productos de distorsión de tercer orden a la salida y si cualquier señal de entrada cuenta con cierta AM, la salida amplificada de la *otra* señal tendrá modulación de amplitud hasta cierto punto debido a la versión distorsionada de la modulación. A este fenómeno se le conoce como modulación cruzada.

Los circuitos pasivos, al igual que los activos, pueden poseer características no lineales y, por tanto, generarán productos de distorsión. Por ejemplo, suponga que dos estaciones radiodifusoras de AM poseen señales fuertes en los alrededores de un granero o una casa que tiene un techo metálico con uniones oxidadas. El techo puede actuar como una antena para recibir y radiar energía de RF y las uniones oxidadas pueden actuar como diodo (un circuito pasivo no lineal). Las señales a las frecuencias armónicas y de intermodulación pueden radiarse e interferir con otras señales de comunicaciones. Los productos de modulación cruzada pueden radiarse también. Es decir, una modulación distorsionada de una estación se escucha en radios, localizados en los alrededores del techo oxidado, que están sintonizados a la frecuencia de la otra estación.

Cuando se emplean amplificadores para producir señales de alta potencia, como en los transmisores, es deseable contar con amplificadores de alta eficiencia para reducir los costos de las fuentes de poder, equipo de refrigeración y energía consumida. La eficiencia es la razón de la potencia de señal de salida sobre la potencia de entrada de DC. Los amplificadores pueden agruparse en varias categorías dependiendo de los niveles de polarización y las configuraciones de circuitos utilizados. Algunas de estas categorías son las clases A, B, C, D, E, F, G, H y S [Krauss, Bostian y Raab, 1980□Smith, 1998]. Para una operación de clase A, la polarización en la etapa de amplificación se ajusta de tal manera que la corriente fluye durante el ciclo completo de un tono de prueba de entrada aplicado. Para una operación de clase B, el amplificador se polariza de tal forma que la corriente fluye para 180° del ciclo de la señal aplicada. Por lo tanto, si se utiliza un amplificador de clase B para un amplificador lineal de banda base, como un amplificador de potencia de audio en un sistema de alta fidelidad, se conectan dos dispositivos en configuración de montaje en contrafase de tal manera que cada uno conduce alternadamente la corriente sobre la mitad del ciclo de la señal de entrada. En la amplificación lineal *pasabanda* de clase B, donde el ancho de banda es un pequeño porcentaje de la frecuencia de operación, sólo se requiere de un dispositivo activo, ya que se pueden emplear circuitos sintonizados para proveer la corriente de salida sobre la otra mitad del ciclo de la señal. Para operaciones clase C, la polarización se establece de tal forma que la corriente (de colector) fluye en pulsos, cada uno con un ancho de pulso generalmente menor que la mitad del ciclo de entrada. Desafortunadamente, en una operación de clase C no es posible tener una amplificación lineal, aun con un amplificador de RF pasabanda con circuitos sintonizados suministrando la corriente sobre la porción no conductiva del ciclo. Si se intenta amplificar una señal AM con un amplificador de clase C u otros tipos no lineales, la AM a la salida estará distorsionada. Sin embargo, señales RF con una envolvente real constante, como las FM, pueden amplificarse sin distorsión, ya que un amplificador no lineal preserva los cruces por cero de la señal de entrada.

La eficiencia de un amplificador de clase C se determina esencialmente por el ángulo de conducción del dispositivo activo, ya que el gasto de potencia de energía en el mismo dispositivo causa una pobre eficiencia durante el tiempo de conducción. El amplificador de clase C posee un factor de eficiencia de 100□ del caso ideal□os de clase B presentan una eficiencia de $\pi/4 \times 100 = 78.5$□ o

menos, y los de clase A tienen una eficiencia de 50□ o menos [Krauss, Bostian y Raab, 1980]. Debido a que los amplificadores de clase C son los más eficientes, a menudo se usan para señales de envolvente constante, como las FM utilizadas en la radiodifusión. Los amplificadores de clase D, E, F, G, H y S generalmente emplean técnicas de conmutación en circuitos especializados para obtener una alta eficiencia [Krauss, Bostian y Raab, 1980□Smith, 1998].

Muchos tipos de amplificadores en microondas, como los tubos de ondas progresivas (TWT, por sus siglas en inglés), operan sobre el principio de modulación de velocidad. La señal en microondas de entrada se alimenta de una estructura de ondas lentas. En este caso, la velocidad de propagación de la señal en microondas se reduce de tal manera que esté justo debajo de la velocidad del haz de electrones de DC. Esto permite una transferencia de energía cinética del haz de electrones a la señal en microondas, lo cual amplifica la señal. En este tipo de amplificadores, la corriente de los electrones *no* se enciende y apaga para proporcionar el mecanismo de amplificación y, por lo tanto, no se clasifica en términos de una operación de clase B o C. El TWT es un amplificador lineal cuando opera al nivel de control apropiado. Si el nivel de control aumenta, la eficiencia (salida RF/entrada DC) mejora, pero el amplificador se vuelve no lineal. Aquí, señales de envolvente constante, como las de PSK o PM, requieren utilizarse de tal manera que la distorsión de intermodulación no cause problemas. Este es a menudo el modo de operación de los transpondedores satelitales (transmisores en la comunicación vía satélites), donde las células solares son costosas y poseen una salida de potencia limitada. El capítulo 8 discute este tema con mayor detalle en la sección sobre comunicaciones vía satélite.

4–10 LIMITADORES

Un *limitador* es un circuito no lineal con una característica de saturación de salida. La figura 4-5 muestra una característica de un limitador de saturación suave. En la figura 4-7 se ve una característica de limitador firme (ideal) junto a una ilustración de la forma de onda de salida sin filtrado que se obtiene para una forma de onda de entrada. La función de transferencia del limitador ideal es idéntica en esencia a la característica de salida a entrada de un comparador ideal con un nivel de referencia de cero. Las formas de onda de la figura 4-7 ilustran cómo las variaciones en amplitud en la señal de entrada se eliminan en la de salida. Un *limitador pasabanda* es un circuito no lineal con una característica saturante seguido por un filtro pasabanda. En el caso de un limitador pasabanda ideal, la forma de onda de salida del filtro será senoidal, ya que se filtrarán las armónicas de la onda cuadrada. En general, cualquier entrada pasabanda, incluso una señal modulada con ruido añadido, puede representarse utilizando la ecuación (4-1b), a través de

$$v_{\text{entrada}}(t) = R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{4–54}$$

donde $R(t)$ es la envolvente real equivalente y $\theta(t)$ la función de fase equivalente. La salida correspondiente de un limitador pasabanda ideal se convierte en

$$v_{\text{salida}}(t) = KV_L\cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{4–55}$$

donde K es el nivel del componente fundamental de la onda cuadrada, $4/\pi$, multiplicado por la ganancia del filtro (pasabanda) de salida. Esta ecuación indica que cualquier AM presente en la entrada del limitador no aparecerá a la salida del mismo, sino que se mantiene la función de fase (es decir, los cruces por cero en la entrada se mantienen en la salida del limitador). Los sistemas receptores diseñados para una señalización modulada por ángulo, como PSK, FSK y FM analógica, a menudo usan limitadores para eliminar las variaciones en la envolvente real de la señal de entrada del receptor causadas por el ruido en el canal o por el desvanecimiento de la señal.

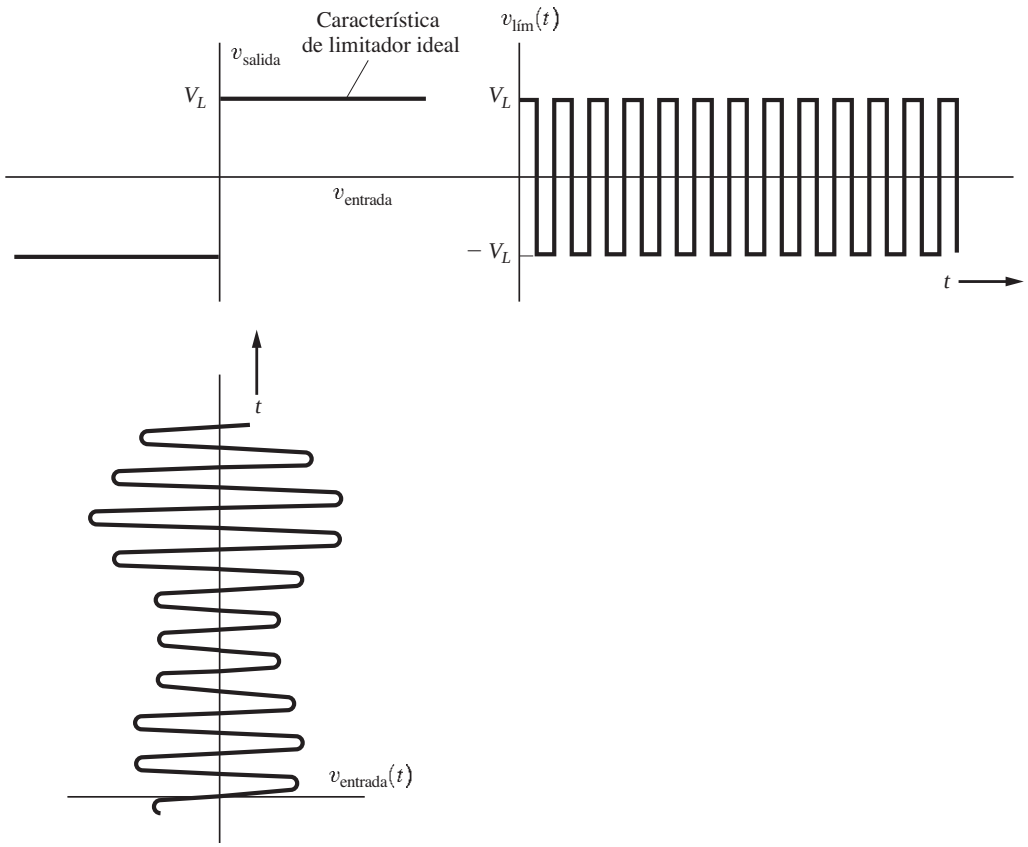


Figura 4–7 Característica de limitador ideal con formas de onda ilustrativas de entrada y de salida sin filtrado.

4–11 MEZCLADORES Y CONVERTIDORES ELEVADORES Y REDUCTORES

Un *mezclador ideal* es un circuito electrónico que funciona como multiplicador matemático de dos señales de entrada. A menudo una de estas señales es una forma de onda senoidal producida por un oscilador local, como se ilustra en la figura 4-8.

Los mezcladores se utilizan para obtener una traslación de frecuencia de la señal de entrada. Suponga que la señal de entrada es pasabanda con un espectro diferente de cero en una banda alrededor o cerca de $f = f_c$. Entonces la señal se representa mediante

$$v_{\text{entrada}}(t) = \text{Re}\{g_{\text{entrada}}(t)\, e^{j\omega_c t}\} \tag{4–56}$$

donde $g_{\text{entrada}}(t)$ es la envolvente compleja de la señal de entrada. La señal a la salida del mezclador ideal es entonces

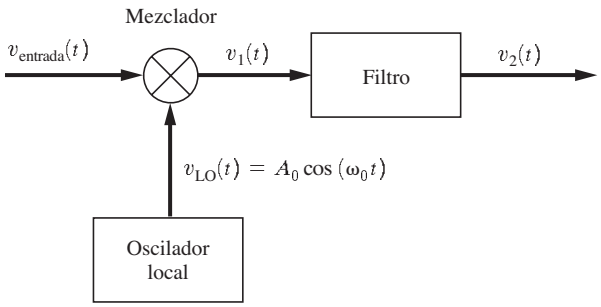


Figura 4–8 Un mezclador seguido por un filtro para una conversión ascedente o descendente.

$$v_1(t) = [A_0 \ \text{Re}\{g_{\text{entrada}}(t)e^{j\omega_c t}\}]\cos \omega_0 t$$

$$= \frac{A_0}{4}[g_{\text{entrada}}(t)e^{j\omega_c t} + g^*_{\text{entrada}}(t)e^{-j\omega_c t}](e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$= \frac{A_0}{4}[g_{\text{entrada}}(t)\, e^{j(\omega_c+\omega_0)t} + g^*_{\text{entrada}}(t)\, e^{-j(\omega_c+\omega_0)t} + g_{\text{entrada}}(t)\, e^{j(\omega_c-\omega_0)t} + g^*_{\text{entrada}}(t)\, e^{-j(\omega_c-\omega_0)t}]$$

o

$$v_1(t) = \frac{A_0}{2}\,\text{Re}\{g_{\text{entrada}}(t)e^{j(\omega_c+\omega_0)t}\} + \frac{A_0}{2}\text{Re}\{g_{\text{entrada}}(t)e^{j(\omega_c-\omega_0)t}\} \tag{4–57}$$

La ecuación (4-57) ilustra que la señal pasabanda de entrada con un espectro cerca de $f = f_c$ se ha convertido (es decir, se ha realizado una traslación de frecuencia) a dos señales pasabanda de salida, una a la banda de frecuencias de conversión ascendente, donde $f_u = f_c + f_0$ y otra a la banda de conversión descendente, donde $f_d = f_c - f_0$. Según la figura 4-8, un filtro puede seleccionar el componente de conversión ascendente o el de conversión descendente. Esta combinación de un mezclador con un filtro para remover uno de los componentes de salida del mezclador se conoce como *mezclador de banda lateral única*. Un filtro *pasabanda* selecciona el componente de conversión ascendente, pero un filtro de *banda base* o un filtro *pasabanda*, dependiendo de la ubicación de $f_c - f_0$, selecciona al componente de conversión descendente. Por ejemplo, si $f_c - f_0 = 0$, entonces se requerirá de un filtro pasabajas y el espectro de salida resultante será un espectro de banda base. Si $f_c - f_0 > 0$, donde $f_c - f_0$ fue mayor al ancho de banda de $g_{\text{entrada}}(t)$, entonces se utilizaría un filtro pasabanda y la salida del filtro sería

$$v_2(t) = \text{Re}\{g_2(t)e^{j(\omega_c-\omega_0)t}\} = \frac{A_0}{2}\,\text{Re}\{g_{\text{entrada}}(t)e^{j(\omega_c-\omega_0)t}\} \tag{4–58}$$

Para el caso donde $f_c > f_0$, se puede observar que la modulación en la señal de entrada del mezclador $v_{\text{entrada}}(t)$ se mantiene en las señales del mezclador de conversión ascendente o reductora.

Si $f_c < f_0$, y reformulando la ecuación (4-57), se obtiene que

$$v_1(t) = \frac{A_0}{2}\,\text{Re}\{g_{\text{entrada}}(t)e^{j(\omega_c+\omega_0)t}\} + \frac{A_0}{2}\,\text{Re}\{g^*_{\text{entrada}}(t)e^{j(\omega_0-\omega_c)t}\} \tag{4–59}$$

debido a que la frecuencia en el exponente de la representación de la señal pasabanda requiere ser positiva para una fácil interpretación física de la ubicación de componentes espectrales. Para este caso donde $f_c < f_0$, la envolvente compleja de la señal reducida por conversión se ha conjugado, en comparación con la envolvente compleja de la señal de entrada, lo que es equivalente a decir que las bandas laterales se han intercambiado—esto es, la banda lateral superior del espectro de la señal de entrada se convierte en la banda lateral inferior de la señal de salida reducida por conversión, y así sucesivamente. Esto se demuestra matemáticamente observando al espectro de $g^*(t)$, el cual es

$$\mathcal{F}[g^*_{\text{entrada}}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g^*_{\text{entrada}}(t)e^{-j\omega t}\,dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_{\text{entrada}}(t)e^{-j(-\omega)t}\,dt\right]^*$$

$$= G^*_{\text{entrada}}(-f) \tag{4–60}$$

El término $-f$ indica que las bandas laterales superior e inferior se han intercambiado y el conjugado indica que se ha invertido el espectro de fase.

En resumen, la envolvente compleja para la señal a la salida de un *convertidor elevador* es

$$g_2(t) = \frac{A_0}{2}\, g_{\text{entrada}}(t) \tag{4–61a}$$

donde $f_u = f_c + f_0 > 0$. Por lo tanto, la misma modulación en la señal de entrada estará en la de salida, pero la amplitud cambia debido al factor de escala $A_0/2$.

Para el caso de un *convertidor descendente* existen dos posibilidades. Para $f_d = f_c - f_0 > 0$, donde $f_0 < f_c$,

$$g_2(t) = \frac{A_0}{2}\, g_{\text{entrada}}(t) \tag{4–61b}$$

Esto se conoce como conversión descendente con *inyección al lado inferior*, ya que la frecuencia del oscilador local (LO, por sus siglas en inglés) está por debajo de la señal de entrada (es decir, $f_0 < f_c$). En este caso la modulación de salida es la misma que la de entrada, a excepción del factor de escala $A_0/2$. La otra posibilidad es $f_d = f_0 - f_c > 0$, donde $f_0 > f_c$, lo cual produce una envolvente compleja de salida

$$g_2 = \frac{A_0}{2}\, g^*_{\text{entrada}}(t) \tag{4–61c}$$

Ésta es una conversión descendente con inyección *al lado superior*, ya que $f_0 > f_c$. Aquí las bandas laterales en la señal de salida reducida por conversión se invierten con respecto a las de la entrada (por ejemplo, una señal de entrada LSSB se convierte en una señal de salida USSB).

Los mezcladores ideales actúan como elementos lineales de circuito variables con el tiempo, ya que

$$v_1(t) = (A\cos\omega_0 t)v_{\text{entrada}}(t)$$

donde $A\cos\omega_0\ t$ es la ganancia variante con el tiempo del circuito lineal. También debe reconocerse que los mezcladores utilizados en los circuitos de comunicaciones son esencialmente multiplicadores matemáticos, y no deben confundirse con los mezcladores de audio usados en los estudios de radiodifusión y de TV. Un *mezclador de audio* es un amplificador sumador con múltiples entradas de tal manera que varias entradas de distintas fuentes, como micrófonos, unidades de cinta y unidades de CD, puedan "mezclarse" (añadirse) para producir una sola señal de salida. Desafortunadamente, el término *mezclador* significa muchas cosas diferentes dependiendo del contexto en el que se emplea. Bajo el contexto de transmisores y receptores, el término significa una operación de multiplicación

que produce una traslación de frecuencia de la señal de entrada. En sistemas de audio el término tiene el significado de una operación de suma para combinar varias entradas a una sola señal de salida.

En la práctica, la operación de multiplicación requerida por los mezcladores puede llevarse a cabo mediante uno de los siguientes elementos:

1. Un dispositivo de transconductancia continuamente variable, como un FET de doble compuerta.
2. Un dispositivo no lineal.
3. Un dispositivo lineal con una ganancia discreta variable con el tiempo.

En el primer método, cuando se utiliza un FET de doble compuerta para obtener la multiplicación, $v_{\text{entrada}}(t)$ se conecta generalmente a la compuerta 1, y el oscilador local a la compuerta 2. La salida resultante es

$$v_1(t) = Kv_{\text{entrada}}(t)v_{\text{LO}}(t) \tag{4–62}$$

sobre la región de operación, donde $v_{\text{LO}}(t)$ es el voltaje del oscilador local. Se dice que el multiplicador es del tipo de *un solo cuadrante* si su acción en la ecuación (4-62) se obtiene sólo cuando ambas formas de onda de entrada, $v_{\text{entrada}}(t)$ y $v_{\text{LO}}(t)$, tienen valores no negativos o no positivos [es decir, un gráfico de los valores de $v_{\text{entrada}}(t)$ contra $v_{\text{LO}}(t)$ cae dentro de un solo cuadrante]. El multiplicador es del tipo de *dos cuadrantes* si su acción se obtiene cuando $v_{\text{entrada}}(t)$ o $v_{\text{LO}}(t)$ es no negativa o no positiva y la otra es arbitraria. Se dice que el multiplicador es del tipo de *cuatro cuadrantes* cuando su acción se obtiene independientemente del signo de $v_{\text{entrada}}(t)$ y $v_{\text{LO}}(t)$.

La figura 4-9 ilustra cómo en la segunda técnica puede emplearse un dispositivo no lineal para obtener la multiplicación mediante la suma de dos entradas. Considerando el componente de ley cuadrada a la salida se tiene que

$$\begin{aligned} v_1(t) &= K_2(v_{\text{entrada}} + v_{\text{LO}})^2 + \text{otros términos} \\ &= K_2(v_{\text{entrada}}^2 + 2v_{\text{entrada}}v_{\text{LO}} + v_{\text{LO}}^2) + \text{otros términos} \end{aligned} \tag{4–63}$$

El término del producto cruzado genera la acción deseada del multiplicador:

$$2K_2v_{\text{entrada}}v_{\text{LO}} = 2K_2A_0v_{\text{entrada}}(t)\cos\omega_0 t \tag{4–64}$$

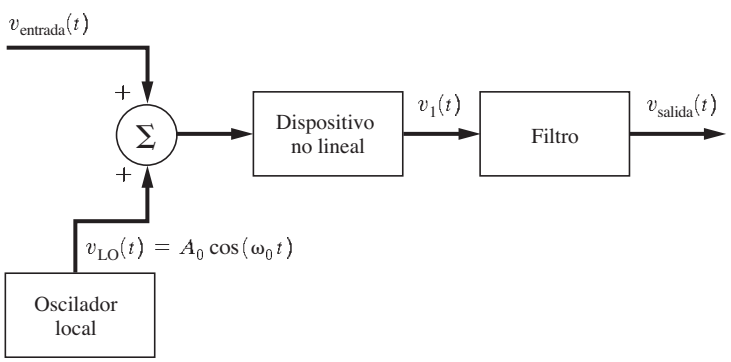


Figura 4–9 Un dispositivo no lineal utilizado como mezclador.

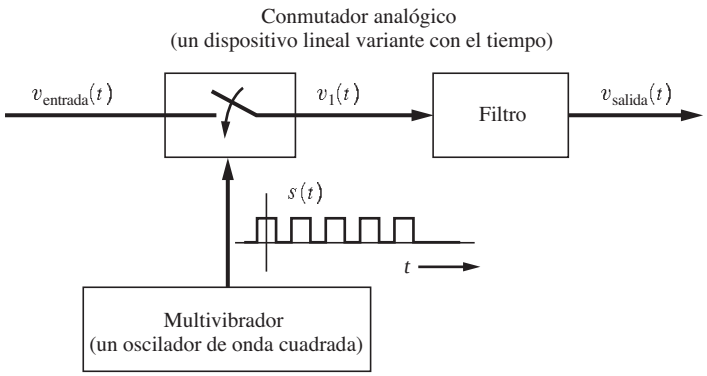


Figura 4–10 Un dispositivo lineal variante con el tiempo empleado como mezclador.

Si se asume que $v_{\text{entrada}}(t)$ es una señal pasabanda, el filtro puede usarse para pasar los términos de conversión ascendente o reductora. Sin embargo, algunos productos de distorsión pueden también caer en la banda de paso de salida si ω_c y ω_0 no se seleccionan cuidadosamente.

En el tercer método se emplea un dispositivo lineal con ganancia variable con el tiempo para obtener la acción del multiplicador. La figura 4-10 demuestra esto, en donde el dispositivo variante con el tiempo es un conmutador analógico, como un circuito integrado CMOS 4016, que se activa mediante una señal oscilatoria de onda cuadrada $v_0(t)$. La ganancia del conmutador es igual a la unidad o igual a cero. La forma de onda a la salida del conmutador analógico es

$$v_1(t) = v_{\text{entrada}}(t)s(t) \tag{4–65}$$

donde $s(t)$ es una onda cuadrada unipolar oscilante que tiene una amplitud pico igual a la unidad. (Esto es análogo a la PAM con muestreo natural estudiada en el capítulo 3.) Utilizando la serie de Fourier para una onda rectangular se encuentra que la ecuación (4-65) se convierte en

$$v_1(t) = v_{\text{entrada}}(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,\text{sen}(n\pi/2)}{n\pi} \cos n\omega_0 t\right] \tag{4–66}$$

La acción de multiplicación se obtiene a partir del término $n = 1$, la cual es

$$\frac{2}{\pi}\, v_{\text{entrada}}(t) \cos \omega_0 t \tag{4–67}$$

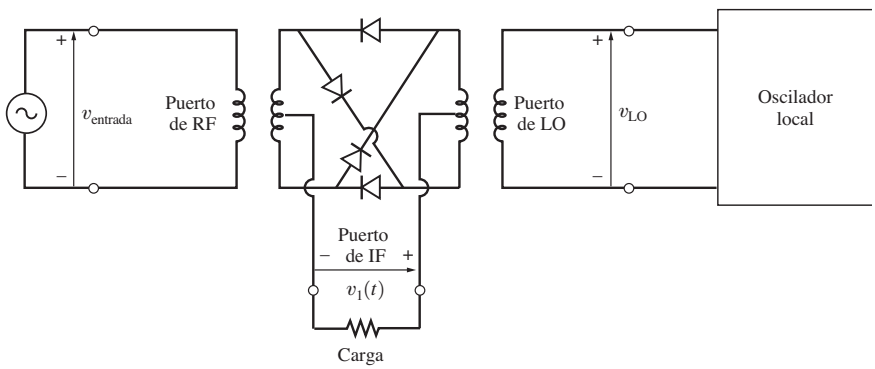
Este término generará señales de conversión ascendente y reductora a $f_c + f_0$ y $f_c - f_0$ si $v_{\text{entrada}}(t)$ es una señal pasabanda con un espectro diferente de cero alrededor de $f = f_c$. Sin embargo, la ecuación (4-66) muestra que las otras bandas de frecuencia también se presentan en la señal de salida, principalmente en las frecuencias $f = |f_c \pm nf_0|$, $n = 3, 5, 7, \ldots$ y, además, existe un término de vía de paso $\frac{1}{2}v_{\text{entrada}}(t)$ que aparece en la salida. Por supuesto que puede utilizarse un filtro para pasar el componente de conversión ya sea elevadora o reductora que aparece en la ecuación (4-66).

Los mezcladores a menudo se clasifican en *desbalanceados*, *balanceados* y *balanceados dobles*. De ahí se obtiene, en general,

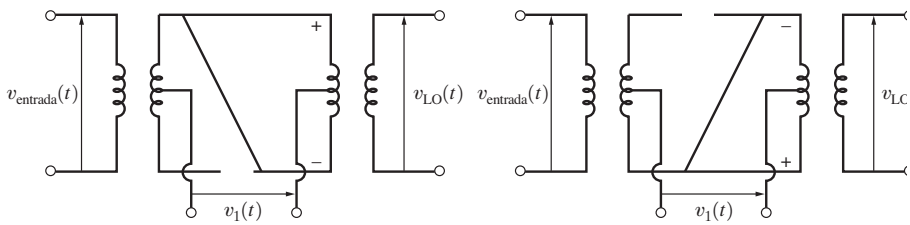
$$v_1(t) = C_1\, v_{\text{entrada}}(t) + C_2\, v_0(t) + C_3\, v_{\text{entrada}}(t)v_0(t) + \text{otros términos} \tag{4–68}$$

a la salida de los circuitos del mezclador. Cuando C_1 y C_2 son diferentes de cero se dice que el mezclador es *desbalanceado* debido a que $v_{\text{entrada}}(t)$ y $v_0(t)$ se alimentan hacia la salida. La figura 4-9 ilustra un mezclador desbalanceado, en el cual se usó un dispositivo no lineal para obtener la acción mezcladora. En la expansión de Taylor de las características de salida a entrada del dispositivo no lineal, el término lineal se emplea como vía de paso tanto para $v_{\text{entrada}}(t)$ como para $v_0(t)$. Un *mezclador balanceado* tiene una vía de paso sólo para una de las entradas, es decir que C_1 o C_2 de la ecuación (4-68) es igual a cero. La figura 4-10 muestra un ejemplo de un mezclador balanceado, el cual utiliza muestreo para obtener la acción mezcladora. En este ejemplo, la ecuación (4-66) demuestra que $v_0(t)$ está balanceada (es decir, $C_2 = 0$) y $v_{\text{entrada}}(t)$ se alimenta con una ganancia de $C_1 = \frac{1}{2}$. Un *mezclador doblemente balanceado* no tiene una vía de paso para cualquiera de las entradas, es decir que tanto C_1 como C_2 de la ecuación (4-68) son iguales a cero. En el siguiente párrafo se discute un tipo de mezclador doblemente balanceado.

La figura 4-11a muestra el circuito para un mezclador doblemente balanceado. Este circuito es popular debido a que es relativamente económico y tiene un excelente rendimiento. La IMD de ter-

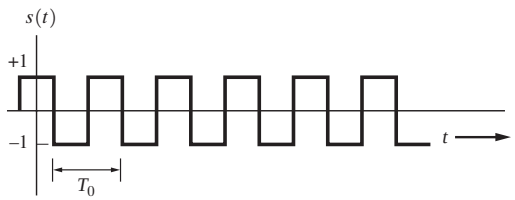


(a) Un circuito mezclador doblemente balanceado



(b) Circuito equivalente cuando $v_{\text{LO}}(t)$ es positivo

(c) Circuito equivalente cuando $v_{\text{LO}}(t)$ es negativo



(d)) Forma de onda oscilante debido a la señal del oscilador local

Figura 4–11 Análisis de un circuito mezclador doblemente balanceado.

cer orden está típicamente debajo de por lo menos 50 dB en comparación con los componentes de salida deseados. Este mezclador a menudo se diseña para impedancias de fuente y de carga de 50 Ω y tiene entrada de banda ancha y puertos de salida. El puerto de RF [es decir, $v_{\text{entrada}}(t)$] y el puerto de LO (oscilador local) a menudo pueden usarse sobre un rango de frecuencia de 1,000:1 como, por ejemplo, 1 a 1,000 MHz, y el puerto de salida de IF (frecuencia intermedia), $v_1(t)$, puede emplearse típicamente desde el valor de DC hasta 600 MHz. Los transformadores se fabrican a partir de pequeños núcleos toroidales y los diodos son diodos de portadores de alta energía acoplados. El nivel de la señal de entrada en el puerto de RF es relativamente pequeño, generalmente menor a −5 dBm, y el del oscilador local en el puerto de LO es relativamente grande, como, por ejemplo, de +5 dBm. La señal LO es grande y, en efecto, enciende y apaga los diodos de tal forma que éstos actúan como conmutadores. El LO proporciona la señal de control de conmutación. Este circuito por lo tanto actúa como circuito lineal variante con el tiempo, con respecto al puerto de entrada de RF, y su análisis es muy similar al utilizado para el mezclador conmutador analógico de la figura 4-10. Durante la porción del ciclo cuando $v_{\text{LO}}(t)$ tiene un voltaje positivo, el voltaje de salida es proporcional a $+v_{\text{entrada}}(t)$, como se puede observar en el circuito equivalente mostrado en la figura 4-11b. Cuando $v_{\text{LO}}(t)$ es negativo, el voltaje de salida es proporcional a $-v_{\text{entrada}}(t)$, como se puede observar a partir del circuito equivalente mostrado en la figura 4-11c. Por lo tanto, la salida de este mezclador doblemente balanceado es

$$v_1(t) = Kv_{\text{entrada}}(t)\, s(t) \tag{4–69}$$

donde $s(t)$ es una forma de onda bipolar conmutada, como lo muestra la figura 4-11d. Debido a que la forma de onda oscilante procede de la señal LO, su periodo es de $T_0 = 1/f_0$, y se describe mediante

$$s(t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi/2)}{n\pi} \cos n\omega_0 t \tag{4–70}$$

de tal manera que la salida del mezclador es

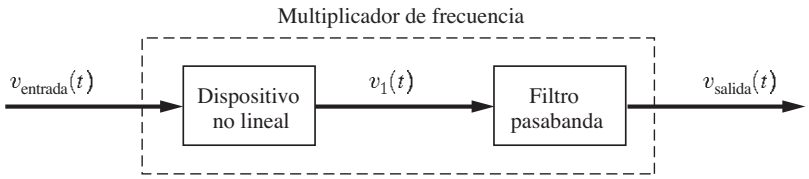
$$v_1(t) = [\, v_{\text{entrada}}(t)\,] \left[4K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi/2)}{n\pi} \cos n\omega_0 t \right] \tag{4–71}$$

Esta ecuación muestra que si la salida es una señal pasabanda con espectro diferente de cero alrededor de f_c, el espectro de la entrada se convertirá a las frecuencias $|\, f_c \pm nf_0 \,|$, donde $n = 1, 3, 5, \ldots$. En la práctica, el valor de K es tal que la ganancia de conversión, definida como el nivel de salida deseado dividido entre el nivel de entrada, tiene un valor alrededor de −6 dB en la frecuencia $|\, f_c \pm f_0 \,|$. Por supuesto que puede emplearse un filtro de salida para seleccionar la banda de frecuencia elevada o reducida por conversión.

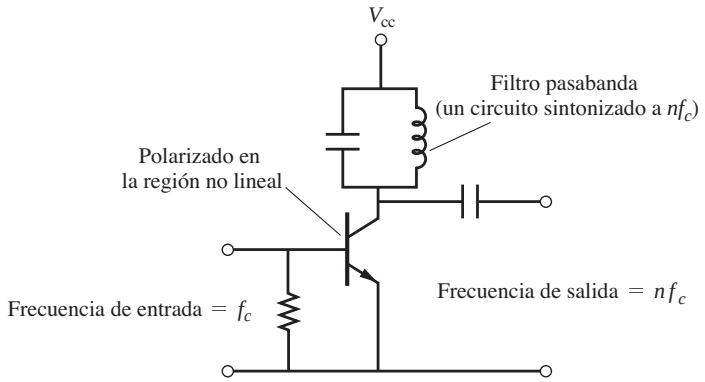
Además de las aplicaciones de conversión elevada o reducida, los mezcladores (es decir, multiplicadores) pueden usarse en moduladores de amplitud para convertir la señal de banda base a una banda de frecuencias RF, y también como detectores de producto para convertir señales RF a banda base. Las secciones posteriores que tratan sobre transmisores y receptores discutirán estas aplicaciones.

4–12 MULTIPLICADORES DE FRECUENCIA

Los *multiplicadores de frecuencia* consisten en un circuito no lineal seguido por un circuito sintonizado, ilustrado en la figura 4-12. Si una señal pasabanda se alimenta a un multiplicador de frecuencia, la salida aparecerá en una banda de frecuencia a la n-ésima armónica de la frecuencia de portadora



(a) Diagrama de bloques de un multiplicador de frecuencia



(b) Diagrama de un circuito multiplicador de frecuencia

Figura 4–12 Multiplicador de frecuencia.

de entrada. Debido a que el dispositivo es no lineal, el ancho de banda de la salida de la *n*-ésima armónica es mayor que la de la señal de entrada. En general, la señal de entrada pasabanda se representa mediante

$$v_{\text{entrada}}(t) = R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{4–72}$$

La función de transferencia del dispositivo no lineal puede expandirse a una serie de Taylor, de tal forma que el *n*-ésimo término de salida es

$$v_1(t) = K_n v_{\text{entrada}}^n(t) = K_n R^n(t)\cos^n[\omega_c t + \theta(t)]$$

o[4]

$$v_1(t) = CR^n(t)\cos[n\omega_c t + n\theta(t)] + \text{otros términos}$$

Como el filtro pasabanda se diseña para pasar frecuencias alrededor de nf_c, la salida es

$$v_{\text{salida}}(t) = CR^n(t)\cos[n\omega_c t + n\theta(t)] \tag{4–73}$$

[4] Los términos de salida del *m*-ésimo orden, donde $m > n$, también pueden contribuir a la salida de la *n*-ésima armónica, siempre y cuando K_m sea lo suficientemente grande con respecto a K_n. La identidad trigonométrica $8\cos^4 x = 3 + 4\cos 2x + \cos 4x$ ilustra esta condición, en donde $m = 4$ y $n = 2$.

Esto ilustra que la variación en *amplitud* de la entrada $R(t)$ a*parece distorsionada* en la señal de salida, ya que la envolvente real en la salida es $R^n(t)$. La forma de onda de la variación en *ángulo*, $\theta(t)$, *no se distorsiona* debido al multiplicador de frecuencia, pero éste sí aumenta la magnitud de la variación en ángulo por un factor de n. Por lo tanto, los circuitos multiplicadores de frecuencia no se utilizan en señales en el caso en donde se deba mantener la AM. Sin embargo, como se verá, el multiplicador de frecuencia es de gran utilidad en los problemas de PM y FM, ya que éste efectivamente "amplifica" la forma de onda de variación en ángulo $\theta(t)$. Una *etapa duplicadora* es un multiplicador con $n = 2$ y una *etapa triplicadora* es un multiplicador de frecuencia con $n = 3$.

El multiplicador de frecuencia no debe confundirse con el mezclador. El primero actúa como dispositivo no lineal. El segundo, el cual ocupa una operación de multiplicación matemática, actúa como circuito lineal de ganancia variable con el tiempo, causada por la señal LO. El ancho de banda de la señal a la salida de un multiplicador de frecuencia es mayor que el de la señal de entrada y aparece en una banda de frecuencias ubicada en la n-ésima armónica de la entrada. El ancho de banda de una señal a la salida de un mezclador es el mismo que el de la entrada, pero el espectro de entrada se ha elevado o reducido por conversión, dependiendo de la frecuencia del LO y de la banda de paso del filtro de salida. Un multiplicador de frecuencia es esencialmente un amplificador no lineal seguido de un filtro pasabanda diseñado para pasar la n-ésima armónica.

4–13 CIRCUITOS DETECTORES

La figura 4-1 muestra que el receptor contiene circuitos portadores que convierten la forma de onda pasabanda de entrada a una forma de onda de banda base de salida. Estos circuitos portadores se conocen como *circuitos detectores*. Las siguientes secciones estudiarán cómo diseñar circuitos detectores para producir los valores de $R(t)$, $\theta(t)$, $x(t)$ o $y(t)$ a su salida basados en la señal pasabanda correspondiente alimentada a la entrada del detector.

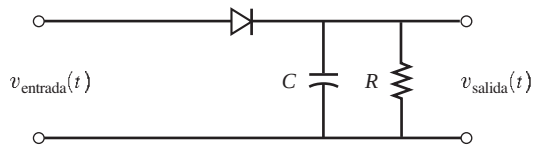
Detector de envolvente

Un *detector de envolvente ideal* es un circuito que produce una forma de onda a su salida proporcional a la envolvente real $R(t)$ de su entrada. De la ecuación (4-1b) se obtiene que la entrada pasabanda puede representarse con $R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)]$, donde $R(t) \geq 0$. Entonces la salida del detector de envolvente ideal es

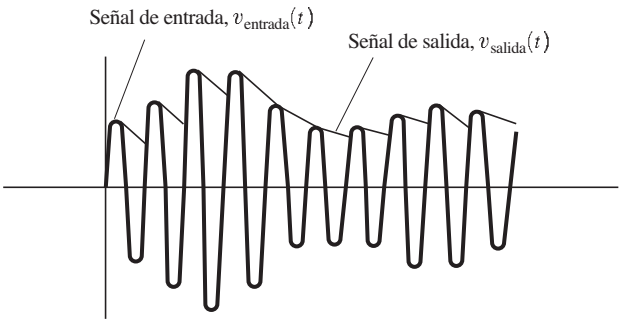
$$v_{\text{salida}}(t) = KR(t) \tag{4–74}$$

donde K es la constante de proporcionalidad.

La figura 4-13a muestra un circuito detector básico utilizando un diodo que se aproxima a un detector de envolvente ideal. La corriente de diodo ocurre en pulsos que son proporcionales a la parte positiva de la forma de onda de entrada. Los pulsos de corriente cargan al capacitor para producir la forma de onda del voltaje de salida, como se ilustra en la figura 4-13b. La constante de tiempo RC se selecciona de tal forma que la señal de salida pueda asemejar a la envolvente real $R(t)$ de la señal de entrada. Por lo tanto, la frecuencia de corte del filtro pasabaja requiere ser mucho más pequeña que la de portadora f_c y mucho mayor que el ancho de banda de la forma de onda de modulación (detectada) B. Es decir,



(a) Un detector de envolvente con diodo



(b) Formas de onda asociadas con el detector de envolvente con diodo

Figura 4–13 Detector de envolvente.

$$B \ll \frac{1}{2\pi RC} \ll f_c \tag{4–75}$$

donde RC es la constante de tiempo para el filtro.

El detector de envolvente a menudo se ocupa para detectar la modulación en señales AM. En este caso, $v_{\text{entrada}}(t)$ posee la envolvente compleja $g(t) = A_c[1 + m(t)]$, donde $A_c > 0$ representa la fuerza o poder de la señal AM recibida y $m(t)$ es la modulación. Si $|m(t)| < 1$, entonces

$$v_{\text{salida}} = KR(t) = K|g(t)| = KA_c[1 + m(t)] = KA_c + KA_c m(t)$$

KA_c es el voltaje de DC que se emplea para proporcionar el *control automático de ganancia* (AGC, por sus siglas en inglés) para el receptor de AM. Es decir que, para un valor de KA_c relativamente pequeño (una señal débil recibida de AM), la ganancia en el receptor aumenta y viceversa. $KA_c m(t)$ es la modulación detectada. En el caso de una modulación de audio (pero no de video), los valores típicos para los componentes del detector de envolvente son $R = 10$ kΩ y $C = 0.001$ μfd. Esta combinación de valores proporciona una frecuencia de corte para un filtro pasabajas (3 dB abajo) de $f_{co} = 1/(2\pi RC) = 15.9$ kHZ, la cual es mucho menor a f_c y mayor que la frecuencia de audio más alta, B, usada en lo que se consideran aplicaciones típicas de AM.

Detector de producto

Un *detector de producto* (figura 4-14) es un circuito combinador que reduce por conversión la entrada (señal pasabanda con ruido) a banda base. La salida del multiplicador es

$$\begin{aligned} v_1(t) &= R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)]A_0\cos(\omega_c t + \theta_0) \\ &= \tfrac{1}{2}A_0 R(t)\cos[\theta(t) - \theta_0] + \tfrac{1}{2}A_0 R(t)\cos[2\omega_c t + \theta(t) + \theta_0] \end{aligned}$$

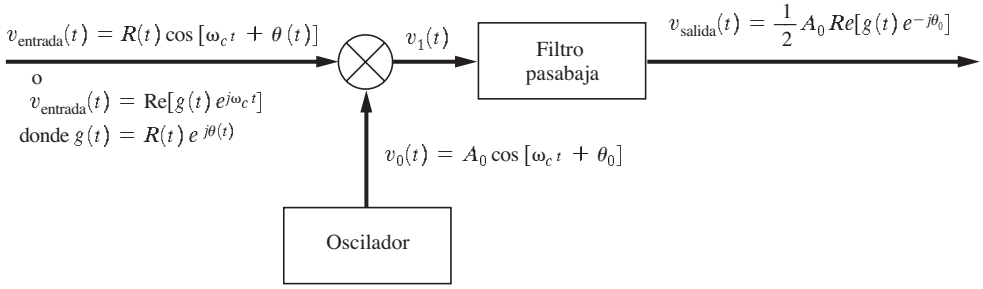


Figura 4–14 Detector de producto.

donde la frecuencia del oscilador es f_c y la fase es θ_0. El filtro pasabaja sólo deja pasar el término reducido por conversión y por lo tanto la salida es

$$v_{\text{salida}}(t) = \tfrac{1}{2}A_0R(t)\,\cos[\theta(t) - \theta_0] = \tfrac{1}{2}A_0\text{Re}\{g(t)e^{-j\theta_0}\} \tag{4–76}$$

donde la envolvente compleja de la entrada se denota con

$$g(t) = R(t)e^{j\theta(t)} = x(t) + jy(t)$$

y $x(t)$ y $y(t)$ son los componentes en cuadratura. [Consulte la ecuación (4-2).] Debido a que la frecuencia del oscilador es la misma que la de la portadora de la señal de entrada, el oscilador se ha *sincronizado en frecuencia* con la señal de entrada. Además, si $\theta_0 = 0$, se dice que el oscilador se ha *sincronizado en fase* con el componente dentro de fase, y por lo tanto la salida se convierte en

$$v_{\text{salida}}(t) = \tfrac{1}{2}A_0x(t) \tag{4–77a}$$

Si $\theta_0 = 90°$,

$$v_{\text{salida}} = \tfrac{1}{2}A_0y(t) \tag{4–77b}$$

La ecuación (4-76) también indica que un detector de producto es sensible a las señales AM o PM. Por ejemplo, si la entrada no contiene modulación por ángulo, tal que $\theta(t) = 0$, y si la fase de referencia se iguala a cero (en otras palabras, $\theta_0 = 0$), entonces

$$v_{\text{salida}}(t) = \tfrac{1}{2}A_0R(t) \tag{4–78a}$$

lo cual implica que $x(t) \geq 0$ y que el envolvente real se obtiene mediante la salida del detector de producto, tal y como ocurre en el caso del detector de envolvente en la discusión anterior. Sin embargo, si una señal modulada por ángulo $A_c\cos[\omega_c t + \theta(t)]$ está presente en la entrada y $\theta_0 = 90°$, entonces la salida del detector de producto es

$$v_{\text{salida}}(t) = \tfrac{1}{2}A_0\ \text{Re}\{A_ce^{j[\theta(t)-90°]}\}$$

o

$$v_{\text{salida}}(t) = \tfrac{1}{2}A_0A_c\ \text{sen}\ \theta(t) \tag{4–78b}$$

En este caso, el detector de producto actúa como un *detector de fase* con una *característica senoidal* debido a que el voltaje de salida es proporcional al seno de la diferencia de fase entre la señal de

entrada y la del oscilador. También existen circuitos detectores de fase que generan una característica triangular y de diente de sierra. [Krauss, Bostian y Raab, 1980.] Si se considera la ecuación (4-78b) para el detector de fase con una característica senoidal y que la diferencia de fase es pequeña [es decir, $|\theta(t)| \ll \pi/2$], se puede observar que sen $\theta(t) \approx \theta(t)$ y que

$$v_{\text{salida}}(t) \approx \tfrac{1}{2}A_0A_c\theta(t) \tag{4–79}$$

la cual es una característica lineal, siempre y cuando los ángulos sean pequeños. Por lo tanto, la salida de este detector de fase es directamente proporcional a las diferencias de fase cuando el ángulo de diferencia es pequeño (consulte la figura 4-20a).

El detector de producto actúa como dispositivo lineal variable con el tiempo respecto de la señal de entrada $v_{\text{entrada}}(t)$, en comparación con el detector de envolvente, el cual es un dispositivo no lineal. Esta propiedad de ser dispositivo lineal o no lineal afecta los resultados de manera significativa cuando dos o más componentes, como una señal con ruido, se aplican a la entrada. El capítulo 7 tratará este tema.

Los detectores también pueden clasificarse en dispositivos coherentes o no coherentes. Un detector *coherente* posee dos entradas, una para una señal de referencia, como una señal sincronizada del oscilador, y otra para la señal modulada que será demodulada. El detector de producto es un ejemplo de detector coherente. Un detector *no coherente* posee una sola entrada, principalmente el puerto de señal modulada. El detector de envolvente es un ejemplo de detector no coherente.

Detector de modulación en frecuencia

Un *detector de modulación en frecuencia* (*FM*) *ideal* es un dispositivo que produce una salida proporcional a la frecuencia instantánea de la entrada. Es decir, si la entrada pasabanda se representa mediante $R(t)$ cos $[\omega_c t + \theta(t)]$, entonces la salida del detector de FM ideal es

$$v_{\text{salida}}(t) = \frac{Kd[\omega_c t + \theta(t)]}{dt} = K\left[\omega_c + \frac{d\theta(t)}{dt}\right] \tag{4–80}$$

donde la entrada es distinta a cero (es decir, $R(t) \neq 0$).

Generalmente el detector de FM está *balanceado*. Esto significa que el voltaje de DC $K\omega_c$ no aparece en la salida si el detector se sintoniza a (o se diseña para) la frecuencia de portadora f_c. En este caso, la salida es

$$v_{\text{salida}}(t) = K\frac{d\theta(t)}{dt} \tag{4–81}$$

Existen muchas maneras de construir detectores de FM, pero la mayoría se basa en uno de los tres siguientes principios:

- Conversión de FM a AM.
- Detección de desplazamiento en fase o en cuadratura.
- Detección de cruce por cero.

Un *detector de pendiente* es un ejemplo del principio de conversión de FM a AM. La figura 4-15 muestra un diagrama de bloques como ejemplo del mismo. Se requiere de un limitador pasabanda para suprimir cualquier variación en la amplitud de la señal de entrada, ya que ésta distorsionará la señal de salida deseada.

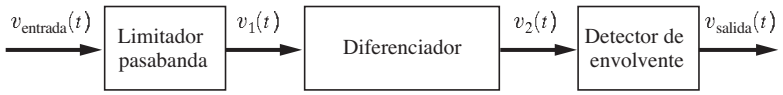


Figura 4–15 Demodulación en frecuencia utilizando detección de pendiente.

El detector de pendiente puede analizarse como sigue. Suponga que la entrada es una señal con desvanecimento con modulación en frecuencia. Consultando la tabla 4-1, es factible representar esta señal FM por

$$v_{\text{entrada}}(t) = A(t)\ \cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{4–82}$$

donde

$$\theta(t) = K_f \int_{-\infty}^{t} m(t_1)\ dt_1 \tag{4–83}$$

$A(t)$ representa al envolvente que presenta desvanecimiento y $m(t)$ la señal de modulación, como, por ejemplo, una señal de audio. Por lo tanto, se deduce que la salida del limitador es proporcional a

$$v_1(t) = V_L\ \cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{4–84}$$

y la salida del diferenciador se convierte en

$$v_2(t) = -V_L\left[\omega_c + \frac{d\theta(t)}{dt}\right] \text{sen}[\omega_c t + \theta(t)] \tag{4–85}$$

La salida del detector de envolvente es la magnitud de la envolvente compleja para $v_2(t)$:

$$v_{\text{salida}}(t) = \left| -V_L\left[\omega_c + \frac{d\theta(t)}{dt}\right]\right|$$

Debido a que en la práctica $\omega_c \gg d\theta/dt$, esta ecuación se convierte en

$$v_{\text{salida}}(t) = V_L\left[\omega_c + \frac{d\theta(t)}{dt}\right]$$

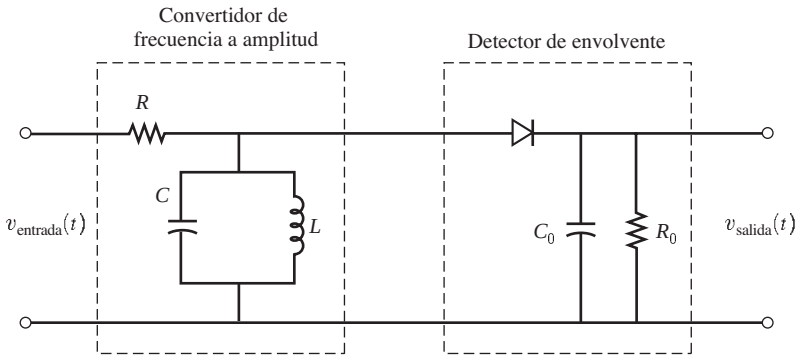
Utilizando la ecuación (4-83) se obtiene que

$$v_{\text{salida}}(t) = V_L\omega_c + V_L K_f m(t) \tag{4–86}$$

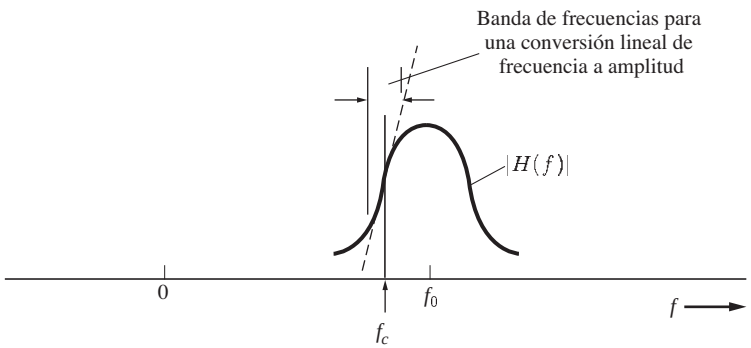
lo cual indica que la salida consiste en un voltaje de DC $V_L\omega_c$ además de un voltaje de AC $V_L K_f m(t)$, el cual es proporcional a la modulación en la señal de FM. Por supuesto que un capacitor también puede colocarse en serie con la salida de tal forma que sólo el voltaje de AC se pasará a la carga.

La operación de diferenciación puede realizarse usando cualquier circuito que actúe como convertidor de frecuencia a amplitud. Por ejemplo, la figura 4-16 ilustra cómo puede emplearse un circuito resonante sintonizado a una sola frecuencia, en donde la función de transferencia de magnitud es $|H(f)| = K_1 f + K_2$ sobre la porción lineal (útil) de la característica. La figura 4-17 muestra un detector de FM balanceado, conocido también como *discriminador balanceado*. Se ocupan dos circuitos sintonizados para balancear la DC cuando la entrada posee una frecuencia de portadora f_c y para proporcionar una característica de conversión lineal extendida de frecuencia a voltaje.

Pueden también construirse discriminadores balanceados que funcionan gracias a las propiedades de desplazamiento por fase de un circuito transformador de RF sintonizado doblemente con rebobi-



(a) Diagrama de circuito de un detector de pendiente



(b) Magnitud de la función de transferencia del filtro

Figura 4–16 Detección de pendiente usando un circuito sintonizado a una sola frecuencia para una conversión de frecuencia a amplitud.

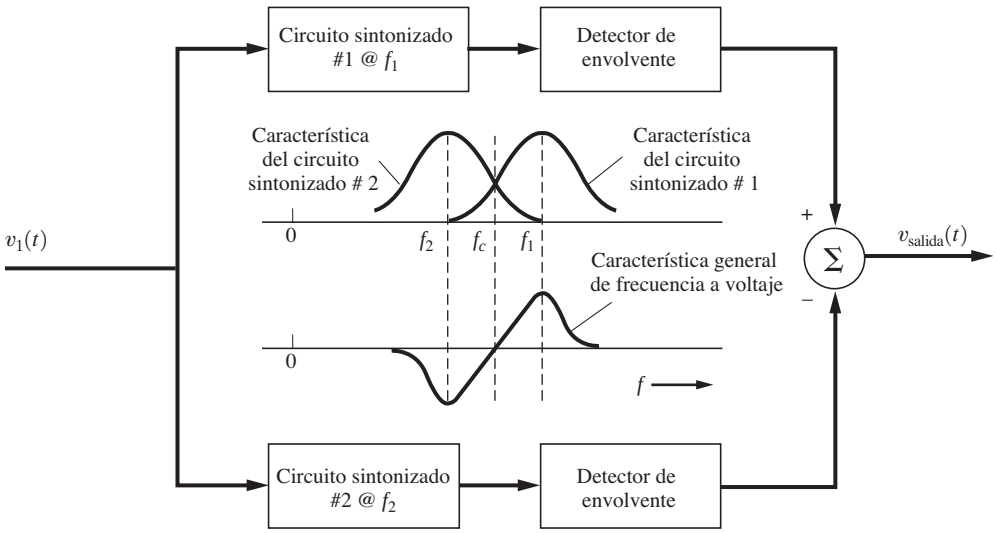
nados primarios y secundarios [Stark, Tuteur y Anderson, 1988]. En la práctica, los circuitos discriminadores se reemplazan por circuitos integrados que operan bajo el principio de detección en cuadratura.

Un *detector en cuadratura* puede describirse como sigue: primero se obtiene una señal en cuadratura de la señal FM□a continuación, mediante un detector de producto, dicha señal en cuadratura se multiplica con la señal FM para producir la señal remodulada $v_{\text{salida}}(t)$. La señal en cuadratura puede producirse pasando la señal FM a través de una resistencia (de alto valor) de capacitor que se conecta en serie con un circuito resonante en paralelo sintonizado a f_c. La capacitancia en serie proporciona un desplazamiento de fase de 90°, y el circuito resonante aporta un desplazamiento de fase adicional que es proporcional a la desviación (con referencia a f_c) de la frecuencia instantánea de la señal FM. A partir de las ecuaciones (4-83) y (4-84) se obtiene que la señal de FM es

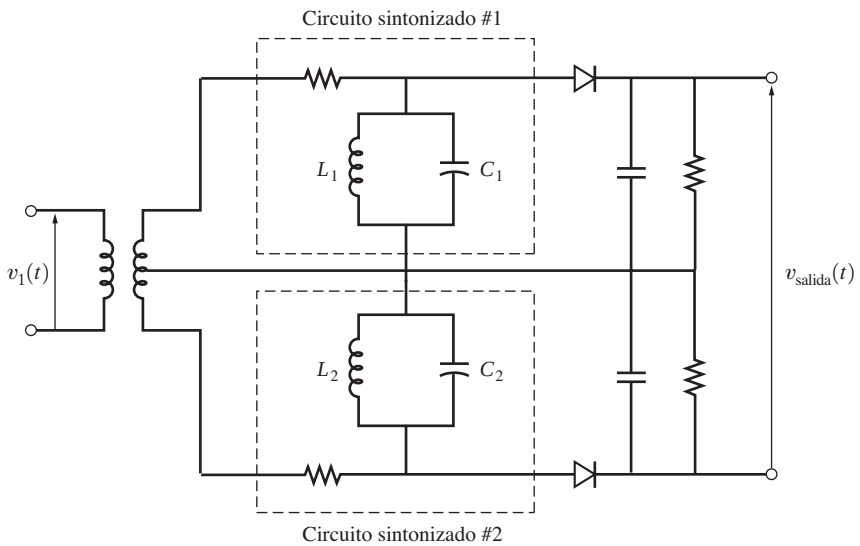
$$v_{\text{entrada}}(t) = V_L \cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{4–87}$$

y la señal en cuadratura es

$$v_{\text{cuadratura}}(t) = K_1 V_L \operatorname{sen}\left[\omega_c t + \theta(t) + K_2 \frac{d\theta(t)}{dt}\right] \tag{4–88}$$



(a) Diagrama de bloques



(b) Diagrama de circuito

Figura 4–17 Discriminador balanceado.

donde K_1 y K_2 son constantes que dependen de los valores de los componentes utilizados tanto en el capacitor en serie como en el circuito resonante en paralelo. Estas dos señales, de las ecuaciones (4-87) y (4-88), se multiplican mediante un detector de producto (consulte la figura 4-14) para producir la señal de salida

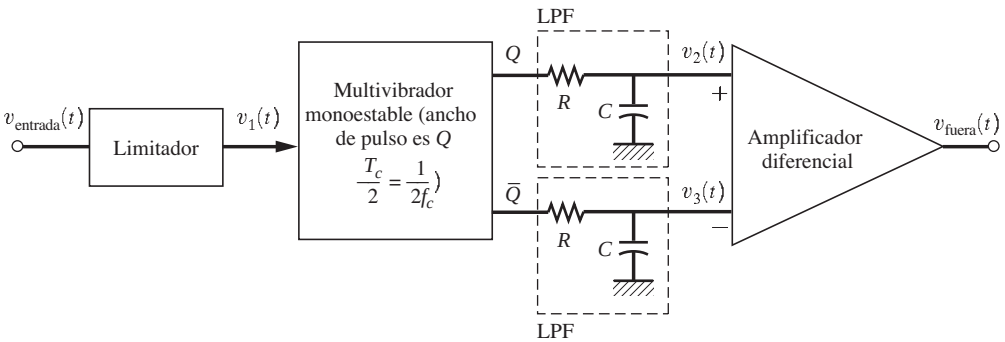
$$v_{\text{salida}}(t) = \tfrac{1}{2}K_1 V_L^2 \operatorname{sen}\left[K_2 \frac{d\theta(t)}{dt}\right] \tag{4–89}$$

donde el término de la suma de frecuencias se elimina a través del filtro pasabajas. Si se considera una K_2 suficientemente pequeña resulta que sen $x \approx x$, y, a través de la ecuación (4-83), la salida se convierte en

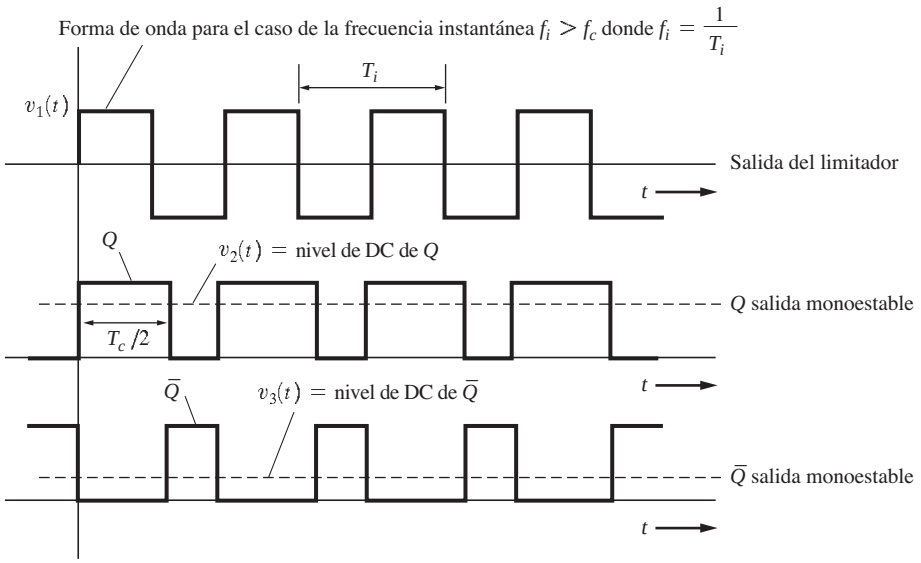
$$v_{\text{salida}}(t) = \tfrac{1}{2}K_1K_2V_L^2K_f m(t) \tag{4–90}$$

Esto demuestra que el detector en cuadratura detecta la modulación en la señal FM de entrada. Los lazos enganchados en fase que se configuran para detectar la FM también utilizan el principio del detector en cuadratura. [Consulte la ecuación (4-110).]

Como lo indica la ecuación (4-80), la salida de un detector de FM ideal es directamente proporcional a la frecuencia instantánea de la entrada. Esta característica lineal de frecuencia a voltaje puede obtenerse directamente si se identifica el número de cruces por cero de la forma de onda de entrada. Un detector de FM que utiliza esta técnica se conoce como *detector de cruce por cero*. La figura 4-18 ilustra un circuito híbrido (es decir, que contiene dispositivos tanto digitales como analógicos), que es un detector balanceado de cruce por cero de FM. La figura 4-18b muestra la señal



(a) Circuito



(b) Formas de onda ($f_i > f_c$)

Figura 4–18 Detector balanceado con cruce por cero de FM.

FM limitada (onda cuadrada) representada por $v_1(t)$. Para ilustrar esto, se asume que $v_1(t)$ se observa durante la porción del ciclo de modulación donde la frecuencia instantánea

$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} \tag{4–91}$$

es mayor que la de portadora f_c. Es decir, $f_i > f_c$ en la ilustración. □a que el voltaje de modulación varía lentamente con respecto a la oscilación de la señal FM de entrada, $v_1(t)$ parece tener (en la figura) una frecuencia constante, aunque en realidad varía su frecuencia de acuerdo a $f_i(t)$. El multivibrador monoestable (de un solo tiro) se dispara en los cruces por cero de la pendiente positiva de $v_1(t)$. Para una detección balanceada de FM, el ancho de pulso de la salida Q se iguala al valor de $T_c/2 = 1/2f_c$, donde f_c es la frecuencia de portadora de la señal FM en la entrada. Por lo tanto, el voltaje amplificador diferencial de salida es igual a cero si $f_i = f_c$. Para el caso donde $f_i > f_c$, el voltaje de salida será negativo. Por lo tanto, la característica lineal de frecuencia a voltaje, $C[f_i(t) - f_c]$, se obtiene cuando, para una señal FM en la entrada, $f_i(t) = f_c + (1/2\pi)K_f m(t)$.

Otro circuito que puede utilizarse para la demodulación de FM, así como para otros propósitos, es el lazo enganchado por fase.

4–14 LAZOS ENGANCHADOS POR FASE Y SINTETIZADORES DE FRECUENCIA

Un lazo enganchado por fase (PLL, por sus siglas en inglés) consiste en tres componentes básicos: (1) un detector de fase, (2) un filtro pasabajas y (3) un oscilador controlado por voltaje (VCO, por sus siglas en inglés), como se muestra en la figura 4-19. El VCO es un oscilador que produce una forma de onda periódica con una frecuencia que puede variarse alrededor de cierta frecuencia de recorrido libre f_0 de acuerdo al valor del voltaje aplicado $v_2(t)$. La frecuencia de recorrido libre f_0 es la frecuencia de la salida del VCO cuando el voltaje aplicado $v_2(t)$ es de cero. El detector de fase produce una señal de salida $v_1(t)$ que es una función de la diferencia de fase entre la señal entrante $v_{\text{entrada}}(t)$ y la del oscilador $v_0(t)$. La señal filtrada $v_2(t)$ es la señal de control empleada para cambiar la frecuencia de la salida del VCO. La configuración PLL puede diseñarse de tal forma que actúe como filtro de seguimiento de banda estrecha cuando el filtro pasabajas (LPF, por sus siglas en inglés) es también un filtro de banda estrecha. En este modo de operación, la frecuencia del VCO se convertirá en aquella de uno de los componentes de línea del espectro de la señal de entrada, de tal manera que, en efecto, la señal de salida del VCO es una señal periódica con una frecuencia igual a la frecuencia promedio de dicho componente de señal de entrada. Una vez que el VCO adquiere al

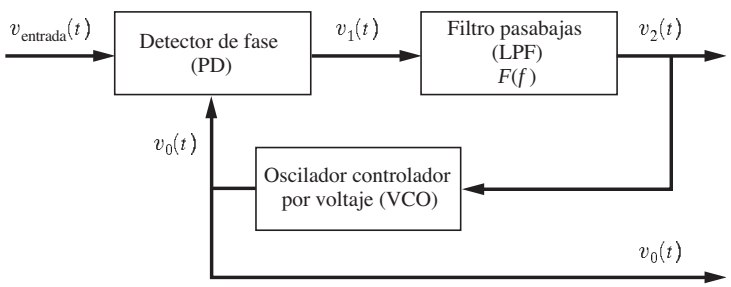


Figura 4–19 Configuración PLL básica.

componente de frecuencia, la frecuencia del VCO seguirá al componente de la señal de entrada si éste cambia ligeramente en frecuencia. En otro modo de operación, el ancho de banda del LPF es más grande, de tal forma que el VCO puede seguir a la frecuencia instantánea de la señal de entrada completa. Se dice que el PLL se ha "enganchado" cuando sigue a la señal de entrada en cualquiera de estas formas.

Si la señal aplicada tiene una frecuencia inicial de f_0, el PLL adquirirá un enganche y el VCO seguirá a la frecuencia de la señal de entrada sobre cierto rango, siempre y cuando la frecuencia de entrada cambie lentamente. Sin embargo, el lazo permanecerá enganchado sólo sobre algún rango finito del desplazamiento de frecuencia. Este rango se conoce como *rango de retención*, y depende de la ganancia general de DC del lazo, la cual incluye la ganancia de DC del LPF. Por otra parte, si la señal aplicada tiene una frecuencia inicial distinta a f_0, el lazo quizás no pueda engancharse aun cuando la frecuencia de entrada esté dentro del rango de retención. El rango de frecuencia sobre el cual la señal aplicada causará el enganche del lazo se conoce como *rango de enganche* (o *captura*). Este rango se determina principalmente mediante las características del filtro en el lazo y nunca es mayor que el rango de retención (consulte la figura 4-23). Otra especificación del PLL importante es la *máxima velocidad de barrido enganchado*, la cual se define como la máxima razón de cambio de la frecuencia de entrada a la cual el lazo permanecerá enganchado. Si la frecuencia de entrada cambia más rápido que esta velocidad, el lazo se desenganchará.

Un *lazo analógico enganchado por fase* (APLL, por sus siglas en inglés) es un PLL construido con circuitos analógicos. Recíprocamente, el PLL es un *lazo digital enganchado por fase* (DPLL, por sus siglas en inglés) si se emplean circuitos y señales digitales. Por ejemplo, la característica de detección de fase (PD, por sus siglas en inglés) depende de la implementación exacta utilizada. La figura 4-20 muestra algunas de las características del PD. La característica senoidal se obtiene si se ocupa un multiplicador (circuito analógico) y si las señales periódicas son senoidales. El multiplicador puede implementarse mediante un mezclador doblemente balanceado. Las características triangulares y de diente de sierra del PD se obtienen mediante circuitos digitales. Además del uso de circuitos digitales del VCO y el PD, es posible que el DPLL incorpore un filtro digital de lazo y técnicas de procesamiento de señales que utilicen microprocesadores. Gupta [1975] publicó una excelente guía sobre los lazos analógicos enganchados por fase en *IEEE Proceedings*, y Lindsey y Chie [1981] continuaron con este enfoque mediante un estudio sobre técnicas de PLL digitales. Además de estos casos, existe una excelente variedad de libros disponibles [Blanchard, 1976; Gardner, 1979; Best, 1999].

La figura 4-21 muestra cómo el PLL puede estudiarse si se examina el APLL. En ella se emplea un multiplicador (característica senoidal del PD). Suponga que la señal de entrada es

$$v_{\text{entrada}}(t) = A_i \operatorname{sen}[\omega_0 t + \theta_i(t)] \tag{4–92}$$

y que la señal de salida del VCO es

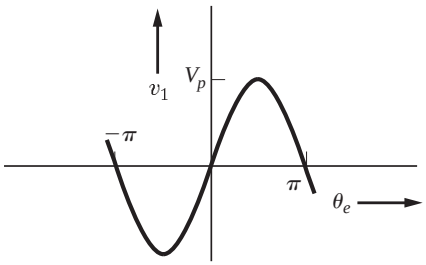
$$v_0(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \theta_0(t)] \tag{4–93}$$

donde

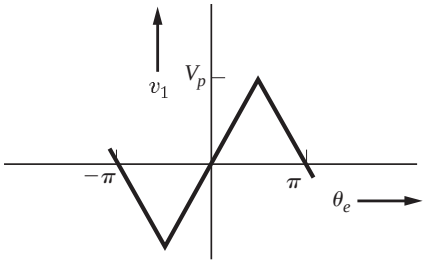
$$\theta_0(t) = K_v \int_{-\infty}^{t} v_2(\tau)\, d\tau \tag{4–94}$$

y K_v es la constante de ganancia del VCO (rad/V-s). Entonces la salida del PD es

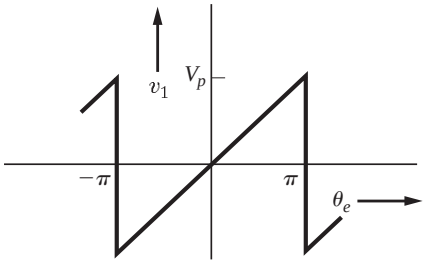
$$\begin{aligned} v_1(t) &= K_m A_i A_0 \operatorname{sen}[\omega_0 t + \theta_i(t)] \cos[\omega_0 t + \theta_0(t)] \\ &= \frac{K_m A_i A_0}{2} \operatorname{sen}[\theta_i(t) - \theta_0(t)] + \frac{K_m A_i A_0}{2} \operatorname{sen}[2\omega_0 t + \theta_i(t) + \theta_0(t)] \end{aligned} \tag{4–95}$$



(a) Características senoidales



(b) Características triangulares



(c) Características de diente de sierra

Figura 4–20 Algunas características del detector de fase.

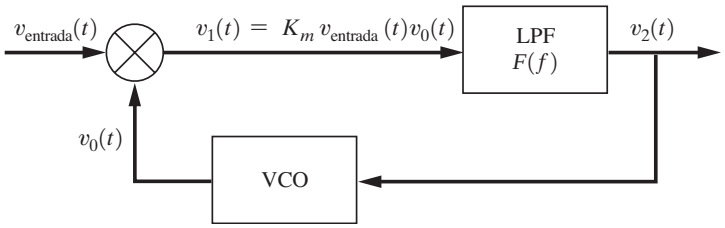


Figura 4–21 PLL analógico.

donde K_m es la ganancia del circuito multiplicador. El término de la suma de frecuencias no pasa a través del LPF, así que la salida de éste es

$$v_2(t) = K_d[\text{sen } \theta_e(t)] * f(t) \tag{4–96}$$

donde

$$\theta_e(t) \triangleq \theta_i(t) - \theta_0(t) \tag{4–97}$$

$$K_d = \frac{K_m A_i A_0}{2} \tag{4–98}$$

y $f(t)$ es la respuesta de impulso del LPF. $\theta_e(t)$ se conoce como *error de fase*. K_d es la constante del PD equivalente, la cual, para un PD del tipo multiplicador, depende de los niveles de la señal de entrada A_i y del nivel de la señal del VCO A_0.

La ecuación general que describe la operación del PLL puede obtenerse tomando las derivadas de las ecuaciones (4-94) y (4-97) y combinando el resultado mediante la ecuación (4-96). La ecuación no lineal resultante que describe al PLL se convierte en

$$\frac{d\theta_e(t)}{dt} = \frac{d\theta_i(t)}{dt} - K_d K_v \int_0^t [\text{sen } \theta_e(\lambda)]\, f(t-\lambda)\, d\lambda \tag{4–99}$$

donde $\theta_e(t)$ es el término desconocido y $\theta_i(t)$ la función de forzado.

En lo general esta función es difícil de resolver. Sin embargo, es posible reducirla a una ecuación lineal si la ganancia K_d es grande, de tal manera que el lazo se enganche y exista un pequeño error $\theta_e(t)$. En este caso, sen $\theta_e(t) \approx \theta_e(t)$, y la ecuación lineal que resulta es

$$\frac{d\theta_e(t)}{dt} = \frac{d\theta_i(t)}{dt} - K_d K_v \theta_e(t) * f(t) \tag{4–100}$$

La figura 4-22 muestra un diagrama de bloques basado en esta ecuación lineal. Este modelo lineal de PLL (figura 4-22) utiliza las *fases* de la señales de entrada y de salida del VCO en lugar de las señales mismas (figura 4-21). La función de transferencia de lazo cerrado $\Theta_0(f)/\Theta_i(f)$ es

$$H(f) = \frac{\Theta_0(f)}{\Theta_i(f)} = \frac{K_d K_v F(f)}{j2\pi f + K_d K_v F(f)} \tag{4–101}$$

donde $\Theta_0(f) = \mathcal{F}[\theta_0(t)]$ y $\Theta_i(f) = \mathcal{F}[\theta_i(t)]$. Por supuesto que son aplicables las técnicas de diseño y análisis usadas para la evaluación de sistemas de control con retroalimentación lineales, como los gráficos de Bode, los cuales indican tanto la ganancia como los márgenes de fase. De hecho, éstos son de extrema utilidad en la descripción del rendimiento de PLL *enganchados*.

La ecuación para el *rango de retención* puede obtenerse al examinar el comportamiento no lineal del PLL. Las ecuaciones (4-94) y (4-96) establecen que la desviación en frecuencia instantánea del VCO a partir de ω_0 es

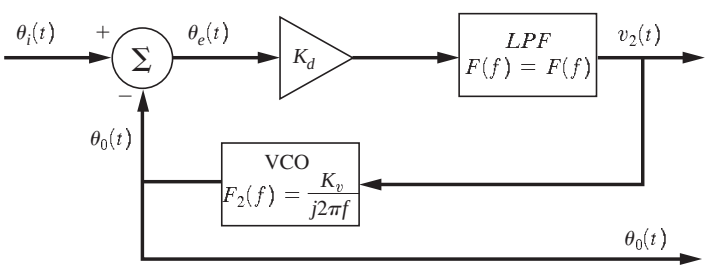


Figura 4–22 Modelo lineal de un PLL analógico.

$$\frac{d\theta_0(t)}{dt} = K_v v_2(t) = K_v K_d[\text{sen } \theta_e(t)] * f(t) \tag{4–102}$$

Un cambio muy lento a partir de f_0 en la frecuencia de entrada determina el rango de retención. En este caso la ganancia de DC del filtro es el parámetro de control y por tanto convierte a la ecuación (4-102) en

$$\Delta\omega = K_v K_d F(0) \text{ sen } \theta_e \tag{4–103}$$

Los valores máximo y mínimo de $\Delta\omega$ suministran el rango de retención y éstos se obtienen cuando sen $\theta_e = \pm 1$. Por ende, el máximo rango de retención, para el caso sin ruido, es

$$\Delta f_h = \frac{1}{2\pi} K_v K_d F(0) \tag{4–104}$$

La figura 4-23 ilustra una típica característica de enganche. La curva en sólido muestra la señal de control del VCO $v_2(t)$ conforme se barre una señal senoidal de prueba desde una baja hasta una alta frecuencia (donde la frecuencia de recorrido libre del VCO, f_0, está en la banda de barrido). La curva a rayas muestra el resultado cuando se barre de una alta a una baja frecuencia. La ecuación (4-104) describe la relación entre el rango de retención Δf_h y la ganancia de DC del PLL.

El *rango de enganche* Δf_p se determina principalmente a través de las características del filtro del lazo. Por ejemplo, suponga que el lazo no se ha enganchado y que la señal de prueba se barre lentamente hacia f_0. Entonces, a la salida del PD existirá una señal pulsante (oscilatoria) y su frecuencia $|f_{\text{entrada}} - f_0|$ variará desde un valor grande hasta uno pequeño conforme la frecuencia de la señal de prueba se barra hacia f_0. Así también, conforme la frecuencia de la señal de prueba se acerca a f_0, la forma de onda de la frecuencia pulsante se volverá asimétrica, en cuyo caso tendrá un valor de DC diferente de cero. Este valor de DC tiende a cambiar la frecuencia del VCO a la frecuencia de la señal de entrada, de tal manera que el lazo tiende a engancharse. El rango de enganche, Δf_p, al cual se engancha el lazo dependerá de cómo es exactamente que el filtro del lazo $F(f)$ procesa la salida del PD para producir la señal de control del VCO. Además, aun cuando la señal de entrada

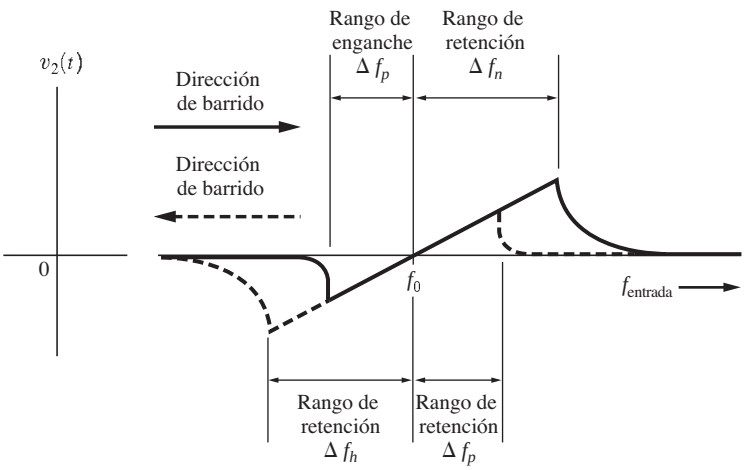


Figura 4–23 Voltaje de control para el VCO del PLL para un barrido de una señal senoidal de entrada.

esté dentro del rango de enganche, es posible que se lleve una cantidad considerable de tiempo para que el voltaje de control (salida del filtro) crezca a un valor lo suficientemente grande como para que ocurra el enganche. El análisis del fenómeno de enganche es complicado. En realidad, éste es estadístico por naturaleza, ya que depende de la relación inicial de las fases de las señales de entrada y del VCO y del ruido presente en el circuito. Por lo tanto, en la medición de Δf_p, pueden requerirse varias repeticiones de pruebas para obtener un valor típico.

El fenómeno de enganche no es único en los circuitos de PLL, sino que ocurre también en otros tipos de circuitos. Por ejemplo, si una señal externa se inyecta al puerto de salida de un oscilador (es decir, un oscilador simple, no un VCO), la señal del oscilador tenderá a cambiar su frecuencia y eventualmente se enganchará a la frecuencia de la señal externa si esta última se encuentra dentro del rango de enganche del oscilador. Este fenómeno se conoce como *inyección de enganche* o *sincronización* de un oscilador, y puede modelarse mediante un modelo de PLL [Couch, 1971].

El PLL tiene numerosas aplicaciones en los sistemas de comunicaciones, incluyendo (1) detección de FM, (2) generación de señales FM altamente estables, (3) detección coherente de AM, (4) multiplicación de frecuencia, (5) síntesis de frecuencia y (6) su utilización como bloque de construcción en sistemas digitales complicados para proporcionar sincronización de bit y detección de datos.

A continuación se encontrarán las condiciones requeridas para que el PLL se convierta en un detector de FM. Considerando la figura 4-21, asuma que la señal de entrada del PLL sea una señal FM. Esto es,

$$v_{\text{entrada}}(t) = A_i \operatorname{sen}\left[\omega_c t + D_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)\, d\lambda\right] \tag{4–105a}$$

donde

$$\theta_i(t) = D_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)\, d\lambda \tag{4–105b}$$

o

$$\Theta_i(f) = \frac{D_f}{j2\pi f} M(f) \tag{4–105c}$$

y $m(t)$ es la modulación de banda base (audio, por ejemplo) que se debe detectar. Se desea encontrar las condiciones tales que la salida del PLL, $v_2(t)$, sea proporcional a $m(t)$. Suponga que f_c está dentro del rango de captura (enganche) del PLL. Por ende, simplificando, sea que $f_0 = f_c$. Entonces el modelo PLL linealizado, como se muestra en la figura 4-22, puede emplearse para el análisis. Si se trabaja en el dominio de frecuencias se obtiene la salida

$$V_2(f) = \frac{\left(j\ \dfrac{2\pi f}{K_v}\right) F_1(f)}{F_1(f) + j\left(\dfrac{2\pi f}{K_v K_d}\right)} \Theta_i(f)$$

la cual, mediante el uso de la ecuación (4-105c), se convierte en

$$V_2(f) = \frac{\frac{D_f}{K_v}F_1(f)}{F_1(f) + j\left(\frac{2\pi f}{K_v K_d}\right)} M(f) \tag{4–106}$$

A continuación se encontrarán las condiciones para que $V_2(f)$ sea proporcional a $M(f)$. Suponga que el ancho de banda de la modulación es de B hertz y que $F_1(f)$ es un filtro pasabajas. Por tanto,

$$F(f) = F_1(f) = 1, \qquad |f| < B \tag{4–107}$$

Además, asumiendo que

$$\frac{K_v K_d}{2\pi} \gg B \tag{4–108}$$

Entonces la ecuación (4-106) se convierte en

$$V_2(f) = \frac{D_f}{K_v} M(f) \tag{4–109}$$

o

$$v_2(t) = Cm(t) \tag{4–110}$$

donde la constante de proporcionalidad es $C = D_f/K_v$. Por tanto, el circuito de PLL de la figura 4-21 se convertirá en un circuito detector de FM, donde $v_2(t)$ es la salida FM detectada cuando se satisfacen las ecuaciones (4-107) y (4-108).

En otra aplicación, el PLL puede ocuparse para suministrar la señal del oscilador coherente para una detección de producto de una señal AM (figura 4-24). Recuerde de las ecuaciones (4-92) y (4-93) que el VCO de un PLL se engancha 90° fuera de fase con respecto a la señal de entrada.[5] Entonces se requiere que $v_0(t)$ se desplace por −90° para que esté por fase con la portadora de la señal AM de entrada, el cual es el requisito para una detección coherente de AM, dada por la ecuación (4-77). En esta aplicación, el ancho de banda del LPF requiere ser lo suficientemente grande para proveer el rango de enganche necesario y que el VCO se enganche a la frecuencia de portadora f_c.

La figura 4-25 ilustra el uso de un PLL en un sintetizador de frecuencias, mismos que genera una señal periódica de frecuencia

$$f_{\text{salida}} = \left(\frac{N}{M}\right) f_x \tag{4–111}$$

donde f_x es la frecuencia del oscilador estable y N y M son los parámetros del divisor de frecuencia. Este resultado se verifica recordando que cuando el lazo se engancha, la señal de control de DC $v_3(t)$ desplaza la frecuencia del VCO de tal forma que $v_2(t)$ tendrá la misma frecuencia que $v_{\text{entrada}}(t)$. Por lo tanto,

[5] Esto resulta de la característica del circuito detector de fase. Esta declaración es correcta para un PD que produce un voltaje de salida de DC igual a cero cuando las dos señales de entrada del PD están 90° fuera de fase (es decir, un PD de tipo multiplicador). Sin embargo, si el circuito de PD produce una salida de DC igual a cero cuando las dos entradas del PD están en fase, entonces el VCO del PLL se enganchará con la señal de entrada del PLL.

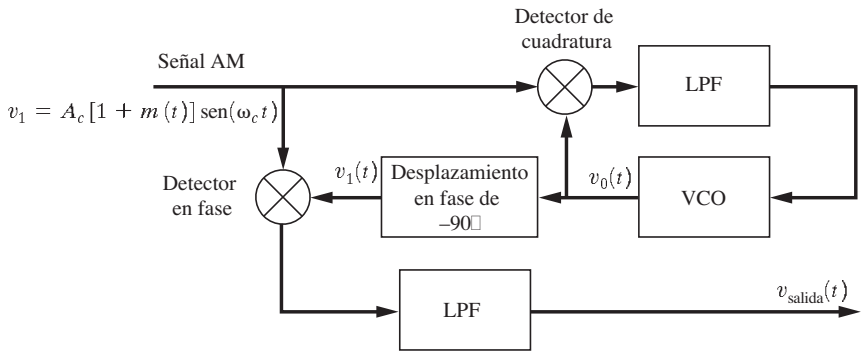


Figura 4–24 PLL utilizado para una detección coherente de AM.

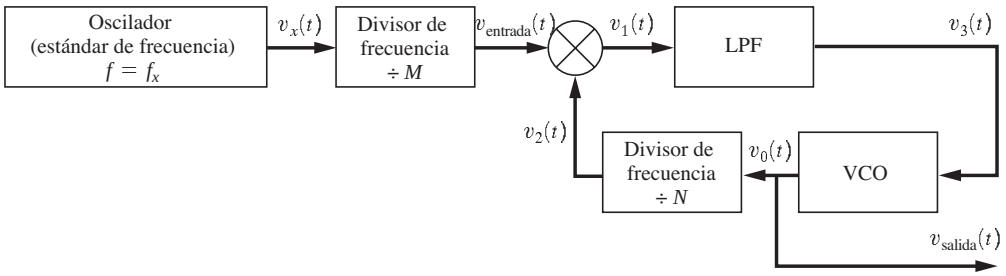


Figura 4–25 PLL utilizado en un sintetizador de frecuencias.

$$\frac{f_x}{M} = \frac{f_{\text{salida}}}{N} \tag{4–112}$$

lo cual es equivalente a la ecuación (4-111).

Los divisores clásicos de frecuencia emplean *valores enteros* para M y N. Aún más, si se ocupan divisores programables, la frecuencia de salida del sintetizador puede cambiarse utilizando software para programar un microprocesador para que seleccione los valores apropiados de M y N de acuerdo a la ecuación (4-111). Esta técnica se emplea en los sintetizadores de frecuencias que se incorporan en los receptores modernos con sintonización digital. (Consulte el problema de estudio SA4-6 para un ejemplo de diseño de un sintetizador de frecuencias.) Para el caso cuando $M = 1$, el sintetizador de frecuencias actúa como un multiplicador de frecuencias.

Valores no enteros equivalentes para N pueden obtenerse cambiando periódicamente el conteo en el divisor sobre un conjunto de valores enteros similares. Esto produce un valor promedio de N que es no entero y se conoce como técnica de *N fraccional*. En los sintetizadores de N fraccional el valor instantáneo de N cambia con el tiempo y puede modular la señal de salida del VCO para producir bandas laterales indeseadas (parásitas) en el espectro. Es factible reducir el ruido en la banda lateral a un bajo nivel mediante un diseño cuidadoso [Conkling, 1998]. Se pueden construir configuraciones para sintetizadores de PLL más complicados que incorporan mezcladores y osciladores adicionales.

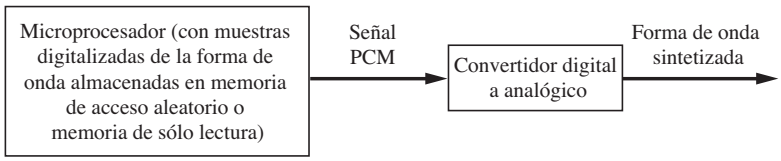

Microprocesador (con muestras digitalizadas de la forma de onda almacenadas en memoria de acceso aleatorio o memoria de sólo lectura)
Señal PCM
Convertidor digital a analógico
Forma de onda sintetizada

Figura 4–26 Síntesis digital directa (DDS).

4–15 SÍNTESIS DIGITAL DIRECTA

La *síntesis digital directa* (DDS, por sus siglas en inglés) es un método para generar una forma de onda deseada (por ejemplo, una onda seno) utilizando la técnica por computadora descrita en la figura 4-26. Para configurar el sistema DDS de tal manera que genere una forma de onda, las muestras de la forma de onda deseada se convierten en palabras PCM y se almacenan en la memoria (memoria de acceso aleatorio [RAM, por sus siglas en inglés] o memoria de sólo lectura [ROM, por sus siglas en inglés]) del sistema del microprocesador. El sistema DDS puede entonces generar la forma de onda deseada al "reproducir" las palabras almacenadas dentro del convertidor digital a analógico.

Esta técnica de DDS posee muchos atributos. Por ejemplo, si la forma de onda es periódica, como una onda senoidal, sólo se requiere almacenar en memoria un ciclo de muestras. La onda senoidal continua puede generarse si la memoria se recorre repetidamente. La frecuencia de la onda senoidal generada se determina por la velocidad a la cual se lee la memoria. Si se desea, el microprocesador puede programarse para generar cierta frecuencia durante cierto intervalo de tiempo y después cambiarse a una frecuencia diferente, u otra forma de onda, durante un intervalo de tiempo diferente. Además, se pueden generar salidas de funciones seno y coseno (de dos fases) simultáneamente si se agrega otro DAC. La relación señal a ruido de cuantización puede diseñarse para que sea tan grande como se desee si se selecciona el número adecuado de bits que se almacenan para cada palabra PCM, como se describe en la ecuación (3-18).

La técnica de DDS está reemplazando a los circuitos analógicos en muchas aplicaciones. Por ejemplo, en receptores de comunicaciones de alto valor, se emplea como sintetizador de frecuencias para generar señales del oscilador local que sintonizan al radio (consulte la sección 4-16). En los órganos de pipa electrónicos y los sintetizadores de música, se puede usar la DDS para generar sonidos tanto auténticos como extraños. Los fabricantes de instrumentos en la actualidad utilizan la DDS para producir formas de onda de salida para generadores de funciones y generadores de formas de onda arbitrarias (AWG, por sus siglas en inglés). Las compañías telefónicas emplean la DDS para generar tonos de marcación y señales de ocupado (consulte el capítulo 8).

4–16 TRANSMISORES Y RECEPTORES

Transmisores generalizados

Los transmisores generan la señal modulada a la frecuencia de portadora f_c para la señal moduladora $m(t)$. En las secciones 4-1 y 4-2 se demostró que cualquier tipo de señal modulada puede representarse mediante

$$v(t) = \text{Re}\{g(t)\ e^{j\omega_c t}\} \tag{4–113}$$

o, equivalentemente,

$$v(t) = R(t)\cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{4–114}$$

y

$$v(t) = x(t) \cos \omega_c t - y(t) \text{ sen } \omega_c t \tag{4–115}$$

donde la envolvente compleja

$$g(t) = R(t)\, e^{j\theta(t)} = x(t) + jy(t) \tag{4–116}$$

es una función de la señal moduladora $m(t)$. La relación en particular que se selecciona para $g(t)$ en términos de $m(t)$ define el tipo de modulación que se utiliza, como AM, SSB o FM (vea la tabla 4-1). Un enfoque generalizado puede tomarse para obtener modelos universales de transmisores que pueden reducirse a aquellos utilizados para un tipo en particular de modulación. También se verá que existen modelos equivalentes que corresponden a las diferentes configuraciones de circuitos, y sin embargo pueden usarse para producir el mismo tipo de señal modulada a sus salidas. Seleccionar un método de implementación que suministre el máximo rendimiento y al mismo tiempo minimice el costo es responsabilidad del diseñador, basado en los avances en el desarrollo de circuitos.

Existen dos formas canónicas para el transmisor generalizado, como se indica en las ecuaciones (4-114) y (4-115). La primera describe un tipo AM-PM de circuito, como se muestra en la figura 4-27. El circuito de procesamiento de señal de banda base generará $R(t)$ y $\theta(t)$ a partir de $m(t)$. Los términos R y θ son funciones de la señal moduladora $m(t)$, como se indica en la tabla 4-1 para el tipo de modulación deseada. El procesamiento de señales puede implementarse utilizando circuitos analógicos no lineales o una computadora digital que incorpore los algoritmos para R y θ bajo control por software. En la implementación que utiliza una computadora digital se requiere de un ADC a la entrada y dos DAC a la salida. El resto de la forma canónica AM-PM requiere circuitos de RF, como se indica en la figura.

La figura 4-28 ilustra la segunda forma canónica para el transmisor generalizado. Ésta usa procesamiento en fase y en cuadratura (IQ, por sus siglas en inglés). De manera similar, las fórmulas que relacionan a $x(t)$ y a $y(t)$ con $m(t)$ se muestran en la tabla 4-1, y el procesamiento de señales de banda base puede implementarse con hardware analógico o hardware digital con software. El resto de la forma canónica utiliza circuitos de RF como se indica.

De nuevo se enfatiza que cualquier tipo de modulación de señal (AM, FM, SSB, QPSK, etc.) puede generarse ocupando cualquiera de estas dos formas canónicas, las cuales separan convenientemente el procesamiento de banda base del de RF. Las técnicas digitales resultan de gran utilidad

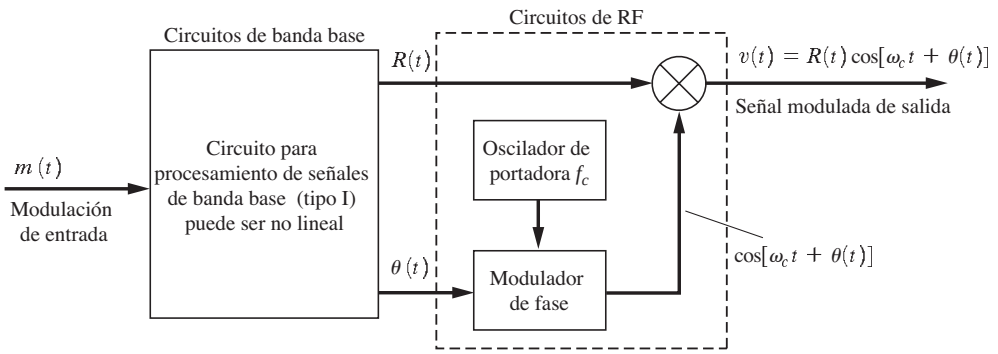

Circuitos de RF
Circuitos de banda base
R(t)
v(t) = R(t) cos[ω_c t + θ(t)]
Señal modulada de salida
m(t)
Modulación de entrada
Circuito para procesamiento de señales de banda base (tipo I) puede ser no lineal
Oscilador de portadora f_c
θ(t)
Modulador de fase
cos[ω_c t + θ(t)]

Figura 4–27 Transmisor generalizado utilizando la técnica de generación AM-PM.

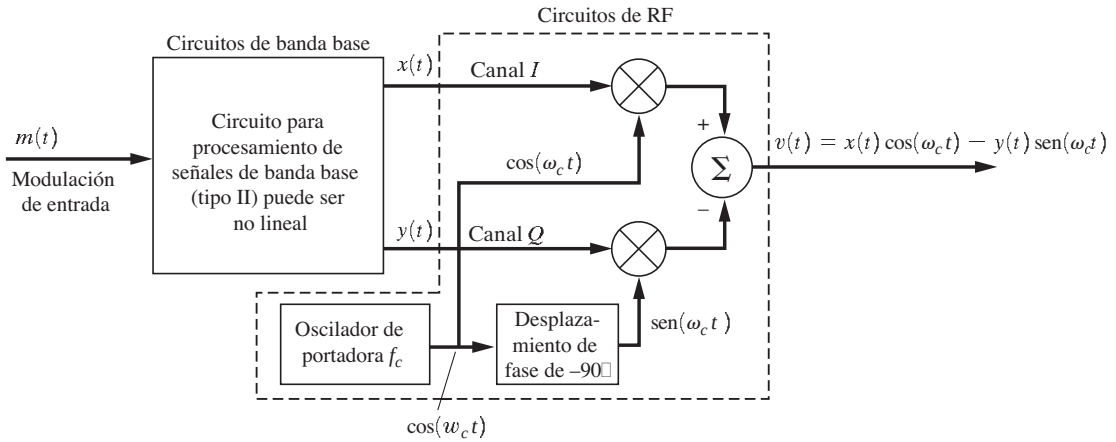


Figura 4–28 Transmisor generalizado utilizando la técnica de generación en cuadratura.

para llevar a cabo la porción del procesamiento de banda base. Aún más, si se emplean circuitos de computadora digital, cualquier tipo deseado de modulación puede obtenerse si se selecciona apropiadamente el algoritmo en software.

La mayoría de los transmisores prácticos actuales son variedades especiales de estas formas canónicas, pueden realizar las operaciones de RF a cierta baja frecuencia de RF conveniente y después hacer una conversión ascendente a la frecuencia deseada de operación. En el caso de las señales RF que no contienen AM, generalmente se requieren amplificadores de potencia para elevar a la potencia de salida al valor especificado. Si la señal RF no contiene variaciones en amplitud se pueden usar amplificadores de clase C, los cuales tienen una eficiencia relativamente alta□de otra manera se ocupan amplificadores de clase B.

Receptor generalizado: el receptor superheterodino

El receptor tiene la responsabilidad de extraer la información fuente de la señal modulada recibida que puede estar contaminada por ruido. A menudo se desea que la salida del receptor sea una réplica de la señal moduladora que estuvo presente a la entrada del transmisor. Existen dos clases principales de receptores: el *sintonizado a radiofrecuencia* (TRF, por sus siglas en inglés) y el *superheterodino*.

El receptor TRF consiste en un número de etapas pasabanda de RF de alta ganancia en cascada que se sintonizan a la frecuencia de portadora f_c, seguidos de un circuito detector adecuado, como un detector de envolvente, de producto, de FM, etc. El TRF no es muy popular porque es difícil diseñar etapas sintonizables a RF de tal manera que se pueda seleccionar la estación deseada y al mismo tiempo tener un ancho de banda estrecho para rechazar estaciones adyacentes. Además, es difícil obtener una ganancia alta a radiofrecuencias y tener un acoplamiento parásito lo suficientemente pequeño entre la salida y la entrada de la cadena amplificadora de RF para que la cadena no se convierta en un oscilador a f_c. El "conjunto de cristales" que construyen los Club Scouts en Estados Unidos es un ejemplo de un receptor TRF de una sola etapa de RF que no tiene ganancia en dicha etapa. Los receptores TRF a menudo se utilizan para medir características dispersivas de tiempo (múltiples trayectorias) de los canales de radio [Rappaport, 1989].

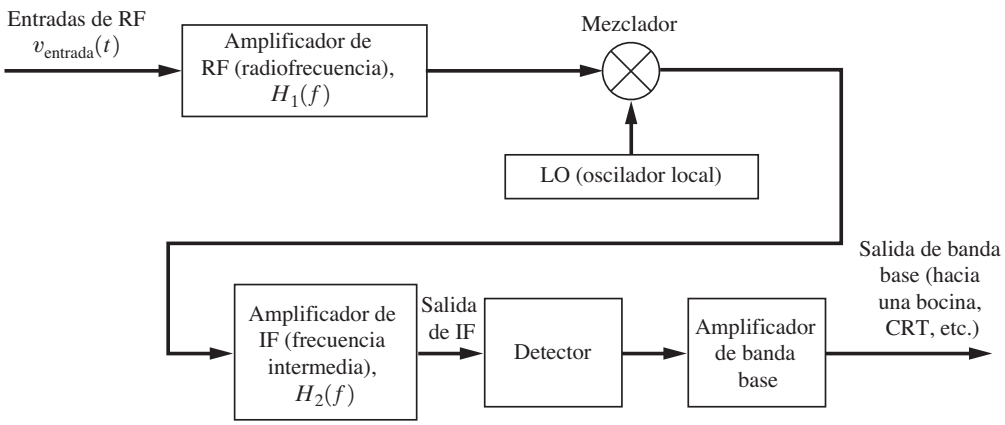


Figura 4–29 Receptor superheterodino.

La mayoría de los receptores emplean la técnica *superheterodino* de recepción, como se muestra en la figura 4-29. La técnica consiste en una conversión descendente o en una conversión ascendente de la señal de entrada a alguna banda de frecuencias conveniente, llamada banda de *frecuencia intermedia* (IF), y después extrae la información (o modulación) empleando el detector apropiado.[6] Esta estructura básica del receptor se usa para la recepción de todo tipo de señales pasabanda, como señales de televisión, FM, AM, satélite, celular y de radar. El amplificador de RF posee una característica pasabanda que pasa la señal deseada y proporciona una amplificación para anular cualquier ruido adicional generado durante la etapa del mezclador. La característica de filtro de RF también proporciona cierto rechazo de señales y ruido en canales adyacentes, pero el rechazo en el canal adyacente principal se realiza por el filtro de IF.

El filtro de IF es un filtro pasabanda que elige el componente ya sea de conversión ascendente o de conversión descendente (el cual es seleccionado por el diseñador del receptor). Cuando se escoge una conversión ascendente, la envolvente compleja de la salida del filtro de IF (pasabanda) es el mismo que la envolvente compleja para la entrada de RF, a excepción del filtrado de RF, $H_1(f)$, y el filtrado de IF, $H_2(f)$. Sin embargo, si se utiliza la conversión descendente con $f_{LO} > f_c$, la envolvente compleja a la salida de IF será el conjugado para la entrada de RF [vea la ecuación (4-61c)]. Esto significa que las bandas laterales de la salida de IF se invertirán (es decir, la banda lateral superior en la entrada de RF se convertirá en la banda lateral inferior, etc., en la salida de IF). Si $f_{LO} < f_c$, las bandas laterales no se invierten.

La frecuencia central para el amplificador de IF se escoge con base en tres consideraciones:

- La frecuencia IF debe ser tal que se pueda alcanzar un amplificador de IF con una alta ganancia estable de la manera más económica posible.
- La frecuencia IF requiere ser lo suficientemente baja para que, con elementos prácticos de circuito en los filtros de IF, se puedan alcanzar valores de Q que proporcionen una característica de atenuación descendente fuera del ancho de banda de la señal de IF. Esto reduce el ruido y minimiza la interferencia de canales adyacentes.

[6] También puede construirse receptores superheterodinos de *conversión dual*, en los cuales un segundo mezclador y una segunda etapa de IF siguen de la primera etapa de IF mostrada en la figura 4-29.

- La frecuencia IF requiere ser lo suficientemente alta para que la respuesta de imagen del receptor pueda ser aceptablemente pequeña.

La *respuesta de imagen* es la recepción de una señal indeseada ubicada en la frecuencia de imagen debida a una atenuación insuficiente de la señal de imagen por el filtro amplificador de RF. La respuesta de imagen puede ilustrarse mejor mediante un ejemplo.

Ejemplo 4–2 RECEPTOR SUPERHETERODINO DE AM POR DIFUSIÓN

Suponga que una banda de radiodifusión de AM se sintoniza para recibir una estación a 850 kHz y que la frecuencia del LO se localiza en el lado alto de la frecuencia de portadora. Si la frecuencia de IF es de 455 kHz, la frecuencia del LO será de 850 + 455 = 1,305 kHz (vea la figura 4-30). Aún más, suponga que otras señales están presentes a la entrada de RF de la radio y, en particular, que existe una señal a 1,760 kHz. Esta señal se reducirá por conversión por el mezclador a 1,760 – 1,305 = 455 kHz. Es decir, la señal indeseada (1,760 kHz) se convertirá a 455 kHz. Esta señal *indeseada* que se ha convertido a la banda de IF se conoce como *señal de imagen*. Si la ganancia del amplificador de RF decae por lo menos 25 dB a 1,760 kHz en comparación con la ganancia a 850 kHz, y si la señal indeseada es 25 dB más fuerte a la entrada del receptor que la deseada, entonces ambas tendrán el mismo nivel cuando se conviertan a la IF. En este caso, la señal indeseada definitivamente interferirá con la deseada en el proceso de detección.

Para convertidores reductores (es decir, $f_{IF} = |f_c - f_{LO}|$), la frecuencia de imagen es

$$f_{\text{imagen}} = \begin{cases} f_c + 2f_{IF}, & \text{si } f_{LO} > f_c \quad \text{(Inyección al lado superior)} \\ f_c - 2f_{IF}, & \text{si } f_{LO} < f_c \quad \text{(inyección al lado inferior)} \end{cases} \tag{4–117a}$$

donde f_c es la frecuencia de RF deseada, f_{IF} la frecuencia de IF y f_{LO} la frecuencia del oscilador local. Para los convertidores elevadores (es decir, $f_{IF} = f_c + f_{LO}$), la frecuencia de imagen es

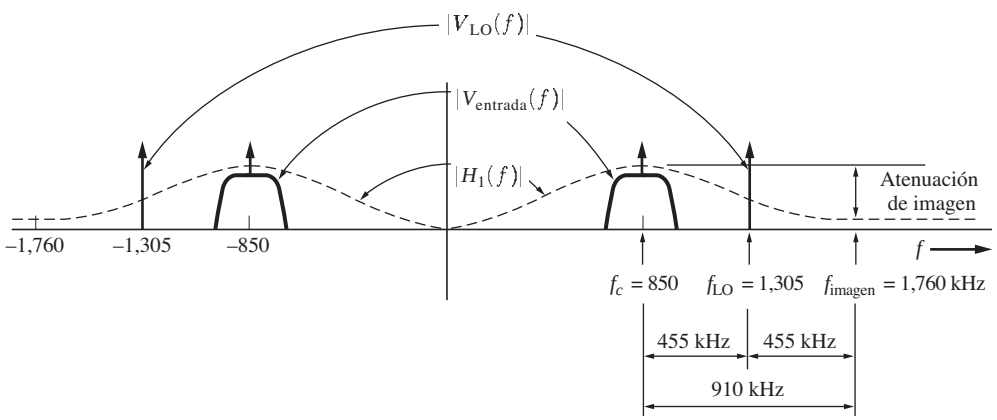


Figura 4–30 Espectros de las señales y de la función de transferencia de un amplificador de RF en un receptor superheterodino.

TABLA 4–4 ALGUNAS FRECUENCIAS DE IF POPULARES EN ESTADOS UNIDOS.

Frecuencia de IF	Aplicación
262.5 kHz	Radiodifusión de AM (en automóviles)
455 kHz	Radiodifusión de AM
10.7 MHz	Radiodifusión de FM
21.4 MHz	Radios bidireccionales de FM
30 MHz	Receptores de radar
43.75 MHz (portadora de video)	Televisores
60 MHz	Receptores de radar
70 MHz	Receptores de satélite

$$f_{\text{imagen}} = f_c + 2f_{\text{LO}} \tag{4–117b}$$

En la figura 4-30 puede observarse que la respuesta de imagen a menudo se reducirá si la frecuencia de IF aumenta, ya que f_{imagen} ocurrirá lejos del pico principal (o lóbulo) de la característica de filtro de RF, $|H_1(f)|$.

Si recuerda la discusión anterior acerca de los mezcladores podrá darse cuenta que ocurrirán otras respuestas parásitas, además de la respuesta de imagen, en los circuitos prácticos de mezcladores, mismas que también deben considerarse en un buen diseño de receptores.

La tabla 4-4 ilustra algunas frecuencias de IF típicas que se han vuelto estándares de facto. La frecuencia de IF para la aplicación deseada es lo suficientemente baja como para que el filtro de IF proporcione un buen rechazo de señal en canales adyacentes cuando se utilizan elementos de circuito con una Q realizable□no obstante, la frecuencia de IF es lo suficientemente grande como para proporcionar un rechazo adecuado de señal de imagen a través del filtro amplificador de RF.

El tipo de detector seleccionado para su uso en el receptor heterodino depende de la aplicación deseada. Por ejemplo, se puede utilizar un detector de producto en un sistema PSK (digital) y se emplea un detector de envolvente en los receptores de difusión por AM. Si se desea la envolvente compleja $g(t)$ para la detección generalizada de señales o para una óptima recepción en sistemas digitales, los componentes $x(t)$ y $y(t)$ en cuadratura, donde $x(t) + jy(t) = g(t)$, pueden obtenerse con detectores de producto en cuadratura, como se ilustra en la figura 4-31□$x(t)$ y $y(t)$ pueden alimentarse de un procesador de señales para extraer la información de modulación. Ignorando los efectos del ruido, el procesador de señales puede recuperar $m(t)$ a partir de $x(t)$ y de $y(t)$ (y, en consecuen-

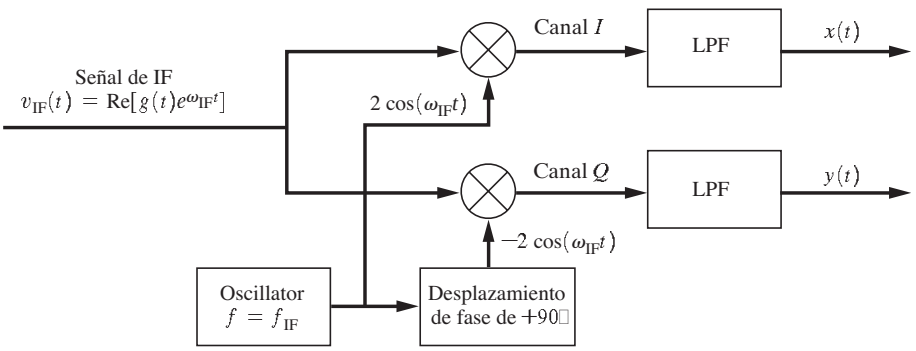


Figura 4–31 Detector de IQ (en fase y fase en cuadratura).

cia, demodulará la señal de IF) ocupando la inversa de las funciones de generación de envolvente compleja presentadas en la tabla 4-1.

El receptor superheterodino posee muchas ventajas y algunas desventajas. La ventaja principal es que se puede obtener una ganancia extraordinariamente alta sin inestabilidad (autooscilación). El acoplamiento parásito entre la salida del receptor y la entrada no genera oscilación debido a que la ganancia se obtiene en bandas de frecuencia desarticuladas, es decir, RF, IF y banda base. Es posible sintonizar fácilmente el receptor a otra frecuencia si se cambia la frecuencia de la señal del LO, la cual puede suministrarse mediante un sintetizador de frecuencias, y si se sintoniza la banda de paso del amplificador de RF a la frecuencia deseada. Aún más, sólo se requieren elementos con una Q alta en el amplificador de IF sintonizado a una frecuencia fija, donde dichos elementos se necesitan para producir bordes descendentes en el filtro y para el rechazo de canales adyacentes. La principal desventaja del receptor superheterodino es la respuesta a las señales parásitas que ocurrirán si no se tiene cuidado con el diseño.

Receptores de IF en cero

Cuando la frecuencia del LO de un receptor superheterodino se selecciona para que ésta sea la frecuencia de portadora ($f_{LO} = f_c$) entonces $f_{IF} = 0$ y el receptor superheterodino se convierte en un receptor de *IF en cero* o de *conversión directa*.[7] En este caso, el filtro de IF se convierte en un filtro pasabajas (LPF). Esta combinación de un mezclador con un LPF funciona como un detector de producto (y no se requiere de la etapa del detector en la figura 4-29). Un convertidor descendente en cuadratura puede también añadirse de tal forma que se puedan recuperar los componentes $x(t)$ y $y(t)$ de la envolvente compleja. En este caso el receptor de IF en cero resulta en un diagrama de bloques como el que se muestra en la figura 4-31, donde la señal de entrada se encuentra en f_c y ω_c reemplaza a ω_{IF} en la figura. Los componentes $x(t)$ y $y(t)$ pueden muestrearse y digitalizarse con un ADC de tal manera que la envolvente compleja, $g(t) = x(t) + jy(t)$, pueda procesarse digitalmente mediante hardware para DSP, el cual se discute en la sección 4-17. El LPF analógico actúa como filtro de antialiasing para el muestreador y el hardware para DSP. El receptor de IF en cero es también parecido a un receptor TRF con detección de producto.

Los receptores de IF en cero poseen varias ventajas. No tienen respuesta de imagen. El mismo hardware para el receptor de IF en cero puede utilizarse en muchas aplicaciones distintas para una manufactura económica. Debido a que se utiliza hardware de DSP, las características pasabanda de RF efectivas y las del detector se determinan mediante software para DSP (consulte la siguiente sección). El software puede cambiarse fácilmente para satisfacer la aplicación deseada. El mismo hardware de IF con cero puede emplearse en receptores a diferentes bandas de VHF y UHF si se selecciona la frecuencia del LO adecuada ($f_{LO} = f_c$) y si se sintoniza el filtro inicial, generalmente un circuito sintonizado a una sola frecuencia, a f_c.

El receptor de IF en cero posee la desventaja de una posible fuga de radiación del LO a través del puerto de entrada de antena debido a la vía de paso del mezclador. A su vez existirá un desplazamiento de *DC* en la salida del mezclador si existe una fuga en el LO a la entrada de antena, ya que una onda senoidal (señal del LO) multiplicada por sí misma produce un término de DC, además de una segunda armónica fuera de banda. Estos problemas se minimizarán con un mezclador balanceado de alta calidad y un blindaje en el LO. El receptor puede también poseer una figura pobre de ruido, ya que la circuitería de entrada generalmente no es una etapa de alta ganancia con bajo ruido. Como en cualquier otro receptor, el hardware debe diseñarse cuidadosamente para que exista un rango dinámico suficiente y prevenir que señales fuertes sobrecarguen al receptor, lo cual produce señales parásitas debido a las características no lineales, y que al mismo tiempo tenga una ganancia

[7] El receptor de conversión directa también se conoce como *receptor homodino* o *sincrodino*.

suficiente para la detección de señales débiles. A pesar de estas dificultades, el receptor de IF en cero proporciona una solución económica y de alto rendimiento para muchas aplicaciones. Un receptor de IF en cero práctico con una excelente selectividad suministrada por un filtrado basado en DSP se describe en QST [Frohne, 1998].

Interferencia

Una discusión sobre receptores no está completa si no se consideran algunas de las causas de *interferencia*. A menudo el dueño del receptor piensa que una cierta señal, por ejemplo una de un radioaficionado, es la causa del problema. Esto puede o no ser el caso. El origen de la interferencia puede encontrarse en cualquiera de estas ubicaciones:

- En la *fuente* de la señal de interferencia, un transmisor puede generar componentes de señal fuera de banda, como las armónicas, que caen dentro de la banda de la señal deseada.
- En el *receptor* mismo, la circuitería de entrada puede sobrecargarse o producir respuestas parásitas. La sobrecarga ocurre cuando la etapa de RF o del mezclador en el receptor se lleva al rango no lineal debido a la señal de interferencia y esta no linealidad causa una modulación cruzada en la señal deseada a la salida del amplificador de RF en el receptor.
- En el *canal*, una no linealidad en el medio de transmisión puede causar componentes indeseados de señal en la banda de la señal deseada.

Para ahondar en el diseño y ejemplos de circuitos prácticos de receptores se invita al lector a consultar el *ARRL Handbook* [ARRL, 2004].

4–17 SOFTWARE RADIO

El software radio hace uso de arquitecturas de hardware para DSP, microprocesadores, IC digitales especializados y software para producir señales moduladas para su transmisión (vea la tabla 4-1 y la figura 4-28) y para demodular señales en el receptor. Por último, el receptor por software ideal muestreará y digitalizará las señales recibidas en la antena mediante una conversión digital a analógica (ADC) y procesará la señal en el hardware de procesamiento de señales digitales (DSP, por sus siglas en inglés). El software se utilizará para calcular la salida del receptor. La dificultad con este enfoque es que es casi imposible construir arquitecturas de hardware de ADC/DSP que opere lo suficientemente rápido para procesar directamente las señales moduladas de banda ancha con frecuencias de portadora en gigahertz [Baines, 1995]. Sin embargo, la envolvente compleja de estas señales puede obtenerse usando un receptor heterodino con detectores de cuadratura (figura 4-31). Para un ancho de banda pasabanda modesto, por ejemplo de 25 MHz, los componentes I y Q, $x(t)$ y $y(t)$, de la envolvente compleja, pueden muestrearse y procesarse con hardware práctico de DSP de tal forma que se puede ocupar la programación por software.

En otro enfoque, es factible emplear un ADC de alta velocidad para suministrar muestras de la señal de IF que se pasan a un circuito integrado de *convertidor reductor digital* (DDC, por sus siglas en inglés), por ejemplo, Intersil o HSP50016 [Chester, 1999]. El DDC multiplica las muestras de IF por muestras de señales cosenoidales y senoidales del LO. Esto realiza una conversión descendente de las muestras de IF a muestras I y Q de banda base. El DDC utiliza tablas de búsqueda en ROM para obtener las muestras del coseno y seno del LO, el cual es un método similar al de la técnica de síntesis digital directa (DDS) discutida en la sección 4-15. Para recibir múltiples señales de canales adyacentes simultáneamente se pueden usar múltiples IC de DDC en paralelo con el LO para cada DDC sintonizado a la frecuencia apropiada para reducir por conversión la señal a muestras

I y *Q* de banda base para dicha señal (para mayores detalles visite el sitio Web de Intersil en http://www.intersil.com).

Las muestras *I* y *Q* de la envolvente compleja, $g(t) = x(t) + jy(t)$ pueden filtrarse para proporcionar un filtrado pasabanda de IF equivalente, como se describió en la sección 4-5. El filtrado puede resultar en excelentes características del filtro de IF equivalentes con bordes rígidos para un rechazo superior de interferencia por canales adyacentes. La característica del filtro puede cambiarse fácilmente si el software se modifica. El filtrado de coseno realzado se utiliza a menudo para reducir el ancho de banda de transmisión de señales digitales sin introducir ISI. Para minimizar los errores en bits debido al ruido en el canal, así como la eliminación de la ISI, se utiliza un filtro de coseno realzado de raíz cuadrática tanto en el transmisor como en el receptor, como se muestra en la ecuación (3-78) de la sección 3-6.

La detección de AM y PM se logra mediante los componentes *I* y *Q* filtrados para calcular la magnitud y la fase de la envolvente compleja, como lo muestran las ecuaciones (4-4a) y (4-4b), respectivamente. La detección de FM se obtiene calculando la derivada de la fase, como se muestra en la ecuación (4-8).

La transformada de Fourier también puede usarse en software radio, ya que la FFT puede calcularse eficientemente con IC de DSP. Por ejemplo, el espectro de la FFT puede ocuparse para determinar la presencia o ausencia de señales de canales adyacentes. Entonces, un proceso por software apropiado puede mejorar o rechazar una señal en particular, como se desee en alguna aplicación en particular. La FFT puede también emplearse para detectar simultáneamente los datos en un gran número de portadoras moduladas separadas ligeramente una de otra. Para profundizar en el tema vea la sección 5-12 sobre OFDM.

El concepto de software radio posee muchas ventajas. Una de ellas es que el mismo hardware se puede utilizar para muchos tipos distintos de radios, ya que el software distingue entre un tipo y otro. Otra es que, una vez vendidos los esquemas basados en software radio, se pueden actualizar para incluir los últimos protocolos y características descargando nuevas versiones del software. El concepto software radio se vuelve más económico y práctico cada día. Este es el "camino hacia el futuro". Si desea más información sobre el diseño práctico por medio de software radio y de circuitos consulte el capítulo 16 del *2005 ARRL Handbook* [ARRL, 2004]. Puede también visitar el sitio http://www.flex-radio.com.

4–18 Resumen

En este capítulo se estudiaron las técnicas básicas empleadas en la señalización pasabanda. La técnica de la envolvente compleja para representar señales y filtros pasabanda mostró ser de gran utilidad. Se describieron circuitos de comunicaciones con un análisis de sus salidas para filtros, amplificadores, limitadores, mezcladores, multiplicadores de frecuencia, lazos enganchados por fase y circuitos detectores. Se emplearon técnicas de análisis de circuitos lineales y no lineales. Se encontró que el circuito receptor superheterodino es fundamental en el diseño de receptores en la comunicación. Se estudiaron los transmisores generalizados, así como los receptores y software radio. Se examinaron los aspectos prácticos de su diseño, como las técnicas para la evaluación de señales parásitas.

4–19 PROBLEMAS DE ESTUDIO

SA4–1 Espectro de voltaje para una señal AM Una señal AM de voltaje $s(t)$ con una frecuencia de portadora de 1,150 kHz tiene una envolvente compleja $g(t) = A_c[1 + m(t)]$. $A_c = 500$ V y la modulación es un tono senoidal de prueba de 1 kHz descrito por $m(t) = 0.8 \operatorname{sen}(2\pi 1{,}000t)$. Evalúe el espectro de voltaje para esta señal AM.

Solución. Utilizando la definición de una onda senoidal de la sección A-1,

$$m(t) = \frac{0.8}{j2}\left[e^{j2\pi 1000t} - e^{-j2\pi 1000t}\right] \tag{4–118}$$

Utilizando la ecuación (2-26) con la ayuda de la sección A-5 se encuentra que la transformada de Fourier de $m(t)$ es[8]

$$M(f) = -j\ 0.4\ \delta(f-1{,}000) + j\ 0.4\ \delta(f+1{,}000) \tag{4–119}$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación (4-20a) resulta en el espectro de voltaje de la señal AM:

$$\begin{aligned} S(f) &= 250\ \delta(f-f_c) - j100\ \delta(f-f_c-1{,}000) + j100\ \delta(f-f_c+1{,}000) \\ &\quad + 250\ \delta(f+f_c) - j100\ \delta(f+f_c-1{,}000) + j100\ \delta(f+f_c+1{,}000) \end{aligned} \tag{4–120}$$

SA4–2 PSD para una señal AM Calcule la PSD para la señal AM que se describió en el problema SA4-1.

Solución. Empleando la ecuación (2-71) se obtiene la autocorrelación para la modulación senoidal $m(t)$, en otras palabras,

$$R_m(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\omega_0\tau = \frac{A^2}{4}\left[e^{j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau}\right] \tag{4–121}$$

donde $A = 0.8$ y $\omega_0 = 2\pi 1{,}000$. Considerando la transformada de Fourier mediante la ecuación (2-26) se obtiene la PSD de $m(t)$:[9]

$$\mathcal{P}_m(f) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$$

o

$$\mathcal{P}_m(f) = 0.16\left[\delta(f-1{,}000) + \delta(f+1{,}000)\right] \tag{4–122}$$

La autocorrelación para la envolvente compleja de la señal AM es

$$\begin{aligned} R_g(\tau) &= \langle g^*(t)\, g(t+\tau)\rangle = A_c^2\,\langle[1+m(t)][1+m(t+\tau)]\rangle \\ &= A_c^2\left[\langle 1\rangle + \langle m(t)\rangle + \langle m(t+\tau)\rangle + \langle m(t)\, m(t+\tau)\rangle\right] \end{aligned}$$

Pero $\langle 1\rangle = 1$, $\langle m(t)\rangle = 0$, $\langle m(t+\tau)\rangle = 0$, y $\langle m(t)\, m(t+\tau)\rangle = R_m(\tau)$. Por lo tanto,

$$R_g(\tau) = A_c^2 + A_c^2 R_m(\tau) \tag{4–123}$$

Tomando la transformada de Fourier de ambos lados de la ecuación (4-123) se obtiene que

$$\mathcal{P}_g(f) = A_c^2\,\delta(f) + A_c^2\,\mathcal{P}_m(f) \tag{4–124}$$

Sustituyendo la ecuación (4-124) dentro de la ecuación (4-13), y con la ayuda de la (4-122), se obtiene la PSD para la señal AM:

[8] Debido a que $m(t)$ es periódica, la ecuación (2-109) presenta un método alternativo para la evaluación de $M(f)$, donde $c_{-1} = j0.4$, $c_1 = -j0.4$ y los otros términos c_n son iguales a cero.

[9] Debido a que $m(t)$ es periódica, la ecuación (2-126) puede emplearse como método alternativo para la evaluación de $\mathcal{P}_m(f)$. Esto es, la ecuación (4-122) se obtiene a partir de la ecuación (2-126) con $c_1 = c_{-1}^* = A/(2j) = -j0.8/2 = -j0.4$, y los otros términos c_n son iguales a cero.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_s(f) &= 62{,}500\,\delta(f-f_c) + 10{,}000\,\delta(f-f_c-1{,}000)\\ &\quad + 10{,}000\,\delta(f-f_c+1{,}000) + 62{,}500\,\delta(f+f_c)\\ &\quad + 10{,}000\,\delta(f+f_c-1{,}000) + 10{,}000\,\delta(f+f_c+1{,}000)\end{aligned} \tag{4–125}$$

(*Nota*: se sabe que esta PSD pasabanda para $s(t)$ se encuentra mediante la traslación (es decir, el movimiento) de la PSD de banda base de $g(t)$ hacia arriba hasta f_c y hacia abajo hasta $-f_c$. Aún más, para el caso de AM, la PSD de $g(t)$ consiste en la PSD para $m(t)$, además de la superposición de una función delta a $f = 0$).

SA4–3 Potencia promedio para una señal AM Suponga que la señal AM de voltaje $s(t)$, como se describe en el problema SA4-1, aparece a través de una carga resistiva de 50 Ω. Calcule la potencia promedio actual que se disipa en la carga.

Solución. De la ecuación (4-21) se sabe que la potencia promedio normalizada es

$$\begin{aligned}(P_s)_{\text{norm}} &= (V_s)^2_{\text{rms}} = \tfrac{1}{2}\,A_c^2\,[1 + (V_m)^2_{\text{rms}}]\\ &= \tfrac{1}{2}\,(500)^2\left[1 + \left(\frac{0.8}{\sqrt{2}}\right)\right]^2 = 165\text{ kW}\end{aligned} \tag{4–126a}$$

Nota: un método alternativo para obtener $(P_s)_{\text{norm}}$ es calcular el área debajo de la PDF para $s(t)$. Esto es, empleando la ecuación (4-125),

$$(P_s)_{\text{norm}} = (V_s)^2_{\text{rms}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_s(f)\,df = 165\text{ kW} \tag{4–126b}$$

Ocupando la ecuación (4-126a) o la (4-126b) se obtiene la potencia promedio actual disipada en la carga de 50 Ω:[10]

$$(P_s)_{\text{actual}} = \frac{(V_s)^2_{\text{rms}}}{R_L} = \frac{1.65 \times 10^5}{50} = 3.3\text{ kW} \tag{4–127}$$

SA4–4 PEP para una señal AM Si la señal de AM de voltaje del problema SA4-1 aparece a través de una carga resistiva de 50 Ω, calcule la potencia pico de la envolvente actual (PEP).

Solución. Utilizando la ecuación (4-18) se obtiene que la PEP normalizada es:

$$\begin{aligned}(P_{\text{PEP}})_{\text{norm}} &= \tfrac{1}{2}\,[\text{máx}\,|g(t)|]^2 = \tfrac{1}{2}\,A_c^2[1 + \text{máx}\,m(t)]^2\\ &= \tfrac{1}{2}\,(500)^2\,[1 + 0.8]^2 = 405\text{ kW}\end{aligned} \tag{4–128}$$

Entonces la PEP actual para esta señal de AM de voltaje con una carga de 50 Ω es

$$(P_{\text{PEP}})_{\text{actual}} = \frac{(P_{\text{PEP}})_{\text{norm}}}{R_L} = \frac{4.05 \times 10^5}{50} = 8.1\text{ kW} \tag{4–129}$$

SA4–5 Métodos de muestreo para señales pasabanda Suponga que se muestreará una señal pasabanda $s(t)$ y que las muestras se almacenarán para su procesamiento más tarde. La figura 4-32a muestra que esta señal pasabanda tiene un ancho de banda de B_T centrado alrededor de f_c, donde $f_c \gg B_T$ y B_0.

[10] Si $s(t)$ es una señal de corriente, en lugar de una señal de voltaje, entonces $(P_s)_{\text{actual}} = (I_s)^2_{\text{rms}} R_L$.

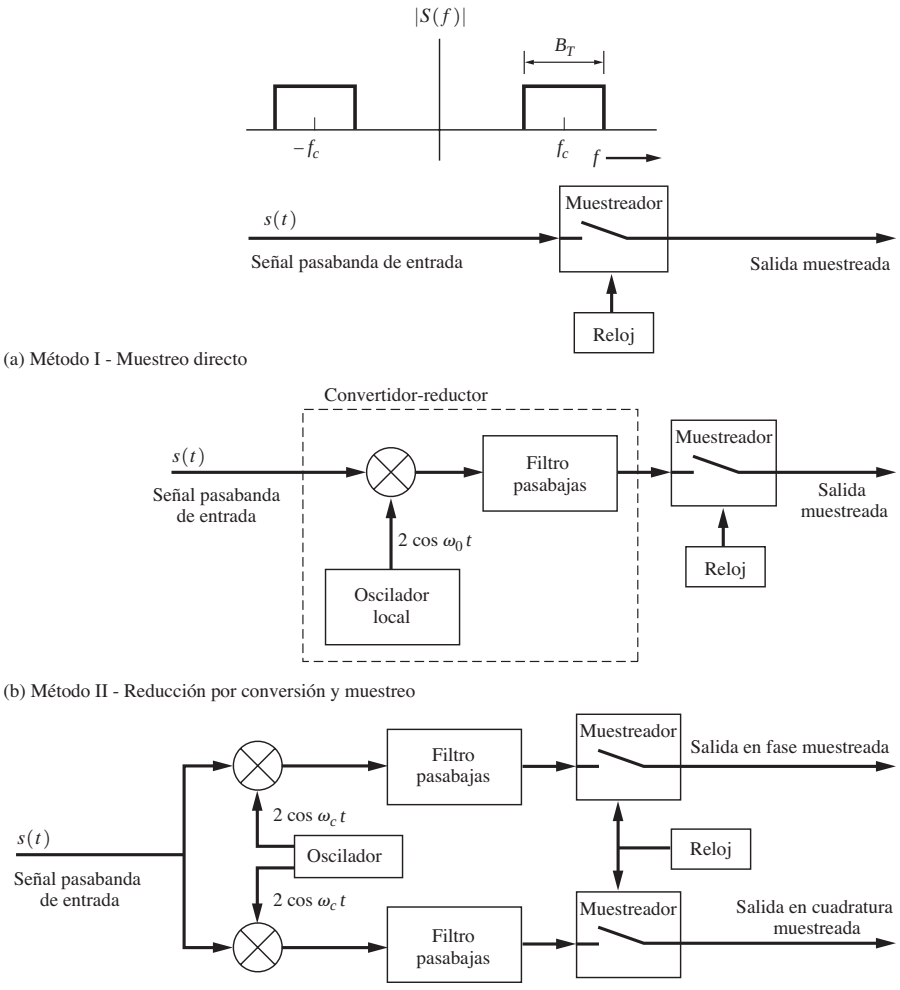


Figura 4–32 Tres métodos para el muestreo de señales pasabanda.

La señal $s(t)$ se muestreará usando cualquiera de los métodos mostrados en la figura 4-22.[11] Para cada método de muestreo, determine la mínima frecuencia de muestreo (es decir, la mínima frecuencia de reloj) requerida y discuta las ventajas y desventajas de cada uno.

Solución.

Método I Considerando la figura 4-32a se observa que el método I utiliza el muestreo directo, como se describió en el capítulo 2. De la ecuación (2-168), la mínima frecuencia de muestreo es $(f_s)_{\text{mín}} = 2B$,

[11] Se agradece al profesor Christopher S. Anderson, del Department of Electrical and Computer Engineering, University of Florida, por sugerir el método II.

donde B es la frecuencia más alta en la señal. Para esta señal pasabanda, la frecuencia más alta es de $B = f_c + B_T/2$. Por lo tanto, para el método I, la mínima frecuencia de muestreo es

$$(f_s)_{\text{mín}} = 2f_c + B_T \qquad \text{Método I} \tag{4–130}$$

Por ejemplo, si $f_c = 100$ MHz y $B_T = 1$ MHz, se requerirá de una mínima frecuencia de muestreo de $(f_s)_{\text{mín}} = 201$ MHz.

Método II Considerando la figura 4-32b, se puede observar que el método II convierte a frecuencias mas bajas la señal pasabanda a una de IF, de tal forma que la frecuencia más alta que se debe muestrear se ve drásticamente reducida. Por una máxima reducción en la frecuencia más alta se selecciona[12] una frecuencia para el oscilador local de $f_0 = f_c - B_T/2$. La frecuencia más alta en la señal reducida, a la entrada del muestreador, es de $B = (f_c + B_T/2) - f_0 = f_c + B_T/2 - f_c + B_T/2 = B_T$, y la frecuencia más baja, en la parte positiva de frecuencia de la señal reducida, es de $(f_c - B_T/2) - f_0 = f_c - B_T/2 - f_c + B_T/2 = 0$. Utilizando la ecuación (2-168) se encuentra que la mínima frecuencia de muestreo es

$$(f_s)_{\text{mín}} = 2B_T \qquad \text{Método II} \tag{4–131}$$

cuando se selecciona una frecuencia del LO de $f_0 = f_c - B_T/2$. Para esta selección de frecuencia del LO, el filtro pasabanda se convierte en un filtro pasabajas con una frecuencia de corte de B_T. Note que el método II resulta en una reducción drástica en la frecuencia de muestreo, la cual es una ventaja, en comparación al método I. Por ejemplo, si $f_c = 100$ MHz y $B_T = 1$ MHz, la mínima frecuencia de muestreo sería ahora $(f_s)_{\text{mín}} = 2$ MHz en lugar de los 201 MHz requeridos en el método I. Sin embargo, el método II requiere de un convertidor descendente de frecuencias, lo cual es una desventaja. Note también que la $(f_s)_{\text{mín}}$ del método II, como se especifica en la ecuación (4-131), satisface la $(f_s)_{\text{mín}}$ dada por el *teorema de muestreo pasabanda*, como se describe en la ecuación (4-31).

El método II es una de las formas más eficientes de obtener muestras para una señal pasabanda. La señal pasabanda convertida a frecuencia más baja se obtiene cuando la señal pasabanda se reconstruye a partir de las muestras mediante las ecuaciones (2-158) y (2-160). Para obtener la señal pasabanda original $s(t)$ se requiere de un convertidor elevador de frecuencias para transformar la señal convertida a una frecuencia más baja a la región pasabanda original del espectro.

El método II también puede utilizarse para obtener muestras de los componentes en cuadratura (es decir, I y Q) de la envolvente compleja. De la figura 4-32b se puede observar que la señal de IF a la entrada del muestreador es

$$v_{\text{IF}}(t) = x(t)\cos\omega_{\text{IF}}t - y(t)\text{sen}\omega_{\text{IF}}t$$

donde $f_{\text{IF}}(t) = B_T/2$. Se pueden obtener muestras de $x(t)$ si $v_{\text{IF}}(t)$ se muestrea a los tiempos correspondientes a $\cos\omega_{\text{IF}}t = \pm 1$ (y $\text{sen}\,\omega_{\text{IF}}t = 0$). Esto produce un número B_T de muestras de $x(t)$ por segundo. De la misma manera, se obtienen muestras de $y(t)$ a los tiempos correspondientes cuando $\text{sen}\,\omega_{\text{IF}}t = \pm 1$ ($\text{y cos}\,\omega_{\text{IF}}t = 0$). Esto produce un número B_T de muestras de $y(t)$ por segundo. La velocidad compuesta de muestreo para el reloj es de $f_s = 2B_T$. En consecuencia, la salida del muestreador contiene la siguiente secuencia de valores para I y Q: $x, -y, -x, y, x, -y$, ... El reloj de muestreo puede sincronizarse a la fase de IF utilizando circuitos de sincronización de portadoras. El método III emplea un enfoque parecido.

Método III En la figura 4-32c se puede observar que el método III emplea detectores de producto en fase (I) y en cuadratura (Q) para producir los componentes en cuadratura $x(t)$ y $y(t)$ de $s(t)$ (esto se discutió en la sección 4-16 y se ilustró en la figura 4-31). Las frecuencias más altas en $x(t)$ y $y(t)$ son de $B = B_T/2$. Por lo tanto, usando la ecuación (2-168), se encuentra que la mínima frecuencia de muestreo para el reloj de los muestreadores de I y Q es

[12] Se utiliza una inyección en el lado inferior del LO para que cualquier falta de simetría en las dos bandas laterales de $s(t)$ se preserve de la misma manera en la señal reducida.

$$(f_s)_{\text{min}} = B_T \quad \text{(cada muestreador)} \qquad \text{Método III} \tag{4–132}$$

Como hay dos muestreadores, la velocidad de muestreo combinada es $(f_s)_{\text{min general}} = 2B_T$. Esto también satisface la mínima velocidad de muestreo permitida para las señales pasabanda, como se describe en la ecuación (4-31). Así, el método III, al igual que el método II, proporciona una de las formas más eficientes de obtener muestras de señales pasabanda. Para el caso donde $f_c = 100$ MHz y $B_T = 1$ MHz, se requiere de una velocidad de muestreo general de 2 MHz para el método III, la cual es la misma que la que se obtuvo para el método II. Debido a que se han obtenido muestras IQ, éstas pueden procesarse mediante algoritmos de DSP para lograr un filtrado pasabanda equivalente, como se describió en la sección 4-5, o una modulación equivalente de cualquier otro tipo, como se describió en la sección 4-2. Si se desea, la señal pasabanda original puede reconstruirse a través de la ecuación (4-32).

SA4–6 Diseño de sintetizador de frecuencias para un LO de un receptor Diseñe un sintetizador de frecuencias para usarlo como oscilador local en una radio superheterodina de AM. La radio posee una IF de 455 kHz y puede sintonizarse a lo largo de la banda de AM desde 530 kHz hasta 1,710 kHz en pasos de 10 kHz cada uno. El sintetizador utiliza un oscilador de referencia de 1 MHz y genera una señal de inyección del LO en el lado superior.

Solución. Considerando la ecuación (4-59) y la figura 4-29 para el caso de una conversión descendente de frecuencias y una inyección al lado superior, se encuentra que la frecuencia requerida para el LO es de $f_0 = f_c + f_{\text{IF}}$. Si $f_c = 530$ kHz y $f_{\text{IF}} = 455$ kHz, entonces la frecuencia de salida del sintetizador deseada es de $f_0 = 985$ kHz. Con referencia al diagrama de bloques para el sintetizador de frecuencias (figura 4-25), se selecciona una frecuencia de la señal de entrada del mezclador, $v_{\text{entrada}}(t)$, de 5 kHz, la cual es la mitad del tamaño deseado de 10 kHz. Entonces $M = f_x/f_{\text{entrada}} = 1{,}000$ kHz/5 kHz = 200, y se puede encontrar un valor entero para N que resulte en la frecuencia del LO requerida. Empleando la ecuación (4-112) se obtiene que $N = f_0/f_{\text{entrada}}$. Para $f_0 = 985$ kHz y $f_{\text{entrada}} = 5$ kHz se obtiene que $N = 197$. De manera similar, se pueden obtener otros valores de N para sintonizar la radio a 540, 550, ..., 1,170 kHz (M se mantiene a 200). La tabla 4-6 presenta los resultados. Los valores seleccionados para M y N se mantienen pequeños para minimizar el ruido parásito de la banda lateral en la señal sintetizada del LO. M y N se minimizan asegurando que el tamaño del paso de frecuencia, f_{entrada}, sea lo más grande posible.

El ruido espectral en la banda lateral sobre la señal de salida del sintetizador se minimiza mediante un oscilador de referencia con bajo ruido y un VCO con bajo ruido, así como seleccionando un valor pequeño para N para la reducción en el número de componentes de ruido de intermodulación en la señal sintetizada. El ancho de banda del filtro de lazo también se minimiza, pero si es demasiado pequeño, el rango de enganche no será suficiente para un enganche confiable del sintetizador PLL cuando éste se

TABLA 4–5 SOLUCIÓN PARA SA4–6 CON RAZONES *M* Y *N* EN EL DIVISOR PARA UN SINTETIZADOR DE RADIO FRECUENCIA DE AM

Frecuencia de referencia = 1,000 Hz□Frecuencia de IF = 455 kHz

Frecuencia recibida, f_c (kHz)	Frecuencia del oscilador local, f_0 (kHz)	*M*	*N*
530	985	200	197
540	995	200	199
550	1,005	200	201
⋮	⋮	⋮	⋮
1,700	2,155	200	431
1,710	2,165	200	433

enciende. En este ejemplo, N puede reducirse por un factor de aproximadamente $\frac{1}{2}$ si se selecciona una frecuencia de IF de 450 kHz en lugar de 455 kHz. Por ejemplo, para $f_{IF} = 450$ kHz y $f_c = 530$ kHz se requiere una $f_0 = 980$ kHz. Esta frecuencia de LO puede alcanzarse si $M = 100$, para un tamaño de paso de $f_{entrada} = 10$ kHz, y $N = 98$, en comparación con (consulte la tabla 4-6) una $M = 200$ y $N = 197$, cuyos valores se requieren para el caso cuando $f_{IF} = 455$ kHz.

PROBLEMAS

4–1 Muestre que las ecuaciones (4-1b) y (4-1c) son correctas si $v(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\}$, donde $g(t) = x(t) + jy(t) = R(t)e^{j\theta(t)}$.

★ **4–2** Una señal de doble banda lateral con portadora suprimida (DSB-SC) $s(t)$ con una frecuencia de portadora de 3.8 MHz tiene una envolvente compleja $g(t) = A_c m(t)$. $A_c = 50$ V y la modulación es un tono senoidal de prueba de 1 kHz descrito por $m(t) = 2\ \text{sen}(2\pi 1{,}000t)$. Evalúe el espectro de voltaje para esta señal DSB-SC.

4–3 Asuma que la señal DSB-SC de voltaje $s(t)$, como se describe en el problema 4-2, aparece a través de una carga resistiva de 50 Ω.
(a) Calcule la potencia promedio actual disipada en la carga.
(b) Determine la PEP actual.

4–4 La figura P4-4 muestra un filtro pasabanda.

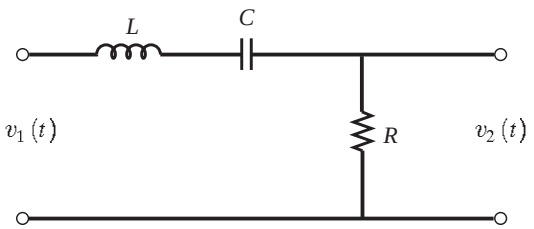


Figura P4–4

(a) Encuentre la expresión matemática para la función de transferencia de este filtro, $H(f) = V_2(f)/V_1(t)$, como una función de R, L y C. Haga un diagrama de la función de transferencia de magnitud $|H(f)|$.
(b) Halle la expresión para la función de transferencia equivalente del filtro pasabajas y haga un diagrama de la función de transferencia de magnitud pasabajas correspondiente.

★ **4–5** Asumiendo que la función de transferencia de un filtro pasabajas ideal se represente mediante

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f + f_c| < B_T/2 \\ 1, & |f - f_c| < B_T/2 \\ 0, & f \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde B_T es el ancho de banda absoluto del filtro.
(a) Haga un diagrama de la función de transferencia de magnitud $|H(f)|$.
(b) Encuentre la expresión para la forma de onda a la salida, $v_2(t)$, si la entrada consiste en una portadora a pulsos

$$v_1(t) = A\Pi(t/T)\cos(\omega_c t)$$

(c) Haga un diagrama de la forma de onda de salida $v_2(t)$ para el caso cuando $B_T = 4/T$ y $f_c \gg B_T$. (*Sugerencia*: utilice la técnica de envolvente compleja y exprese su respuesta como una función de la integral de la función seno que se define como

$$\text{Si}(u) = \int_0^u \frac{\text{sen}\,\lambda}{\lambda}\, d\lambda$$

El diagrama puede obtenerse buscando los valores para la integral de la función seno a partir de tablas publicadas [Abramowitz y Stegun, 1964] o si se evalúa $\text{Si}(u)$ numéricamente.)

4–6 Examine las propiedades de distorsión de un filtro pasabajas *RC*, mostrado en la figura 2-15. Suponga que la entrada del filtro consiste en una señal pasabajas con un ancho de banda de 1 kHz y una frecuencia de portadora de 15 kHz. Asumiendo que la constante de tiempo del filtro sea $\tau_0 = RC = 10^{-5}$ s.

(a) Encuentre el retraso de fase para la portadora de salida.

(b) Determine el retraso de grupo a la frecuencia de portadora.

(c) Evalúe el retraso de grupo para las frecuencias alrededor y dentro de la banda de frecuencias de la señal. Grafique este retraso como una función de frecuencia.

(d) Utilizando los resultados de (a) hasta (c), explique cómo el filtro distorsiona o no la señal pasabanda.

★ 4–7 Un filtro pasabajas como se muestra en la figura P4-7 tiene la función de transferencia

$$H(s) = \frac{Ks}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2}$$

donde $Q = R\sqrt{C/L}$, la frecuencia de resonancia es $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$, $\omega_0 = 2\pi f_0$, K es una constante y los valores para R, L y C se proporcionan en la figura. Suponga que una señal pasabanda con $f_c = 4$ kHz y el ancho de banda de 200 Hz pasa a través del filtro, donde $f_0 = f_c$.

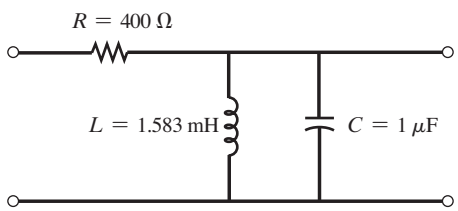


Figura P4–7

(a) Empleando la ecuación (4-39), encuentre el ancho de banda del filtro.

(b) Grafique el retraso de portadora como una función de f alrededor de f_0.

(c) Represente el retraso de grupo como una función de f alrededor de f_0.

(d) Explique por qué el filtro distorsiona o no la señal.

4–8 Una señal FM es de la forma

$$s(t) = \cos\left[\omega_c t + D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\, d\sigma\right]$$

donde $m(t)$ es la señal moduladora y $\omega_c = 2\pi f_c$, en la cual f_c es la frecuencia de portadora. Muestre que las funciones $g(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $R(t)$ y $\theta(t)$, como se presentan en la tabla 4-1 para el caso de FM, son correctas.

★ 4–9 Asuma que la señal modulada,

$$s(t) = 100\ \text{sen}(\omega_c + \omega_a)t + 500\ \cos\omega_c t - 100\ \text{sen}(\omega_c - \omega_a)t$$

donde la portadora sin modulación es de 500 cos $\omega_c t$.

(a) Encuentre la envolvente compleja para la señal modulada. ¿Cuál es el tipo de modulación involucrada? ¿Cuál es la señal moduladora?
(b) Halle los componentes de modulación en cuadratura $x(t)$ y $y(t)$ para esta señal modulada.
(c) Determine los componentes de magnitud y de PM $R(t)$ y $\theta(t)$ para esta señal modulada.
(d) Calcule la potencia promedio total, donde $s(t)$ es la forma de onda de voltaje que se aplica a través de una carga de 50 Ω.

★ **4–10** Encuentre el espectro de la señal modulada del problema 4-9 mediante dos métodos:
(a) Evaluación directa utilizando la transformada de Fourier de $s(t)$.
(b) Usando la ecuación (4-12).

4–11 Dada la señal modulada por pulsos de la forma

$$s(t) = e^{-at}\cos[(\omega_c + \Delta\omega)t]\,u(t)$$

donde a, ω_c y $\Delta\omega$ son constantes positivas y la frecuencia de portadora $\omega_c \gg \Delta\omega$.
(a) Obtener la envolvente compleja.
(b) Encuentre el espectro $S(f)$.
(c) Haga un diagrama de los espectros de magnitud y de fase $|S(f)|$ y $\theta(f) = \underline{/S(f)}$.

4–12 En una simulación digital por computadora de un filtro pasabajas se utiliza la envolvente compleja de la respuesta de impulso, donde $h(t) = \text{Re}[k(t)\ e^{j\omega_c t}]$, como se muestra en la figura 4-3. La respuesta compleja al impulso puede expresarse en términos de los componentes en cuadratura como $k(t) = 2h_x(t) + j2h_y(t)$, donde $h_x(t) = \frac{1}{2}\text{Re}[k(t)]$ y $h_y(t) = \frac{1}{2}\ \text{Im}\ [k(t)]$. Las envolventes complejas de la entrada y de la salida se denotan, respectivamente, con $g_1(t) = x_1(t) + jy_1(t)$ y $g_2(t) = x_2(t) + jy_2(t)$. La simulación del filtro pasabanda se puede llevar a cabo empleando cuatro filtros *de banda base reales* (es decir, filtros con respuestas al impulso reales), como se muestra en la figura P4-12. Note que pese a haber cuatro filtros existen sólo dos respuestas de impulso distintas: $h_x(t)$ y $h_y(t)$.
(a) Usando la ecuación (4-22), muestre que la figura P4-12 es correcta.

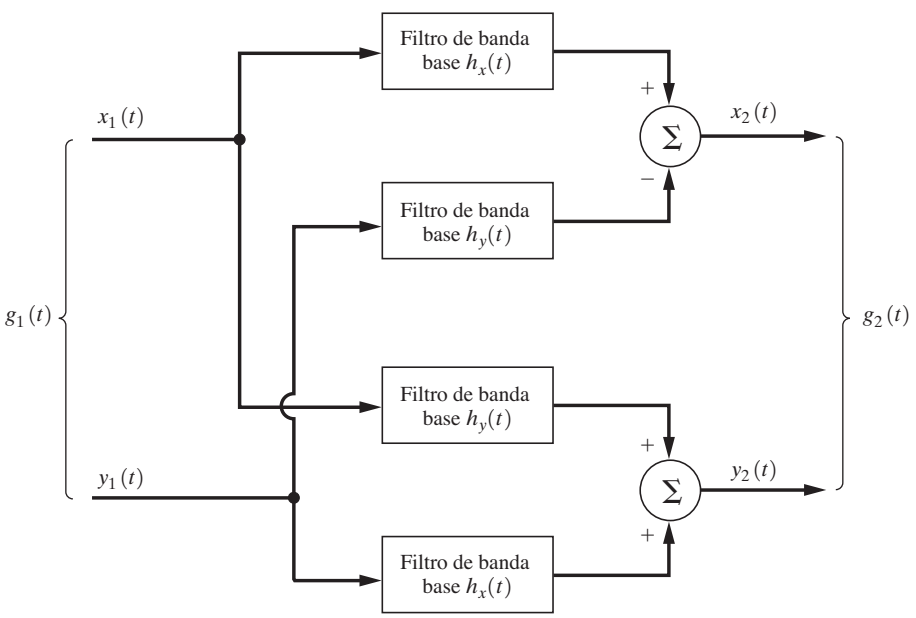


Figura P4–12

(b) Muestre que $h_y(t) \equiv 0$ (es decir, que no se requiere de un filtro) si el filtro pasabajas tiene una función de transferencia con simetría hermitiana alrededor de f_c, es decir, si $H(-\Delta f + f_c) = H^*(\Delta f + f_c)$, donde $|\Delta f| < B_T/2$ y B_T es el ancho de banda espectral limitado del filtro pasabajas. Esta simetría hermitiana implica que la respuesta de frecuencia de magnitud del filtro pasabajas es par alrededor de f_c y la respuesta de fase es impar alrededor de f_c.

4–13 Evalúe y haga un diagrama de la función de transferencia de magnitud para filtros pasabajas de **(a)** Butterworth, **(b)** Chebyshev y **(c)** Bessel.

★ **4–14** Grafique la respuesta de amplitud, la respuesta de fase y el retraso de fase como una función de frecuencia para los siguientes filtros pasabajas, donde $B = 100$ Hz:
(a) Filtro de Butterworth de segundo orden:

$$H(f) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}\,(jf/B) + (jf/B)^2}$$

(b) Filtro de Butterworth de cuarto orden:

$$H(f) = \frac{1}{[1 + 0.765(jf/B) + (jf/B)^2][1 + 1.848(jf/B) + (jf/B)^2]}$$

Compare sus resultados para ambos filtros.

4–15 Suponga que la característica de salida a entrada de un amplificador pasabajas se describe por la ecuación (4-42) y que la linealidad del amplificador se evalúa utilizando dos tonos de prueba.
(a) Encuentre las frecuencias de los productos de intermodulación de quinto orden que caen en la banda de paso del amplificador.
(b) Evalúe los niveles para los productos de intermodulación de quinto orden en términos de A_1, A_2 y las K.

4–16 Un amplificador se prueba para verificar su distorsión armónica total (THD) usando un solo tono de prueba. La salida se observa en un analizador espectral. Se encuentra que los valores pico de las tres armónicas medidas disminuyen de acuerdo a una relación recursiva exponencial $V_{n+1} = V_n e^{-n}$, donde $n = 1, 2, 3$. ¿Cuál es la THD?

★ **4–17** La característica no lineal de salida a entrada de un amplificador es

$$v_{\text{salida}}(t) = 5v_{\text{entrada}}(t) + 1.5v^2_{\text{entrada}}(t) + 1.5v^3_{\text{entrada}}(t)$$

Suponga que la señal de entrada consiste en siete componentes:

$$v_{\text{entrada}}(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos[(2k-1)\pi t]$$

(a) Grafique la señal de salida y compárela con el componente lineal de salida $5v_{\text{entrada}}(t)$.
(b) Tome la FFT de la salida $v_{\text{salida}}(t)$ y compárela con el espectro para la componente lineal de salida.

4–18 Para un circuito limitador pasabanda, muestre que la salida pasabanda se obtiene a partir de la ecuación (4-55), donde $K = (4/\pi)A_0$. A_0 denota la ganancia de voltaje del filtro pasabajas y se asume que la ganancia es constante sobre el rango de frecuencias de la señal pasabajas.

4–19 Discuta acerca de si el modelo no lineal de la serie de Taylor se puede aplicar al análisis de **(a)** limitadores programados y **(b)** limitadores firmes.

★ **4–20** Suponga que una señal senoidal de audio de prueba se pasa a través de un circuito limitador firme de audio. Evalúe la distorsión armónica total (THD) en la señal a la salida del limitador.

4–21 Empleando la definición matemática de linealidad presentada en el capítulo 2, muestre que el multiplicador conmutador analógico de la figura 4-10 es un dispositivo lineal.

4–22 Una señal de audio con un ancho de banda de 10 kHz se envía sobre un transmisor de AM con una frecuencia de portadora de 1.0 MHz. La señal AM llega a un receptor superheterodino con un detector de envolvente. ¿Cuál es la restricción sobre la constante de tiempo *RC* para el detector de envolvente?

★ **4–23** Suponga que un receptor de AM con un detector de envolvente se sintoniza a una señal SSB-AM que tiene una forma de onda de modulación dada por $m(t)$. Encuentre la expresión matemática para la señal de audio que aparece a la salida del receptor en términos de $m(t)$. ¿Existe distorsión en la salida de audio?

4–24 Evalúe la sensibilidad del detector de FM de cruce por cero que se muestra en la figura 4-18. Suponga que el amplificador diferencial se describe mediante $v_{\text{salida}}(t) = A[v_2(t) - v_3(t)]$, donde A es la ganancia de voltaje del amplificador. En particular, muestre que $v_{\text{salida}} = Kf_d$, donde $f_d = f_i - f_c$, y encuentre el valor de la constante de sensibilidad K en términos de A, R y C. Suponga que los niveles pico de las salidas monoestables Q y $\bar{Q}$ son de 4 V (niveles de circuitos TTL).

4–25 **(a)** Usando la ecuación (4-100) muestre que el modelo linealizado en diagrama de bloques para un PLL se representa mediante la figura 4-22.

(b) Compruebe que la ecuación (4-101) describe el modelo lineal de PLL que se representa en la figura 4-22.

★ **4–26** Utilizando la transformada de Laplace y el teorema del valor final, encuentre una expresión para el error de fase en estado estable, $\lim_{t \to \infty} \theta_e(t)$, para un PLL como se describe en la ecuación (4-100). [*Sugerencia*: el teorema del valor final es $\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$.]

4–27 Suponga que el filtro de lazo de un PLL es un filtro pasabajas, como se muestra en la figura P4-27.

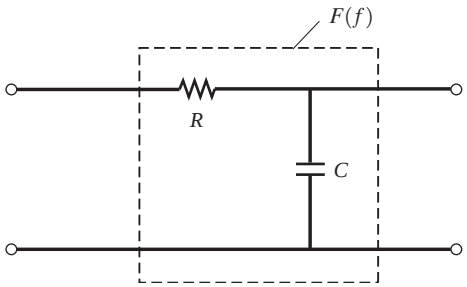


Figura P4–27

(a) Evalúe la función de transferencia de lazo cerrado $H(f) = \dfrac{\Theta_0(f)}{\Theta_i(f)}$ para un PLL linealizado.

(b) Haga un diagrama del gráfico de Bode $[|H(f)|]_{\text{dB}} \triangleq 20 \log |H(f)|$ para este PLL.

★ **4–28** Suponga que se examina la característica de ruido de fase de un PLL. El ruido de fase interno del VCO se modela mediante la entrada $\theta_n(t)$, como se muestra en la figura P4-28.

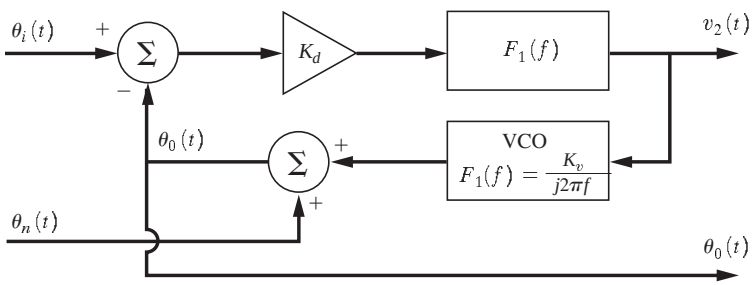


Figura P4–28

(a) Encuentre una expresión para la función de transferencia de lazo cerrado $\Theta_0(f)/\Theta_n(f)$, donde $\theta_i(t) = 0$.
(b) Si $F_1(f)$ es el filtro pasabajas que se presenta en la figura P4-27, haga un diagrama del gráfico de Bode $[|\Theta_0(f)/\Theta_n(f)|]_{dB}$ para la función de transferencia de ruido en fase.

4–29 La entrada a un PLL es $v_{entrada}(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \theta_i)$. El LPF posee una función de transferencia de $F(s) = (s + a)/s$.
(a) ¿Cuál es el error en fase de estado estable?
(b) ¿Cuál es el máximo rango de retención para el caso sin ruido?

★ **4–30** **(a)** Remítase a la figura 4-25 para un sintetizador de frecuencias de PLL. Diseñe un sintetizador que cubrirá un rango de 144 a 148 MHz en pasos de 5 kHz, empezado a 144,000 MHz. Asuma que el estándar de frecuencia opera a 5 MHz, que el divisor *M* se fija a cierto valor y que el divisor *N* es programable de tal forma que el sintetizador pueda cubrir el rango deseado. Haga un diagrama de su diseño, indicando las frecuencias presentes en varios puntos de aquél.
(b) Modifique su diseño de tal manera que la señal de salida sea de frecuencia modulada con una entrada de audiofrecuencia de tal forma que la desviación pico de la salida de RF es de 5 kHz.

4–31 Suponga que se diseñará un transmisor de SSB-AM empleando la técnica de generación de AM-PM, como se muestra en la figura 4-27.
(a) Dibuje un diagrama de bloques para el circuito de procesamiento de señal de banda base.
(b) Encuentre expresiones para $R(t)$,$\theta(t)$ y $v(t)$ cuando la modulación es de $m(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$.

4–32 Resuelva el problema 4-31 para el caso de la generación de una señal FM.

4–33 Suponga que se diseñará un transmisor de SSB-AM empleando la técnica de generación en cuadratura, como se muestra en la figura 4-28.
(a) Dibuje un diagrama de bloques para el circuito de procesamiento de señal en banda base.
(b) Encuentre expresiones para $x(t)$, $y(t)$ y $v(t)$ cuando la modulación es de $m(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$.

4–34 Resuelva el problema 4-33 para el caso de la generación de una señal FM.

★ **4–35** Una radio de FM se sintoniza para recibir una estación radiodifusora en FM a una frecuencia de 96.9 MHz. La radio es del tipo superheterodino en donde el LO opera al lado superior de la entrada de 96.9 MHz y donde se utiliza un amplificador de IF de 10.7 MHz.
(a) Determine la frecuencia del LO.
(b) Si la señal FM tiene un ancho de banda de 180 kHz, obtenga los requisitos para los filtros de RF y de IF.
(c) Calcule la frecuencia de la respuesta de imagen.

4–36 Un teléfono celular de modo dual se diseña para operar con servicio de telefonía celular analógico en la banda de 900 MHz o bien por PCS digital en la banda de 1,900 MHz. El teléfono utiliza un receptor superheterodino con una IF de 500 MHz para ambos modos.
(a) Calcule la frecuencia del LO y la frecuencia de imagen para una inyección al lado superior cuando el teléfono recibe una señal analógica de 880 MHz.
(b) Determine la frecuencia del LO y la frecuencia de imagen para una inyección al lado inferior cuando el teléfono recibe una señal PCS digital de 1,960 MHz.
(c) Explique la ventaja de utilizar una IF de 500 MHz para este teléfono de modo dual.
(*Nota*: los sistemas celulares y PCS se describen en el capítulo 8.)

4–37 Un receptor superheterodino se sintoniza a una estación a 20 MHz. La frecuencia del oscilador local es de 80 MHz y la IF es de 100 MHz.
(a) ¿Cuál es la frecuencia de imagen?
(b) Si el LO posee contenido apreciable de una segunda armónica, ¿cuáles son las otras dos frecuencias adicionales que se reciben?

(c) Si el amplificador de RF contiene un circuito resonante en paralelo con $Q = 50$ sintonizado a una sola frecuencia de 20 MHz, ¿cuál será la atenuación de imagen en dB?

4–38 Un receptor SSB-AM se sintoniza para recibir una señal de SSB inferior (LSSB) a 7.225 MHz. La señal LSSB se modula mediante una señal de audio que tiene un ancho de banda de 3 kHz. Suponga que el receptor utiliza un circuito superheterodino con un filtro de IF SSB. El amplificador IF se centra a 3.395 MHz. La frecuencia del LO está en el lado superior (frecuencia) de la señal LSSB.

(a) Dibuje un diagrama de bloques del receptor superheterodino de conversión única e indique las frecuencias presentes y los espectros típicos de las señales en varios puntos dentro del receptor.

(b) Determine las especificaciones requeridas para los filtros de RF y de IF, asumiendo que la frecuencia de imagen se atenuará por 40 dB.

4–39 **(a)** Dibuje un diagrama de bloques de un receptor superheterodino de FM que se diseña para recibir señales FM sobre una banda de 144 a 148 MHz. Suponga que el receptor es del tipo de conversión dual (es decir, un mezclador y un amplificador de IF, seguido de otro mezclador y un segundo amplificador de IF), donde la primera IF es de 10.7 MHz y la segunda de 455 kHz. Indique las frecuencias de las señales en varios puntos en el diagrama y, en particular, muestre las frecuencias involucradas cuando se recibe una señal de 146.82 MHz.

(b) Reemplace el primer oscilador con un sintetizador de frecuencias de tal manera que el receptor se pueda sintonizar en pasos de 5 kHz a frecuencias desde 144,000 a 148,000 MHz. Muestre el diagrama del diseño de su sintetizador y las frecuencias involucradas.

★ **4–40** Una radio de banda de difusión por AM se sintoniza para recibir una señal AM de 1,080 kHz y utiliza una inyección al lado superior del LO. La IF es de 455 kHz.

(a) Haga un diagrama de la respuesta en frecuencia para los filtros de RF y de IF.

(b) ¿Cuál es la frecuencia de imagen?

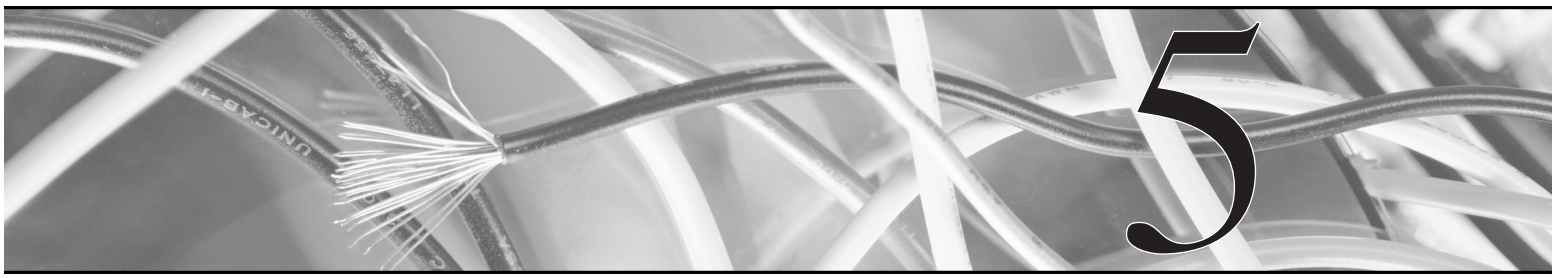
4–41 Las estaciones comerciales de difusión por AM operan en la banda de 540 a 1,700 kHz, con un ancho de banda de transmisión limitado a 10 kHz.

(a) ¿Cuál es el máximo número de estaciones que se pueden soportar?

(b) Si las estaciones no se asignan a canales adyacentes, para reducir la interferencia en los receptores que poseen características pobres de IF, ¿cuántas estaciones se pueden soportar?

(c) Para receptores de IF de 455 kHz, ¿cuál es la banda de las frecuencias de imagen para un receptor de AM que utiliza un convertidor descendente con inyección al lado superior?

Capítulo



5

SISTEMAS MODULADOS DE AM, FM Y DIGITALES

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Modulación en amplitud y banda lateral única
- Modulación en frecuencia y en fase
- Difusión de audio digital
- Señales digitalmente moduladas (OOK, BPSK, FSK, MSK, MPSK, QAM, QPSK, π/4QPSK y OFDM)
- Espectro ensanchado y sistemas CDMA

Este capítulo aborda las técnicas pasabanda de amplitud modulada (AM), banda lateral única (SSB), modulación en fase (PM) y frecuencia modulada (FM), además de las técnicas de modulación digital de encendido-apagado (OOK), modulación por corrimiento de fase binaria (BPSK), modulación por corrimiento de frecuencia (FSK), modulación por corrimiento de fase en cuadratura (QPSK), amplitud modulada en cuadratura (QAM) y multiplexión ortogonal por división de frecuencias (OFDM). Todas estas técnicas de señalización pasabanda consisten en la modulación de una señal de banda base analógica o digital dentro de una portadora. Este enfoque se introdujo por primera vez en la sección 4-2. En particular, la señal pasabanda modulada se puede describir mediante

$$s(t) = \mathrm{Re}\{g(t)^{j\omega_c t}\} \tag{5–1}$$

donde $\omega_c = 2\pi f_c$ y f_c es la frecuencia de la portadora. El tipo deseado de la señal modulada, $s(t)$, se obtiene seleccionando la función de mapeo de modulación apropiada $g[m(t)]$ de la tabla 4-1, donde $m(t)$ es la señal de banda base analógica o digital.

El espectro de voltaje (o de corriente) de la señal pasabanda es

$$S(f) = \tfrac{1}{2}\,[G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)] \tag{5–2a}$$

y la PSD es

$$\mathcal{P}_s(f) = \tfrac{1}{4}\left[\mathcal{P}_g(f-f_c) + \mathcal{P}_g(-f-f_c)\right] \tag{5–2b}$$

donde $G(f) = \mathcal{F}[g(t)]$ y $\mathcal{P}_g(f)$ es la PSD de la envolvente compleja $g(t)$.

Los resultados generales aplicables a las formas de onda moduladoras tanto digitales como analógicas se desarrollan en la primera mitad del capítulo, en las secciones 5-1 a la 5-8, mientras que las señales digitales moduladas se enfatizan en la segunda mitad, en las secciones 5-9 a la 5-13.

Las metas de este capítulo son:

- Estudiar $g(t)$ y $s(t)$ para varios tipos de modulaciones analógicas y digitales.
- Evaluar el espectro para diversos tipos de modulaciones analógicas y digitales.
- Examinar algunas estructuras de transmisores y receptores.
- Estudiar algunos estándares adoptados.
- Aprender acerca de los sistemas de espectro ensanchado.

5–1 MODULACIÓN EN AMPLITUD

De la tabla 4-1 se observa que la envolvente compleja de una señal AM se obtiene a partir de

$$g(t) = A_c[1 + m(t)] \tag{5–3}$$

donde la constante A_c ha sido incluida para especificar el nivel de potencia, y $m(t)$ es la señal moduladora, la cual puede ser analógica o digital. Estas ecuaciones se reducen a la siguiente representación para la señal AM:

$$s(t) = A_c[1 + m(t)]\cos\omega_c t \tag{5–4}$$

La figura 5-1 muestra una forma de onda que ilustra la señal AM como se observa en un osciloscopio. Por conveniencia, se asume que la señal moduladora $m(t)$ es una senoidal. $A_c[1 + m(t)]$ corresponde a la componente en fase $x(t)$ de la envolvente compleja, así como a la envolvente real $|g(t)|$ cuando $m(t) \geq -1$, que es el caso típico.

Si $m(t)$ cuenta con un valor pico positivo de +1 y un valor pico negativo de −1, entonces se dice que la señal AM está 100□ modulada.

DEFINICIÓN. El *porcentaje de modulación positiva* en una señal AM es

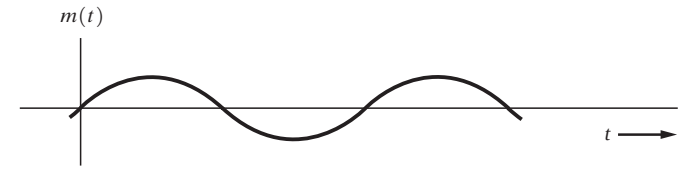
$$\square \text{ de modulación positiva} = \frac{A_{\text{máx}} - A_c}{A_c} \times 100 = \text{máx}[m(t)] \times 100 \tag{5–5a}$$

y el *porcentaje de modulación negativa* es

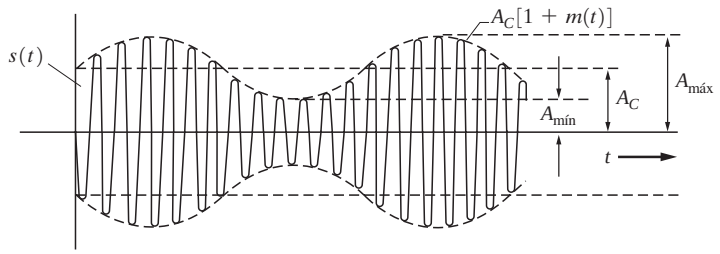
$$\square \text{ de modulación negativa} = \frac{A_c - A_{\text{mín}}}{A_c} \times 100 = -\text{mín}\,[m(t)] \times 100 \tag{5–5b}$$

El porcentaje general de modulación es

$$\square \text{ de modulación} = \frac{A_{\text{máx}} - A_{\text{mín}}}{2A_c} \times 100 = \frac{\text{máx}[m(t)] - \text{mín}[m(t)]}{2} \times 100 \tag{5–6}$$



(a) Onda senoidal moduladora



(b) Señal AM resultante

Figura 5–1 Forma de onda de la señal AM.

donde $A_{máx}$ es el maximo valor de $A_c[1 + m(t)]$, $A_{mín}$ es el mínimo valor y A_c es el nivel de la envolvente de AM en ausencia de modulación [es decir, $m(t) = 0$].

La ecuación (5-6) se puede obtener mediante el promedio de la modulación positiva y negativa resultante de las ecuaciones (5-5a) y (5-5b). $A_{máx}$, $A_{mín}$ y A_c se ilustran en la figura 5-1b, donde, en este ejemplo, $A_{máx} = 1.5A_c$ y $A_{mín} = 0.5A_c$, tal que los porcentajes de modulación positiva y negativa son ambos de 50□ y la modulación general es también de 50□.

El porcentaje de modulación puede ser superior a 100□ ($A_{mín}$ tendría un valor negativo), siempre y cuando se utilice un multiplicador de cuatro cuadrantes para generar el producto de $A_c[1 + m(t)]$ y cos $\omega_c t$, tal que se obtenga la forma de onda de AM verdadera, como resulta de la ecuación (5-4).[1] Sin embargo, si el transmisor utiliza un multiplicador de dos cuadrantes que produce una salida de cero cuando $A_c[1 + m(t)]$ es negativo, entonces la señal de salida será

$$s(t) = \begin{cases} A_c[1 + m(t)] \cos \omega_c t, & \text{si } m(t) \geq -1 \\ 0, & \text{si } m(t) < -1 \end{cases} \tag{5–7}$$

la cual es una señal AM distorsionada, cuyo ancho de banda es mucho más amplio que el de la señal AM sin distorsión, como se puede demostrar fácilmente con el análisis espectral. □sta es una condición de sobremodulación que la FCC no permite. Un transmisor de AM que utiliza modulación de placa es ejemplo de un circuito que actúa como multiplicador de dos cuadrantes. En este caso, para una generación de señal AM de alta potencia, la señal portadora sin modulación se aplica a la rejilla del tubo y el voltaje de DC en la placa varía proporcionalmente a $A_c[1 + m(t)]$, donde $A_c[1 + m(t)] \geq 0$. Esto da como resultado el producto $A_c[1 + m(t)] \cos \omega_c t$, siempre y cuando $m(t) \geq -1$, pero no produce una salida cuando $m(t) < -1$.

[1] Si el porcentaje de modulación se vuelve demasiado grande (acercándose al infinito), entonces la señal AM se convierte en la señal de doble banda lateral con portadora suprimida descrita en la siguiente sección.

Si el porcentaje de modulación negativa es menor que 100□, entonces se puede utilizar el detector de envolvente para recuperar la modulación sin distorsión, ya que la envolvente, $|g(t)| = |A_c[1 + m(t)]|$, es idéntico a $A_c[1 + m(t)]$. Pero si dicho porcentaje es mayor a 100, la modulación todavía se puede recuperar sin distorsión siempre y cuando se emplee el detector apropiado, es decir, un detector de producto. Esto se observa en la ecuación (4-76) con $\theta_0 = 0$. Más aún, se puede recurrir al detector de producto para cualquier porcentaje de modulación. En el capítulo 7 se verá que éste es superior a un detector de envolvente cuando la relación señal a ruido de entrada es pequeña.

De la ecuación (4-17) se obtiene que la *potencia promedio normalizada* de la señal AM es

$$\begin{aligned}\langle s^2(t)\rangle &= \tfrac{1}{2}\langle |g(t)|^2\rangle = \tfrac{1}{2} A_c^2 \langle [1 + m(t)]^2\rangle \\ &= \tfrac{1}{2} A_c^2 \langle 1 + 2m(t) + m^2(t)\rangle \\ &= \tfrac{1}{2} A_c^2 + A_c^2\langle m(t)\rangle + \tfrac{1}{2} A_c^2 \langle m^2(t)\rangle \end{aligned} \tag{5–8}$$

Si la modulación no contiene un nivel de DC, entonces $\langle m(t)\rangle = 0$ y la potencia *normalizada* de la señal AM es

$$\langle s^2(t)\rangle = \underbrace{\tfrac{1}{2} A_c^2}_{\substack{\text{potencia de}\\ \text{la portadora}\\ \text{disccreta}}} + \underbrace{\tfrac{1}{2} A_c^2 \langle m^2(t)\rangle}_{\substack{\text{potencia de}\\ \text{banda lateral}}} \tag{5–9}$$

DEFINICIÓN. La *eficiencia de modulación* es el porcentaje de la potencia total de la señal modulada que suministra información.

En la señalización de AM sólo los componentes de banda lateral proporcionan información, así que la eficiencia de modulación es

$$E = \frac{\langle m^2(t)\rangle}{1 + \langle m^2(t)\rangle} \times 100\% \tag{5–10}$$

La eficiencia más alta que se puede alcanzar será de 50□ para una señal AM al 100□ cuando se utiliza la modulación por onda cuadrada.

Aplicando la ecuación (4-18) se obtiene la potencia pico de envolvente normalizada (PEP) de la señal AM:

$$P_{\text{PEP}} = \frac{A_c^2}{2}\{1 + \text{máx}[m(t)]\}^2 \tag{5–11}$$

El espectro de voltaje de la señal AM se consigue a partir de la ecuación (4-20a) del ejemplo 4-1, y es

$$S(f) = \frac{A_c}{2}[\delta(f - f_c) + M(f - f_c) + \delta(f + f_c) + M(f + f_c)] \tag{5–12}$$

El espectro de AM es tan sólo una versión transformada del espectro de modulación, además de las funciones delta que generan el componente espectral en la línea portadora. El *ancho de banda* es *dos veces* más amplio que el de la modulación. Como se indica en la sección 5-6, el espectro para una señal FM es mucho más complicado, ya que la función de mapeo de modulación $g(m)$ es no lineal.

Ejemplo 5–1 POTENCIA DE UNA SEÑAL AM

La FCC clasifica los transmisores de banda de difusión por AM de acuerdo con la potencia promedio de su *portadora*, y este sistema de clasificación es también común en otras aplicaciones de audio de AM. Suponiendo que un transmisor de AM de 5,000 W se conecta a una carga de 50 Ω, entonces la constante

A_c se obtiene de $\frac{1}{2}\ A_c^2\ /50 = 5{,}000$. Por tanto, el voltaje pico a través de la carga será de $A_c = 707$ V durante los tiempos en que no haya modulación. Si el transmisor se modula al 100□ mediante un tono de prueba de 1,000 Hz, entonces la potencia promedio total (portadora, además de la banda lateral) será, a partir de la ecuación (5-9),

$$1.5\left[\frac{1}{2}\left(\frac{A_c^2}{50}\right)\right] = (1.5)\times(5{,}000) = 7{,}500\ \text{W}$$

debido a que $\langle m^2(t)\rangle = \frac{1}{2}$ para una modulación senoidal al 100□. Obsérvese que la potencia actual es de 7,500 W y no la potencia normalizada. El voltaje pico (100□ de modulación) es de $(2)(707) = 1414$ V a través de la carga de 50 Ω. De la ecuación (5-11) se tiene que la PEP es

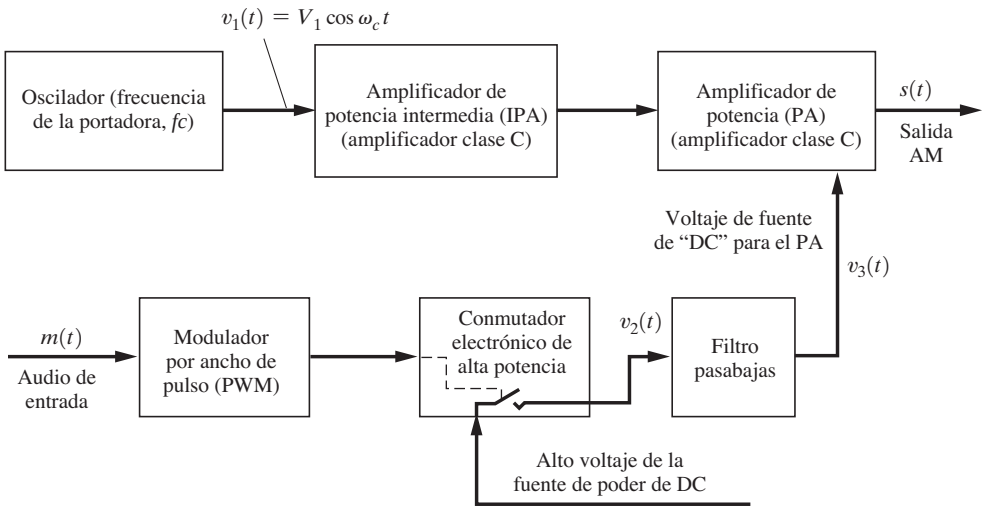
$$4\left[\frac{1}{2}\left(\frac{A_c^2}{50}\right)\right] = (4)(5{,}000) = 20{,}000\ \text{W}$$

La eficiencia de modulación sería de 33□, ya que $\langle m^2(t)\rangle = \frac{1}{2}$.

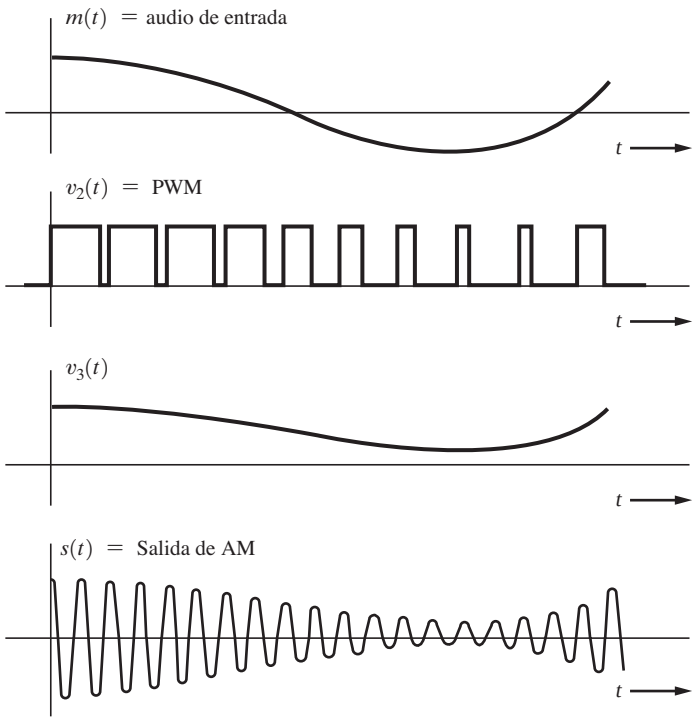
Hay muchas maneras de construir transmisores de AM. Se puede considerar primero la generación de la señal AM a un bajo nivel de potencia mediante un multiplicador y después amplificarla. Esto, sin embargo, requiere el uso de amplificadores lineales, como los de clase A y B expuestos en la sección 4-9, de tal forma que la AM no se distorsione. Como estos amplificadores lineales no son muy eficientes para convertir la potencia de la fuente de poder en una señal de RF, mucha de la energía se gasta en calor.[2] En consecuencia, los transmisores de difusión por AM de alta potencia se construyen amplificando la señal del oscilador de portadora a un alto nivel de potencia con amplificadores eficientes clase C o clase D, y después modulando por amplitud la última etapa de alta potencia. A esto se le conoce como modulación de *alto nivel*. Un ejemplo se muestra en la figura 5-2a, donde se aplica la técnica de modulación por ancho de pulso (PWM) para lograr la AM con una alta eficiencia de conversión [DeAngelo, 1982]. La entrada de audio se convierte en una señal PWM que se emplea para controlar un circuito conmutador (bulbo o transistor) de alta potencia. La salida del circuito conmutador consiste en una señal PWM de alto nivel que se filtra con un filtro pasabajas para producir el componente de "DC" utilizado como fuente de poder para la etapa del amplificador de potencia (PA, por sus siglas en inglés). A menudo la frecuencia de conmutación de PWM se escoge en un rango de 70 a 80 kHz, de manera que se pueden suprimir fácilmente los componentes fundamentales y armónicos de la señal PWM mediante un filtro pasabajas, y sin embargo el valor de "DC" puede variar a una velocidad de audio tan alta como de 12 o 15 kHz para una buena respuesta en frecuencia de audio de AM. Esta técnica proporciona una excelente respuesta en frecuencia y una baja distorsión, ya que no se requieren transformadores de audio de alta potencia, pero a menudo se utilizan tubos de vacío en los circuitos conmutadores del PA y electrónicos porque los transistores no poseen una disipación lo suficientemente grande.

Otra técnica permite construir un transmisor de alta potencia en estado sólido. Ésta recurre al procesamiento digital para generar la AM. Se puede crear un transmisor de AM de 50 kW que utiliza de 50 a 100 módulos de PA de transistores, cada uno de los cuales produce ya sea 100, 300, 500 o 1,000 W (visite http://www.broadcast.harris.com). Cada módulo genera una onda cuadrada de amplitud constante a la frecuencia de la portadora, la cual se filtra para producir el componente fundamental de onda seno. Para sintetizar la señal AM, la señal analógica de audio se muestrea y digitaliza mediante un ADC. Estas muestras se emplean para determinar (calcular) la combinación de módulos que se necesita encender (de muestra a muestra) a fin de generar la amplitud requerida en

[2] No se confunda esta eficiencia de conversión con la eficiencia de modulación definida en la ecuación (5-10).


$v_1(t) = V_1 \cos \omega_c t$
Oscilador (frecuencia de la portadora, *fc*)
Amplificador de potencia intermedia (IPA) (amplificador clase C)
Amplificador de potencia (PA) (amplificador clase C)
$s(t)$
Salida AM
Voltaje de fuente de "DC" para el PA
$v_3(t)$
$m(t)$
Audio de entrada
Modulador por ancho de pulso (PWM)
Conmutador electrónico de alta potencia
$v_2(t)$
Filtro pasabajas
Alto voltaje de la fuente de poder de DC

(a) Diagrama de bloques



(b) Formas de onda

Figura 5–2 Generación de AM de alta potencia mediante PWM.

la señal combinada (sumada). Si uno de los módulos falla, se sustituye con otro (o con una combinación de módulos), asegurando una excelente confiabilidad cuando el transmisor está en funcionamiento en el aire, ya que éste continuará operando con módulos defectuosos. Cualquiera de éstos se puede reemplazar o reparar más tarde, en un tiempo conveniente. Este transmisor de AM posee una eficiencia de conversión de potencia de AC a RF de 86□ y una excelente fidelidad de audio.

5–2 ESTÁNDARES TÉCNICOS DE DIFUSIÓN POR AM Y DIFUSIÓN DIGITAL POR AM

En la tabla 5-1 se muestran algunos estándares técnicos de la FCC para las estaciones difusoras por AM. Debido a que el ancho de banda es de 10 kHz, la audiofrecuencia más alta se limita a 5 kHz si la señal de AM resultante no interfiere con las estaciones asignadas a canales adyacentes. Esta baja fidelidad no es una propiedad inherente a AM, pero ocurre porque el ancho de banda del canal se limita por el estándar de 10 kHz de la FCC en lugar de haber elegido, por ejemplo, 30 kHz, para de esta forma poder soportar tres veces el número de canales en la banda de difusión por AM. En la práctica, la FCC permite que las estaciones tengan un ancho de banda de audio de 10 kHz, lo cual produce un ancho de banda de señal AM de 20 kHz. Esto, por supuesto, causa cierta interferencia en estaciones con canales adyacentes.

En Estados Unidos operan alrededor de 4,925 estaciones de AM y las frecuencias de portadora se diseñan de acuerdo con el área de cobertura deseada para dicha modalidad: de canal claro, de canal regional o frecuencias de canal local. La tabla 5-1 muestra las frecuencias de canal claro y de canal local. Las otras son regionales. Las estaciones de canal claro clase A operan todo el tiempo (día y noche) y la mayoría posee una potencia de 50 kW. Se desea que estas estaciones cubran áreas amplias. Más aún, para soportar cuantas sea posible, las estaciones de canales no claros pueden ser asignadas para operar sobre las frecuencias de canal claro cuando se implementan sin interferencia

TABLA 5–1 ESTÁNDARES TÉCNICOS PARA ESTACIONES DE DIFUSIÓN POR AM

Elemento	Estándar técnico de la FCC
Frecuencia asignada, f_c	En incrementos de 10 kHz, desde 540 a 1,700 kHz
Ancho de banda del canal	10 kHz
Estabilidad de la frecuencia de la portadora	±20 Hz de la frecuencia asignada
Frecuencias de canal claro (Una estación clase A de 50 kW) (No direccional)	640, 650, 660, 670, 700, 720, 750, 760, 770, 780, 820, 830, 840, 870, 880, 890, 1,020, 1,030, 1,040, 1,070, 1,100, 1,120, 1,160, 1,180, 1,200 y 1,210 kHz
Frecuencias de canal claro (Múltiples estaciones de 50 kW) (Direccional nocturna)	680, 710, 810, 850, 1,000, 1,060, 1,080, 1,090, 1,110, 1,130, 1,140, 1,170, 1,190, 1,500, 1,510, 1,520 y 1,530 kHz
Frecuencias de canal claro (Para las Bahamas, Cuba, Canadá o México)	540, 690, 730, 740, 800, 860, 900, 940, 990, 1,010, 1,050, 1,220, 1,540, 1,550, 1,560, 1,570 y 1,580 kHz
Frecuencias de canal local (Estaciones de 1 kW)	1,230, 1,240, 1,340, 1,400, 1,450 y 1,490 kHz
Máxima potencia autorizada	50 kW
Radio de información a viajeros (50 W máximo, 10 W usualmente)	En incrementos de 10 kHz desde 530 a 1,700 kHz

con estación dominante de este canal. A menudo, para evitar la interferencia, estas estaciones secundarias deben operar con patrones direccionales de antena, de tal forma que haya un nulo en la dirección de la estación dominante. Esto es de especial importancia para la operación nocturna, cuando la propagación de onda celeste permite que una estación de canal claro cubra la mitad de Estados Unidos.

Las estaciones clase B operan tiempo completo para cubrir un área regional. La mayoría posee una potencia de 5 kW, aunque algunas funcionan hasta con 50 kW. Las estaciones clase C cubren un área local también de tiempo completo y la mayoría opera con una potencia de 1 kW. Cientos de estaciones de esta clase se asignan a cada frecuencia de canal local (consulte la tabla 5-1), de tal manera que la interferencia de onda celeste nocturna es grande en estas frecuencias. Debido a esta interferencia, el radio de cobertura nocturno de una estación clase C puede ser tan pequeño como de 5 millas desde el sitio de transmisión. Las estaciones clase D, por su parte, operan de día, algunas con potencias tan grandes como 50 kW y, si se les permite transmitir durante la noche, con una potencia nocturna de 250 watts o menos.

Las estaciones de AM de difusión internacional, las cuales operan en las bandas de onda corta (de 3 a 30 MHz), generalmente funcionan con altos niveles de potencia. Algunas de éstas alimentan 500 kW de potencia de portadora hacia antenas direccionales que producen niveles de potencia radiada efectiva en el rango de los megawatts (es decir, cuando se incluye la ganancia de la antena direccional).

Difusión digital por AM

En Estados Unidos la FCC ha adoptado el sistema iBiquity *canal dentro de banda* (IBOC, por sus siglas en inglés) para la difusión digital en la banda de AM (es decir, onda media, 540 a 1,700 kHz). Este sistema provee una transmisión simultánea de datos digitales de audio y datos digitales auxiliares a través de una señal AM convencional (modulada por audio analógico). En consecuencia, se puede utilizar un receptor de AM convencional para recibir el audio analógico. Un receptor IBOC, por su parte, puede emplearse, con su codec incorporado, para convertir la parte digital de la señal AM IBOC a audio en estéreo. Si la señal AM IBOC recibida es débil, el usuario escuchará el audio analógico convencional de la parte AM de la señal□si es fuerte, entonces el audio decodificado tendrá una calidad casi de CD en estéreo (ancho de banda de audio de 15 kHz), como se decodifica a partir de los datos IBOC. A su vez, si la señal oscila entre débil y fuerte, entonces el receptor producirá una mezcla del audio obtenido de las partes AM e IBOC.

La multiplexión ortogonal por división de frecuencias (OFDM), como se analizará en la sección 5-12, se utiliza para producir la señal IBOC. Para ello, los datos del codec transmisor se dividen en seis grupos de OFDM colocados dentro, o adyacentes a la bandas laterales de la señal AM convencional. Tres de los grupos de OFDM se colocan en la banda lateral superior y tres en la inferior. Estas bandas laterales son independientes, pero los datos se dividen a fin de que sólo se requiera una banda lateral para recuperar el audio a una calidad reducida. No obstante, para recuperar el audio completo en estéreo de alta fidelidad se necesitan datos de ambas bandas laterales (todos los seis grupos de OFDM).

El ancho de banda de la señal IBOC es de 30 kHZ, pero el espacio de portadora entre las estaciones sigue siendo de 10 kHz. En consecuencia, habrá posibilidad de interferencia con las estaciones asignadas a los canales adyacentes. Sin embargo, la frecuencia asignada de la estación AM es tal que los canales adyacentes se adjudican sólo a ubicaciones lejanas. Durante el día existe poca o casi nula interferencia con las estaciones lejanas de tales canales, pero durante la noche, por la propagación de la onda celeste, se pueden escuchar estaciones en casi todos los canales de AM. Por tanto, en la noche las estaciones IBOC causan interferencia a estas estaciones en canales adyacentes. Por ello, actualmente la FCC no permite transmisión IBOC en horarios nocturnos. Sin embargo, se continúan realizando pruebas para determinar cómo se puede minimizar esta interferencia nocturna de canales adyacentes de las estaciones IBOC.

Existe cierto número de estaciones de AM que transmite por AM IBOC. Para mayor información sobre esta técnica y un listado de las estaciones que transmiten en AM IBOC, busque en Internet el término IBOC AM.

Hay muchas maneras de transmitir señales de audio digitales en las bandas de onda baja, media y corta. Un método popular en desarrollo para la onda corta es el radio digital Mondiale (DRM, por sus siglas en inglés). Esta técnica utiliza una transmisión completamente digital, así que no se puede utilizar un receptor de onda corta convencional con detector de AM para su recepción, y en cambio se requiere un receptor DRM para recuperar el audio. Esta tecnología tiene la ventaja de que es vigorosa para un canal en decadencia y además proporciona una buena calidad de audio. Para mayores detalles acerca del DRM consulte [Hofmann, *et al.*, 2003] y www.drm.org.

5–3 DOBLE BANDA LATERAL CON PORTADORA SUPRIMIDA

Una señal de *doble banda lateral con portadora suprimida* (DSB-SC) es una señal AM con una portadora discreta suprimida. La señal DSB-SC se genera mediante

$$s(t) = A_c m(t) \cos \omega_c t \tag{5–13}$$

donde se asume que $m(t)$ cuenta con un nivel de DC igual a cero para el caso de la portadora suprimida. El espectro es idéntico al de la AM obtenido con la ecuación (5-12), a excepción de que las funciones delta a $\pm f_c$ estén ausentes. Esto es, el espectro para DSB-SC es

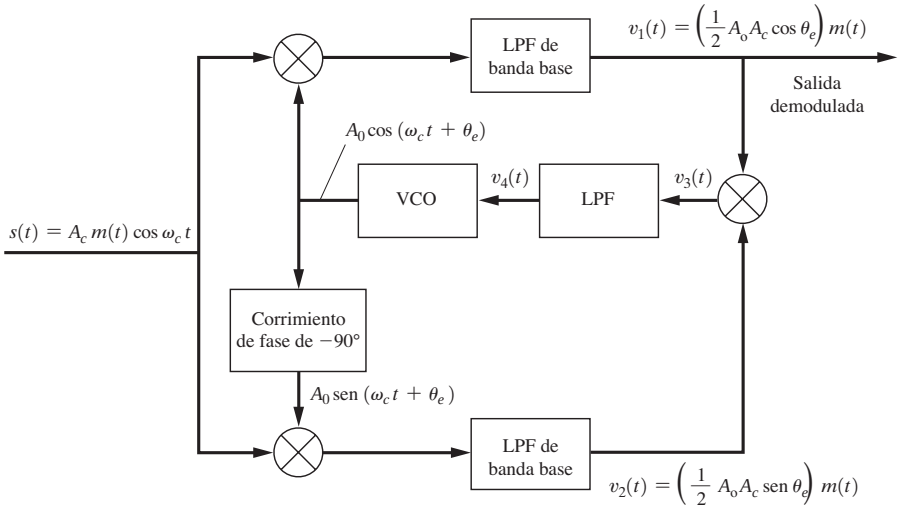
$$S(f) = \frac{A_c}{2} [M(f - f_c) + M(f + f_c)] \tag{5–14}$$

Si se compara con una señal AM, el porcentaje de modulación en una señal DSB-SC es infinito, ya que no existe un componente de línea portadora. Más aún, la eficiencia de modulación de esta señal es de 100□ debido a que no se gasta potencia en una portadora discreta. Sin embargo, se requiere un detector de producto, el cual es más costoso que un detector de envolvente, para la demodulación de la señal DSB-SC. Si el circuito de transmisión restringe la señal modulada a cierto valor pico, por ejemplo A_p, entonces se puede demostrar (vea el problema 5-8) que la potencia de banda lateral de una señal DSB-SC es *cuatro* veces la de una señal AM comparable con el mismo nivel pico. En este caso, la señal DSB-SC posee una ventaja de potencia cuadruplicada sobre una señal AM.

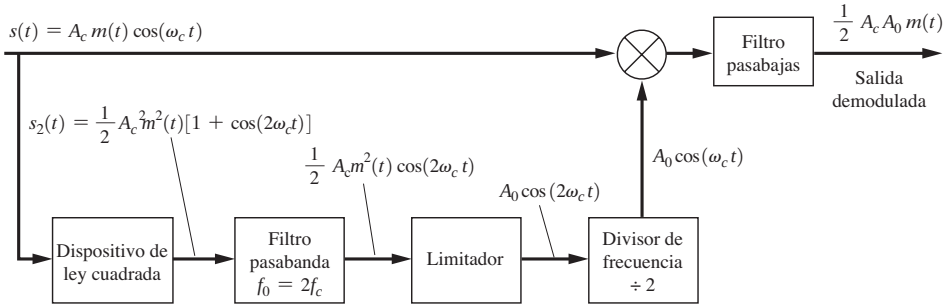
Si $m(t)$ es una señal de datos polares binarios (en lugar de una señal de audio), entonces la ecuación (5-13) es una señal BPSK, como se describió en el ejemplo 2-18. La sección 5-9 ampliará los detalles sobre la señalización BPSK. Como se muestra en la tabla 4-1, una señal QM puede generarse añadiendo dos señales DSB donde haya dos señales, $m_1(t)$ y $m_2(t)$, portadoras moduladoras de coseno y seno, respectivamente.

5–4 LAZO DE COSTAS Y LAZO CUADRÁTICO

La referencia coherente para detectar el producto de DSB-SC no se puede obtener mediante un lazo seguidor enganchado por fase ordinaria, ya que no hay componentes espectrales de línea en $\pm f_c$. Sin embargo, debido a que la señal DSB-SC posee un espectro simétrico respecto de la frecuencia de la portadora (suprimida), se puede utilizar cualquiera de los dos tipos de lazos de recuperación de portadora que se observan en la figura 5-3 para demodular dicha señal. La figura 5-3a muestra el *PLL de Costas* y la figura 5-3b, el *lazo cuadrático*. El rendimiento del ruido para ambos lazos es equivalente [Ziemer y Peterson, 1985], así que la opción de cuál implementar depende del costo



(a) Lazo enganchado por fase de Costas


$s(t) = A_c\, m(t) \cos(\omega_c t)$
Filtro pasabajas
$\frac{1}{2} A_c A_0\, m(t)$
Salida demodulada
$s_2(t) = \frac{1}{2} A_c^2 m^2(t)[1 + \cos(2\omega_c t)]$
$\frac{1}{2} A_c m^2(t) \cos(2\omega_c t)$
$A_0 \cos(\omega_c t)$
$A_0 \cos(2\omega_c t)$
Dispositivo de ley cuadrada
Filtro pasabanda $f_0 = 2f_c$
Limitador
Divisor de frecuencia ÷ 2

(b) Lazo cuadrático

Figura 5–3 Lazos de recuperación de portadora para señales DSB-SC.

relativo de sus componentes y de la exactitud que se puede lograr cuando se construye cada uno de ellos.

Como se registra en la figura 5-3a, el PLL de Costas se analiza asumiendo que el VCO se engancha a la frecuencia de la portadora suprimida de entrada, f_c, con un error constante en fase de θ_e. Entonces los voltajes $v_1(t)$ y $v_2(t)$ se obtienen a la salida de los filtros pasabajas de banda base, como puede advertirse. □a que θ_e es pequeño, la amplitud de $v_1(t)$ es relativamente grande comparada con la de $v_2(t)$ (es decir, cos $\theta_e \gg$ sen θ_e). Más aún, $v_1(t)$ es proporcional a $m(t)$, así que éste es la salida demodulada (detector de producto). El voltaje producto $v_3(t)$ es

$$v_3(t) = \tfrac{1}{2}\ (\tfrac{1}{2}A_0A_c)^2 m^2(t)\ \text{sen}\ 2\theta_e$$

El voltaje $v_3(t)$ se filtra con un LPF que tiene una frecuencia de corte cercano al valor DC, así que este filtro actúa como un integrador para producir el voltaje de control de DC del VCO

$$v_4(t) = K\ \text{sen}\ 2\theta_e$$

donde $K = \frac{1}{2}\ (\frac{1}{2}A_0A_c)^2\langle m^2(t)\rangle$ y $\langle m^2(t)\rangle$ es el nivel de DC de $m^2(t)$. Este voltaje de control de DC es suficiente para mantener el VCO enganchado a f_c, con un pequeño error en fase θ_e.

El lazo cuadrático se analiza en la figura 5-3b con el fin de evaluar la expresión para la salida de la señal en cada bloque de componente, tal como puede observarse. Se puede utilizar ya sea el PLL de Costas o el lazo cuadrático para demodular una señal DSB-SC ya que, en cada uno de los casos, la salida es $Cm(t)$, donde C es una constante. Más aún, cualquiera de estos lazos es útil para recuperar (es decir, demodular) una señal BPSK, pues ésta tiene la misma forma matemática de una señal DSB-SC, donde $m(t)$ es una señal de datos polar NRZ, como puede verificarse en la figura 3-15c.

El PLL de Costas y el lazo cuadrático enfrentan una gran desventaja: una ambigüedad de 180° de fase. Por ejemplo, suponga que la entrada es $-A_c m(t) \cos \omega_c t$ en lugar de $+A_c m(t) \cos \omega_c t$. Si se recuerdan los pasos del análisis anterior, se puede observar que la salida se describiría *exactamente* mediante la misma ecuación previamente obtenida. Así, cada vez que se energiza el lazo, éste tiene la misma probabilidad de engancharse, de tal manera que la señal demodulada es proporcional tanto a $-m(t)$ como a $m(t)$. Por ello no se puede estar seguro de la polaridad de la salida. Esto no es problemático si $m(t)$ es una señal de audio monofónico, ya que $-m(t)$ se escucha igual por el oído humano que $m(t)$. Sin embargo, si este último es una señal de datos polar, entonces los 1 binarios pueden resultar en 0 binarios después de energizar el circuito, o viceversa. Como se vio en el capítulo 3, existen dos maneras de nulificar la ambigüedad de 180° en fase: *1*) se puede enviar una señal de prueba conocida a través del sistema después de encender el lazo para así determinar el sentido de la polaridad, y *2*) se puede utilizar la codificación y decodificación diferencial.

5–5 SEÑALES ASIMÉTRICAS DE BANDA LATERAL

Banda lateral única

DEFINICIÓN. Una señal de *banda lateral única superior* (USSB) tiene un espectro con valor de cero para $|f| < f_c$, donde f_c es la frecuencia de la portadora.

Una señal de *banda lateral única inferior* (LSSB) tiene un espectro con valor de cero para $|f| > f_c$, donde f_c es la frecuencia de la portadora.

Hay numerosas maneras de elaborar un mapa de la modulación $m(t)$ a la envolvente compleja $g[m]$, de tal forma que se pueda obtener una señal SSB. La tabla 4-1 incluye algunos de estos métodos. SSB-AM es hasta ahora el tipo más popular. Lo utilizan ampliamente los militares y los radioaficionados en los sistemas de comunicación de alta frecuencia (HF). Es popular porque el ancho de banda es el mismo que el de la señal moduladora, el cual, a su vez, representa la mitad del de una señal AM o DSB-SC. Por tales razones, estas secciones se concentrarán en el tipo de señal SSB. En una aplicación típica, el término *SSB* se refiere al tipo SSB-AM de señal, a menos que se mencione lo contrario.

TEOREMA. *Una señal SSB (es decir, del tipo SSB-AM) se obtiene utilizando la envolvente compleja*

$$g(t) = A_c[m(t) \pm j\hat{m}(t)] \tag{5–15}$$

el cual resulta en una forma de onda de señal SSB

$$s(t) = A_c[m(t) \cos \omega_c t \mp \hat{m}(t) \operatorname{sen} \omega_c t] \tag{5–16}$$

donde el signo superior (−) se emplea para la USSB y el signo inferior (+) para la LSSB. $\hat{m}(t)$ *denota la transformada de Hilbert de* $m(t)$*, la cual se obtiene de*[3]

$$\hat{m}(t) \triangleq m(t) * h(t) \tag{5–17}$$

donde

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \tag{5–18}$$

y $H(f) = \mathcal{F}[h(t)]$ *corresponde a una red con corrimiento de fase de* $-90°$:

$$H(f) = \begin{cases} -j, & f > 0 \\ j, & f < 0 \end{cases} \tag{5–19}$$

La figura 5-4 ilustra este teorema. Suponga que $m(t)$ tiene un espectro de magnitud de forma triangular, como se advierte en la figura 5-4a. Entonces, en el caso de USSB (signos superiores), el espectro de $g(t)$ es de cero para las frecuencias negativas, como se ilustra en la figura 5-4b, y $s(t)$ posee el espectro de USSB que se registra en la figura 5-4c. Este resultado se puede demostrar como sigue:

Demostración. Se requiere mostrar que el espectro de $s(t)$ es de cero en la banda lateral apropiada, dependiendo del signo elegido. Tomando la transformada de Fourier de la ecuación (5-15), se tiene que

$$G(f) = A_c\{M(f) \pm j\mathcal{F}[\hat{m}(t)]\} \tag{5–20}$$

y, utilizando la ecuación (5-17), se encuentra que la ecuación se convierte en

$$G(f) = A_c M(f)[1 \pm jH(f)] \tag{5–21}$$

Para demostrar el resultado en caso de USSB se escoge el signo superior. Así que a partir de la ecuación (5-19) la ecuación (5-21) se convierte en

$$G(f) = \left\{ \begin{array}{ll} 2A_c M(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{array} \right\} \quad \text{(para el caso de USSB)} \tag{5–22}$$

Sustituyendo la ecuación (5-22) dentro de la ecuación (4-15), resultan en la señal pasabanda:

$$S(f) = A_c \left\{ \begin{array}{ll} M(f - f_c), & f > f_c \\ 0, & f < f_c \end{array} \right\} + A_c \left\{ \begin{array}{ll} 0, & f > -f_c \\ M(f + f_c), & f < -f_c \end{array} \right\} \tag{5–23}$$

Ésta es, de hecho, la señal USSB (vea la figura 5-4).

De haberse escogido los signos inferiores de la ecuación (5-21), entonces se habría obtenido una señal LSSB.

La *potencia promedio normalizada* de la señal SSB es

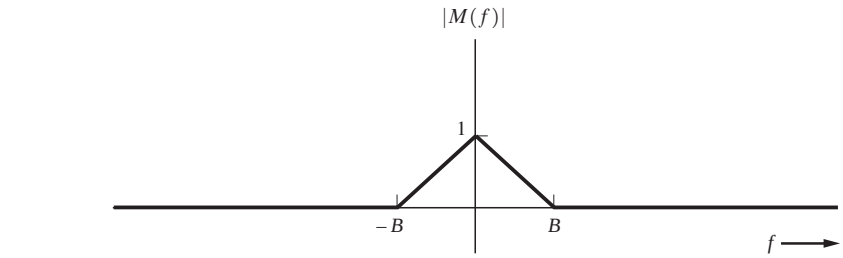
$$\langle s^2(t)\rangle = \tfrac{1}{2}\langle |g(t)|^2\rangle = \tfrac{1}{2} A_c^2 \langle m^2(t) + [\hat{m}(t)]^2\rangle \tag{5–24}$$

Como se muestra en el problema de estudio SA5-1, $\langle \hat{m}(t)^2\rangle = \langle m^2(t)\rangle$, de tal forma que la potencia de la señal SSB es

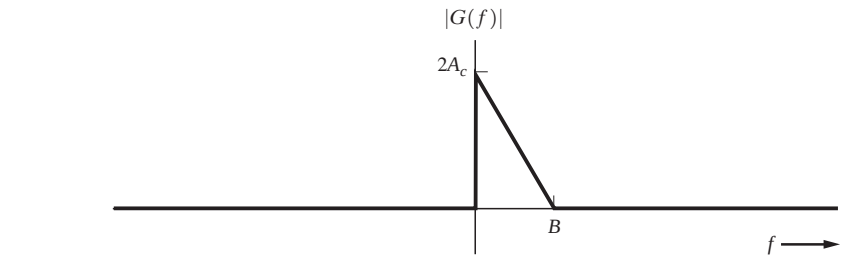
$$\langle s^2(t)\rangle = A_c^2 \langle m^2(t)\rangle \tag{5–25}$$

la cual es la potencia de la señal moduladora $\langle m^2(t)\rangle$ multiplicada por el factor de ganancia de potencia A_c^2.

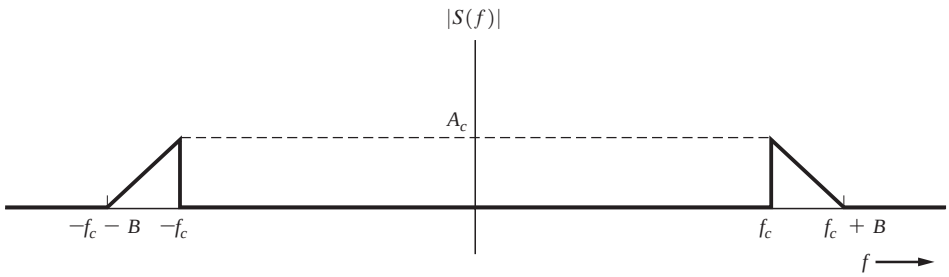
[3] En la sección A-7 (apéndice A) se presenta una tabla de los pares de la transformada de Hilbert.



(a) Espectro de magnitud de banda base



(b) Magnitud del espectro correspondiente de la envolvente compleja para la USSB



(c) Magnitud del espectro correspondiente de la señal USSB

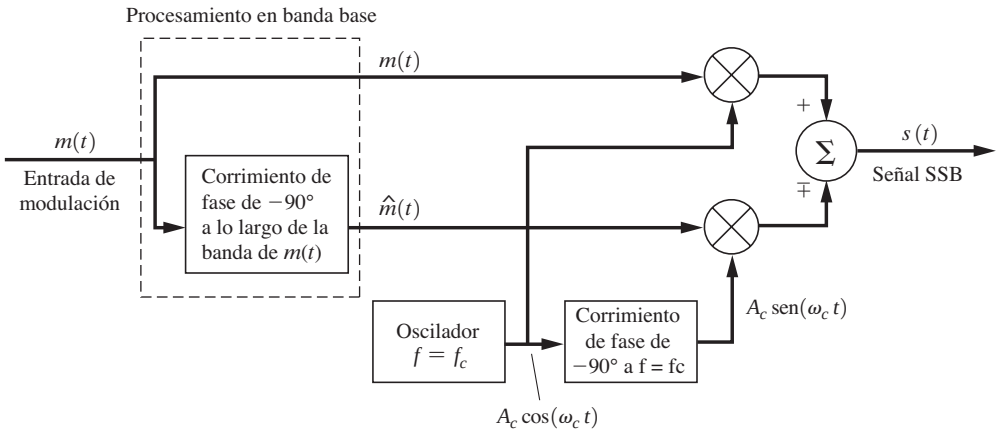
Figura 5–4 Espectro para una señal USSB.

La *potencia pico de la envolvente normalizada (PEP)* es

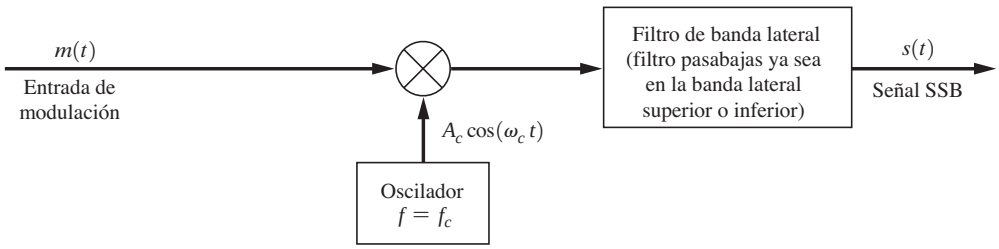
$$\tfrac{1}{2}\,\text{máx}\{|g(t)|^2\} = \tfrac{1}{2}\,A_c^2\,\text{máx}\{m^2(t) + [\hat{m}(t)]^2\} \tag{5–26}$$

La figura 5-5 ofrece dos técnicas para generar la señal SSB. El *método de puesta en fase* es idéntico a la forma canónica de IQ discutida anteriormente (figura 4-28), como se aplica a la generación de señales SSB. El *método de filtrado* es un caso especial, en el cual se utiliza un procesamiento de RF, con un filtro de banda lateral, para formar el $g(t)$ equivalente, en lugar de recurrir a un procesamiento de banda base para generar $g[m]$ directamente. El método de filtrado es el más popular gracias a que se puede obtener una excelente supresión de banda lateral cuando se utiliza un filtro de cristal para el filtro de banda lateral.[4] Los filtros de cristal son relativamente económicos cuando se producen en cantidad a frecuencias de IF estándares. Además de las dos técnicas referidas para la generación de SSB, existe una tercera, llamada *método de Weaver* [Weaver, 1956]. Éste se

[4] Una excelente supresión de banda lateral es posible porque el audio de calidad para comunicaciones tiene un contenido espectral insignificante, por debajo de los 300 Hz. Por tanto, se puede diseñar al filtro de banda lateral para que éste suministre la atenuación de banda lateral requerida sobre una banda de transición de $2 \times 300 = 600$ Hz.



(a) Método de puesta en fase


m(t)
Entrada de modulación
Filtro de banda lateral (filtro pasabajas ya sea en la banda lateral superior o inferior)
s(t)
Señal SSB
Ac cos(ωc t)
Oscilador f = fc

(b) Método de filtrado

Figura 5–5 Generación de SSB.

describe en la figura P5-12 y el problema 5-12. Un transmisor de SSB práctico incorpora un convertidor elevado para transformar la señal SSB en la frecuencia de operación deseada y utiliza un amplificador clase B para amplificar la señal al nivel de potencia que se quiera.

Las señales SSB poseen *tanto* AM *como* PM. Aplicando la ecuación (5-15) se tiene que, para el componente de AM (envolvente real),

$$R(t) = |g(t)| = A_c \sqrt{m^2(t) + [\hat{m}(t)]^2} \tag{5–27}$$

y para el componente de PM,

$$\theta(t) = \underline{/g(t)} = \tan^{-1}\left[\frac{\pm \hat{m}(t)}{m(t)}\right] \tag{5–28}$$

Las señales SSB pueden captarse mediante un receptor superheterodino que incorpora un detector de producto con $\theta_0 = 0$. Por tanto, la salida del receptor es

$$v_{\text{salida}}(t) = K\,\text{Re}\{g(t)\,e^{-j\theta_0}\} = KA_c m(t) \tag{5–29}$$

donde K depende de la ganancia del receptor y de la pérdida en el canal. Cuando se detectan las señales SSB con modulación de audio, la fase de referencia θ_0 no tiene que ser de cero, ya que se escucha la misma armonía independientemente del valor utilizado para la fase [aunque la forma de onda $v_{\text{salida}}(t)$ será drásticamente diferente, dependiendo del valor de θ_0]. En la modulación digital la fase debe ser exactamente correcta, para preservar la forma de la onda digital. Más aún, SSB es una pobre técnica de modulación *si* la señal de datos moduladora consiste de un código de línea con

una forma de pulso *rectangular*. Esta disposición rectangular (tiempo cero de elevación) ocasiona que el valor de la forma de onda SSB-AM sea infinito, adyacente a los tiempos de conmutación de los datos, debido a la operación de la transformada de Hilbert. (Este resultado se demostrará en un problema de tarea.) Por tanto, una señal SSB con este tipo de modulación no se puede generar con cualquier dispositivo práctico, pues un dispositivo sólo puede producir señales con valores pico finitos. Sin embargo, si en los códigos de línea se utilizan formas de pulso con caída, tales como los pulsos (sen x)/x, entonces la señal SSB tendrá un valor pico razonable y se podrán transmitir datos digitales a través suyo.

La SSB posee muchas ventajas, tales como una superior relación señal a ruido detectada en comparación con la de AM (consulte el capítulo 7) y por el hecho de que tiene la mitad del ancho de banda de las señales AM o DSB-SC. (Para información adicional acerca de este tema consulte un libro dedicado totalmente a la SSB [Sabin y Schoenike, 1987]).

Banda lateral vestigial

En ciertas aplicaciones (como en la difusión por televisión), la técnica de modulación de DSB toma demasiado ancho de banda para el canal (de televisión) y la implantación de una técnica de SSB es demasiado costosa, a pesar de que sólo tome la mitad del ancho de banda. En este caso, a menudo se llega a un compromiso entre la DSB y la SSB llamado *banda lateral vestigial* (VSB, por sus siglas en inglés). La VSB se obtiene mediante la supresión parcial de una de las bandas laterales de la señal DSB. La señal DSB puede ser una señal AM o una señal DSB-SC. Este enfoque se ilustra en la figura 5-6, donde se atenúa una de las bandas laterales de la señal DSB mediante un filtro pasabanda, llamado filtro de banda lateral vestigial, el cual posee una respuesta en frecuencia asimétrica alrededor de $\pm f_c$. La señal VSB se obtiene mediante

$$s_{\text{VSB}}(t) = s(t) * h_v(t) \tag{5–30}$$

donde $s(t)$ es la señal DSB que se describe ya sea por la ecuación (5-4) con portadora o la ecuación (5-13) con portadora suprimida, y $h_v(t)$ es la respuesta al impulso del filtro de VSB. El espectro de la señal VSB es

$$S_{\text{VSB}}(f) = S(f)H_v(f) \tag{5–31}$$

como se ilustra en la figura 5-6d.

La modulación en la señal VSB se puede recuperar con un receptor que utilice una detección de producto o, si una portadora grande está presente, mediante una detección de envolvente. Para recuperar la modulación sin distorsión, la función de transferencia para el filtro de VSB debe satisfacer la siguiente restricción:

$$H_v(f - f_c) + H_v(f + f_c) = C, \quad |f| \leq B \tag{5–32}$$

donde C es una constante y B es el ancho de banda de la modulación. Una aplicación de esta restricción se muestra en la figura 5-6e, donde la condición especificada por la ecuación (5-32) se satisface para la característica del filtro de VSB ilustrada en la figura 5-6c.

La necesidad de restricción de la ecuación (5-32) se demostrará a continuación. Suponiendo que $s(t)$ es una señal DSB-SC, entonces, a través de las ecuaciones (5-14) y (5-31) el espectro de la señal VSB es

$$S_{\text{VSB}}(f) = \frac{A_c}{2}\left[M(f - f_c)H_v(f) + M(f + f_c)H_v(f)\right]$$

Considerando la figura 4-14, se observa que la salida del detector de producto es

$$v_{\text{salida}}(t) = [A_0 s_{\text{VSB}}(t) \cos \omega_c t] * h(t)$$

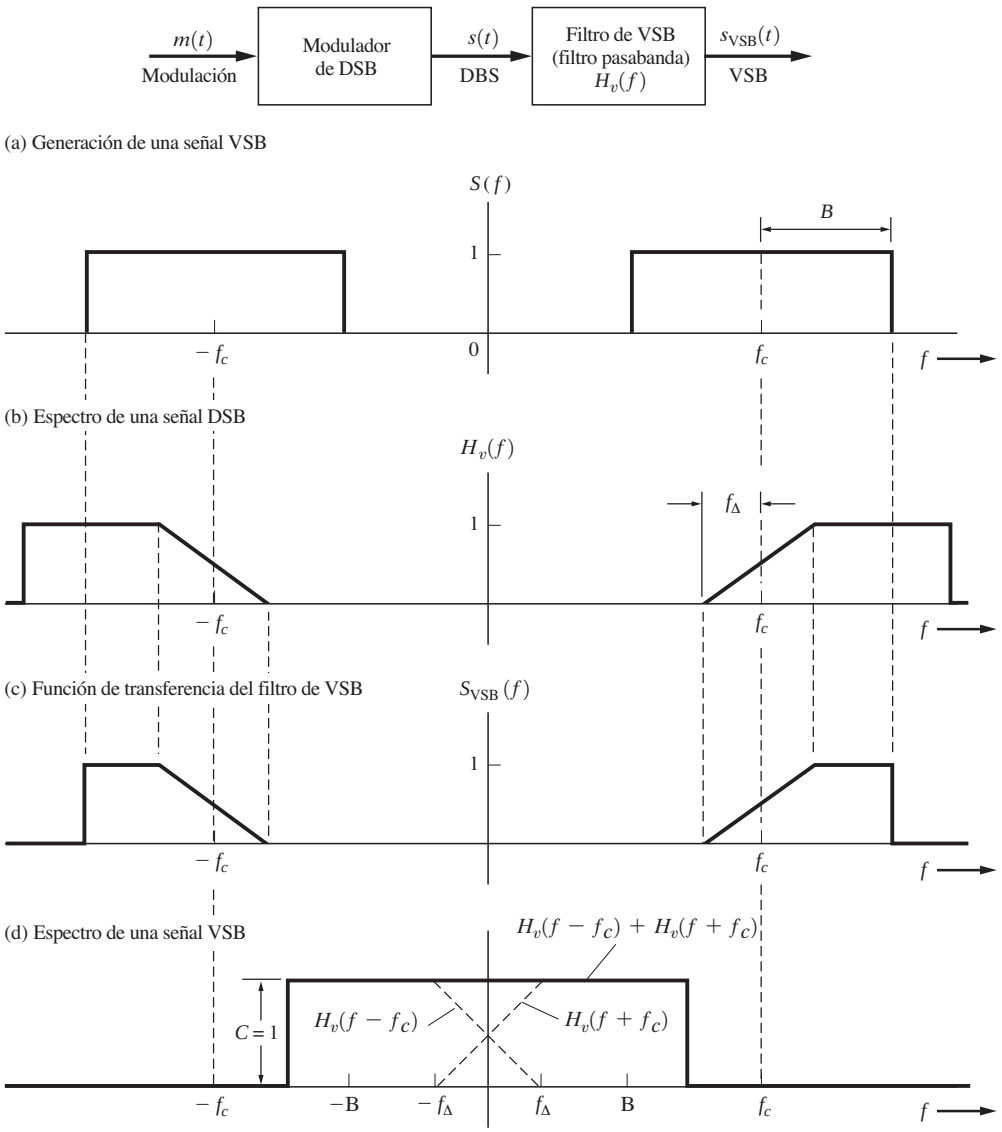


Figura 5–6 Transmisor y espectros de VSB.

donde $h(t)$ es la respuesta al impulso del filtro pasabajas de ancho de banda de B hertz. En el dominio de frecuencias esta ecuación se convierte en

$$V_{\text{salida}}(f) = A_0 \{S_{\text{VSB}}(f) * [\tfrac{1}{2}\delta(f-f_c) + \tfrac{1}{2}\delta(f+f_c)]\} H(f)$$

donde $H(f) = 1$ para $|f| < B$, y 0 para f en cualquier otro caso. Sustituyendo para $S_{\text{VSB}}(f)$ y utilizando la propiedad convolucional $x(f) * \delta(f-a) = x(f-a)$ resulta en

$$V_{\text{salida}}(f) = \frac{A_c A_0}{4}\,[M(f)H_v(f-f_c) + M(f)H_v(f+f_c)], \quad |f| < B$$

o

$$V_{\text{salida}}(f) = \frac{A_c A_0}{4}\,M(f)\,[H_v(f-f_c) + H_v(f+f_c)], \quad |f| < B$$

Si $H_v(f)$ satisface la restricción de la ecuación (5-32), entonces ésta se convierte en

$$V_{\text{salida}}(f) = KM(f)$$

o $V_{\text{salida}}(t) = Km(t)$, donde $K = A_c A_0/4$, lo cual demuestra que la salida del detector de producto no presenta distorsión cuando se satisface la ecuación (5-32).

Como se analizará en el capítulo 8, la televisión de difusión tanto analógica como digital emplean la VSB para reducir el ancho de banda requerido en el canal a 6 MHz. Para la televisión analógica, como se muestra en la figura 8-31c, la respuesta en frecuencia del transmisor de video de TV es plana a lo largo de la banda lateral superior hasta 4.2 MHz por arriba de la frecuencia de la portadora de video, y es plana a lo largo de la banda lateral inferior hasta, 0.75 MHz, por debajo de la frecuencia de la portadora. El filtro de IF en el receptor de TV posee la característica de filtro de VSB observado en la figura 5-6c, donde $f\Delta = 0.75$ MHz. Esto da por resultado una característica general de respuesta en frecuencia que satisface la restricción de la ecuación (5-32), de tal manera que la modulación de video en la señal VSB visual de TV se puede recuperar sin distorsión en el receptor.

La TV digital (para Estados Unidos, consulte la sección 8-9) utiliza un filtro de coseno realzado con $r = 0.0575$ en el transmisor para obtener la VSB, como se registra en la figura 8-39. En la práctica se emplea un filtro de coseno realzado tanto en el transmisor de TV digital como en el receptor para generar la característica general de coseno realzado, y con ello minimizar el efecto del ruido en el canal, así como la ISI. (Consulte la sección 3-6.) Esta respuesta general también satisface la ecuación (5-32), así que la señal de TV digital (datos seriales de ocho niveles) se puede recuperar sin distorsión o ISI.

5–6 MODULACIÓN EN FASE Y MODULACIÓN EN FRECUENCIA

Representación de señales PM y FM

La *modulación en fase* (PM) y la *frecuencia modulada* (FM) son casos especiales de señalización modulada por ángulo. En este tipo de señalización la envolvente compleja es

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)} \tag{5–33}$$

Aquí la envolvente real, $R(t) = |g(t)| = A_c$, es una constante, y la fase $\theta(t)$ es una función lineal de la señal de modulación $m(t)$. Sin embargo, $g(t)$ es una función *no lineal* de la modulación. Aplicando la ecuación (5-33), se encuentra que la *señal modulada por ángulo* es

$$s(t) = A_c \cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{5–34}$$

Para PM, la fase es directamente proporcional a la señal de modulación—esto es,

$$\theta(t) = D_p m(t) \tag{5–35}$$

donde la constante de proporcionalidad D_p es la sensibilidad de fase del modulador de fase, que tiene unidades de radianes por volt [asumiendo que $m(t)$ es una forma de onda de voltaje]. Para FM, la fase es proporcional a la integral de $m(t)$—así que

$$\theta(t) = D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\, d\sigma \tag{5–36}$$

donde la constante de desviación de frecuencia D_f tiene unidades de radianes/volt-segundo.

Si se comparan las dos últimas ecuaciones, observamos que se tiene una señal PM modulada por $m_p(t)$, y *también* hay FM en la señal, correspondiente a una forma de onda de modulación *diferente* que se obtiene a partir de

$$m_f(t) = \frac{D_p}{D_f}\left[\frac{dm_p(t)}{dt}\right] \tag{5–37}$$

donde los subíndices f y p denotan la frecuencia y fase, respectivamente. De manera similar, si se tiene una señal FM modulada por $m_f(t)$, la modulación en fase correspondiente en esta señal es

$$m_p(t) = \frac{D_f}{D_p} \int_{-\infty}^{t} m_f(\sigma)\, d\sigma \tag{5–38}$$

De esta ecuación se tiene que un circuito de PM se puede utilizar para sintetizar un circuito de FM si se inserta un integrador en cascada con la entrada del modulador de fase. (Vea la figura 5-7a).

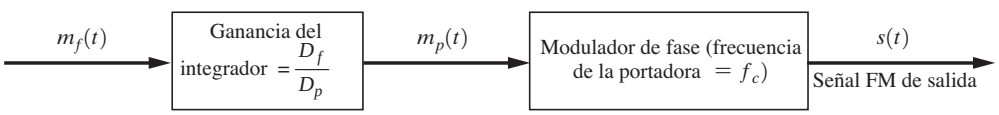
Los circuitos de PM directa son dispuestos pasando una señal senoidal sin modulación a través de un circuito variable en el tiempo, el cual introduce un corrimiento de fase que varía con el voltaje modulador aplicado. (Vea la figura 5-8a.) D_p es la ganancia del circuito de PM (rad/V). De la misma manera, un circuito de FM directa se obtiene variando la sintonización de un circuito de tanque oscilador (resonante) de acuerdo con el voltaje de modulación. Esto se muestra en la figura 5-8b, donde D_f es la ganancia del circuito modulador, la cual tiene unidades de radianes por volt-segundo.

DEFINICIÓN. Si una señal pasabanda se representa mediante

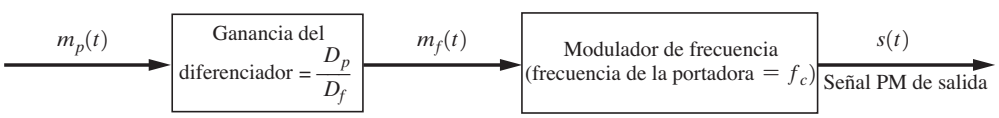
$$s(t) = R(t) \cos \psi(t)$$

donde $\psi(t) = \omega_c t + \theta(t)$, por consiguiente la frecuencia *instantánea* (hertz) de $s(t)$ es [Boashash, 1992]

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\omega_i(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{d\psi(t)}{dt}\right]$$

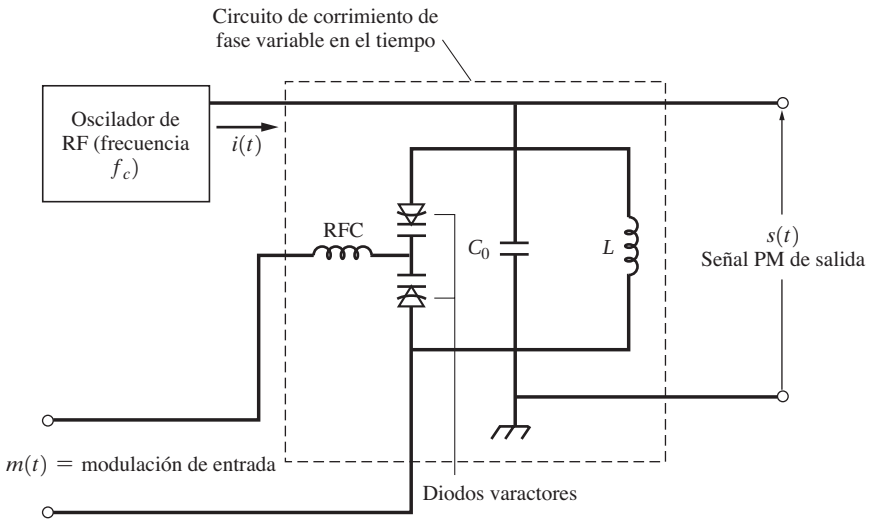


(a) Generación de FM utilizando un modulador de fase

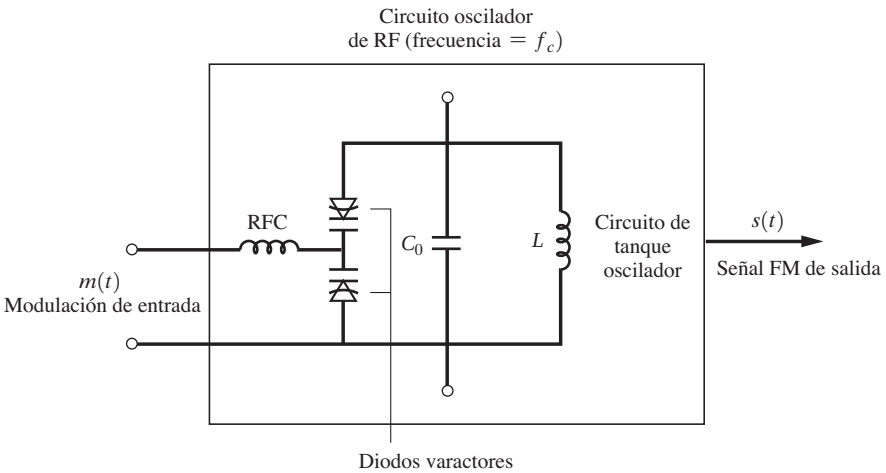


(b) Generación de PM utilizando un modulador de frecuencia

Figura 5–7 Generación de FM a partir de PM y viceversa.



(a) Un circuito modulador de fase



(b) Un circuito modulador de frecuencia

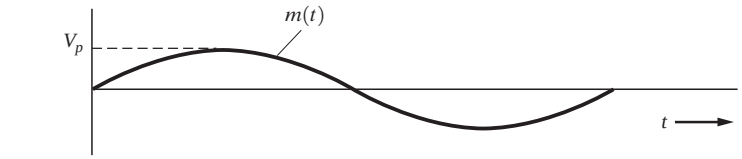
Figura 5–8 Circuitos moduladores de ángulo. RFC = bobina de radiofrecuencia.

o

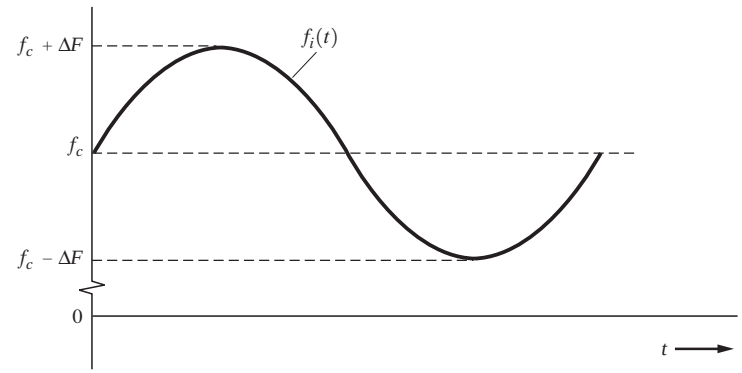
$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{d\theta(t)}{dt}\right] \tag{5–39}$$

Para el caso de FM, aplicando la ecuación (5-36) se obtiene la frecuencia instantánea

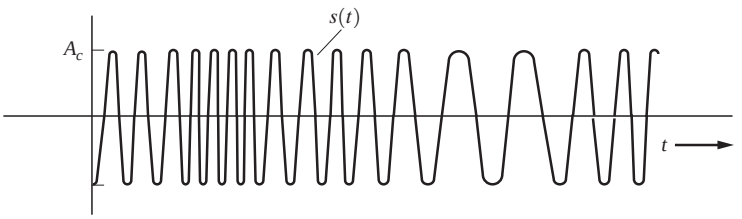
$$f_i(t) = f_c + \frac{1}{2\pi} D_f m(t) \tag{5–40}$$



(a) Señal moduladora senoidal



(b) Frecuencia instantánea de la señal FM correspondiente



(c) Señal FM correspondiente

Figura 5–9 FM con una señal moduladora senoidal de banda base.

Por supuesto que ésta es la razón por la que a este tipo de señalización se le llama *modulación en frecuencia*: la frecuencia instantánea varía alrededor de la frecuencia de la portadora asignada f_c de manera directamente proporcional a la señal moduladora $m(t)$. La figura 5-9b muestra cómo varía la frecuencia instantánea cuando se emplea una modulación senoidal (para propósitos ilustrativos). La señal FM resultante se observa en la figura 5-9c.

La frecuencia instantánea no se debe confundir con el término de *frecuencia* como es empleado en el espectro de la señal FM. El espectro se obtiene mediante la transformada de Fourier de $s(t)$ y se evalúa observando $s(t)$ sobre un intervalo de tiempo infinito ($-\infty < t < \infty$). Por tanto, el espectro indica las frecuencias presentes en la señal (en promedio) *a lo largo de todo el tiempo*. La frecuencia instantánea es aquella que está presente en un instante *particular* de tiempo.

La *desviación de frecuencia* de la frecuencia de la portadora es

$$f_d(t) = f_i(t) - f_c = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{d\theta(t)}{dt}\right] \tag{5–41}$$

y la *desviación pico de frecuencia* es

$$\Delta F = \text{máx}\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{d\theta(t)}{dt}\right]\right\} \tag{5–42}$$

Observe que ΔF es un número no negativo. En ciertas aplicaciones, como en la modulación digital (unipolar), se utiliza la desviación pico a pico. Ésta se define como

$$\Delta F_{\text{pp}} = \text{máx}\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{d\theta(t)}{dt}\right]\right\} - \text{mín}\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\frac{d\theta(t)}{dt}\right]\right\} \tag{5–43}$$

Para la señalización de FM, la desviación pico de frecuencia se relaciona con el voltaje pico modulador a través de

$$\Delta F = \frac{1}{2\pi} D_f V_p \tag{5–44}$$

donde $V_p = \text{máx}[m(t)]$, como se ilustra en la figura 5-9a.

De la figura 5-9 resulta obvio que un aumento en la amplitud de la señal de modulación V_p incrementará también a ΔF. Esto a su vez aumentará el ancho de banda de la señal FM, pero no afectará el nivel promedio de potencia de la señal, el cual es de $A_c^2/2$. Conforme V_p aumenta, los componentes espectrales aparecerán más y más lejos de la frecuencia de la portadora y los que están cercanos a ésta disminuirán en magnitud, ya que la potencia total en la señal permanece constante. (Para detalles más específicos vea el ejemplo 5-2.) Esta situación es completamente diferente de la señalización de AM, donde el nivel de modulación afecta la potencia en la señal, pero no su ancho de banda.

De manera similar, la *desviación pico de fase* se puede definir como

$$\Delta\theta = \text{máx}[\theta(t)] \tag{5–45}$$

la cual, para la PM, se relaciona con el voltaje pico modulador a través de

$$\Delta\theta = D_p V_p \tag{5–46}$$

donde $V_p = \text{máx}[m(t)]$.

Definición.[5] El *índice de modulación en fase* se obtiene a partir de

$$\beta_p = \Delta\theta \tag{5–47}$$

donde $\Delta\theta$ es la desviación pico de fase.

El *índice de modulación en frecuencia* se obtiene a partir de

$$\beta_f = \frac{\Delta F}{B} \tag{5–48}$$

donde ΔF es la desviación de frecuencia pico y B es el ancho de banda de la señal moduladora, la cual, para una modulación senoidal, es f_m la frecuencia de la senoidal.[6]

[5] Para señales digitales, algunas veces se utiliza una definición alternativa del índice de modulación, que en la literatura se denota mediante h. El índice de modulación digital es $h = 2\Delta\theta/\pi$, donde $2\Delta\theta$ es el máximo cambio en la desviación pico a pico de fase durante el tiempo que se toma en enviar un símbolo, T_s. [Consulte la ecuación (5-82).]

[6] Hablando estrictamente, el índice de FM se define sólo para la modulación de un solo tono (es decir, senoidal). Sin embargo, a menudo se utiliza para otras formas de onda, donde se selecciona B como la frecuencia más alta o dominante en la forma de onda moduladora.

En el caso de las señalizaciones de PM o FM con modulación *senoidal,* tal que las señales PM y FM poseen la misma desviación de frecuencia pico, entonces β_p es idéntica a β_f.

Espectros de señales moduladas por ángulo

A partir de la ecuación (4-12) se encuentra que el espectro de una señal modulada por ángulo se obtiene de

$$S(f) = \tfrac{1}{2}[G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)] \tag{5–49}$$

donde

$$G(f) = \mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}[A_c e^{j\theta(t)}] \tag{5–50}$$

Cuando se evaluaron los espectros para AM, DSB-SC y SSB, se pudieron obtener fórmulas relativamente simples para relacionar a $S(f)$ con $M(f)$. Éste no es el caso para la señalización de modulación por ángulo, ya que $g(t)$ es una función no lineal de $m(t)$. Por tanto, no se puede obtener una fórmula general que relacione a $G(f)$ con $M(f)$. Esto es desafortunado, pero es un hecho. Es decir, al evaluar el espectro para una señal modulada por ángulo se debe analizar la ecuación (5-50) caso por caso para la forma de onda moduladora de interés. Más aún, debido a que $g(t)$ es una función no lineal de $m(t)$, la superposición no se mantiene y el espectro de FM para la suma de dos formas de onda moduladoras no es el mismo que al adicionar los espectros de FM obtenidos cuando se emplearon las formas de onda individuales.

Un ejemplo de los espectros obtenidos para una señal modulada por ángulo se presenta en el capítulo 2 (consulte el ejemplo 2-18). En ese caso se realizó una modulación en fase en una portadora mediante una onda cuadrada, donde la desviación pico a pico de fase fue de 180°. Allí el espectro fue fácil de evaluar porque se trataba de un caso muy especial, donde la señal PM se reducía a una señal DSB-SC. En general, por supuesto, la aplicación de la ecuación (5-50) a una forma cerrada no es fácil, y a menudo debe recurrirse a técnicas numéricas para aproximar la integral de la transformada de Fourier. Un ejemplo para una forma de onda senoidal moduladora se desarrollará a continuación.

Ejemplo 5–2 ESPECTRO DE UNA SEÑAL PM O FM CON MODULACIÓN SENOIDAL

Suponga que la modulación en la señal PM es

$$m_p(t) = A_m \operatorname{sen} \omega_m t \tag{5–51}$$

Entonces

$$\theta(t) = \beta \operatorname{sen} \omega_m t \tag{5–52}$$

donde $\beta_p = D_p A_m = \beta$ es el índice de modulación en fase.

La misma función de fase $\theta(t)$ también puede obtenerse a partir de la ecuación (5-52) si se utiliza la FM, donde

$$m_f(t) = A_m \cos \omega_m t \tag{5–53}$$

y $\beta = \beta_f = D_f A_m / \omega_m$. La desviación pico de frecuencia sería $\Delta F = D_f A_m / 2\pi$.

La envolvente compleja es

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)} = A_c e^{j\beta \operatorname{sen} \omega_m t} \tag{5–54}$$

el cual es periódico con un periodo de $T_m = 1/f_m$. En consecuencia, $g(t)$ se puede representar mediante una serie de Fourier que sea válida todo el tiempo ($-\infty < t < \infty$)—es decir,

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \, e^{jn\omega_m t} \tag{5–55}$$

donde

$$c_n = \frac{A_c}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} (e^{j\beta \text{ sen } \omega_m t}) e^{-jn\omega_m t} \, dt \tag{5–56}$$

la cual se reduce a

$$c_n = A_c \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \text{ sen } \theta - n\theta)} \, d\theta \right] = A_c J_n(\beta) \tag{5–57}$$

Esta integral, conocida como *función de Bessel del primer tipo del n-ésimo orden*, $J_n(\beta)$, no se puede evaluar en forma cerrada, pero sí numéricamente. Algunos valores tabulados para $J_n(\beta)$ se presentan en la tabla 5-2. Hay disponibles tablas extensas de integrales [Abramowitz y Stegun, 1964], o se pueden calcular utilizando MATLAB. Las funciones de Bessel se invocan mediante llamadas estándares a funciones en programas matemáticos para computadoras personales, como el MATLAB. Un examen de la integral muestra que (al hacer un cambio en variables),

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta) \tag{5–58}$$

Un gráfico de las funciones de Bessel para varios órdenes de n como una función de β se muestra en la figura 5-10.

Tomando la transformada de Fourier de la ecuación (5-55) se obtiene

$$G(f) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \, \delta(f - nf_m) \tag{5–59}$$

o

$$G(f) = A_c \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(\beta) \delta(f - nf_m) \tag{5–60}$$

Aplicando este resultado en la ecuación (5-49) se logra el espectro de la señal modulada por ángulo. El espectro de magnitud para $f > 0$ se muestra en la figura 5-11 para los casos de $\beta = 0.2$, 1.0, 2.0, 5.0 y 8.0. Observe que el término de portadora discreta (a $f = f_c$) es proporcional a $|J_0(\beta)|$ y, en consecuencia, el nivel (magnitud) de la portadora discreta depende del índice de modulación. Éste será igual a cero si $J_0(\beta) = 0$, lo cual ocurre si $\beta = 2.40$, 5.52, y así sucesivamente, como se advierte en la tabla 5-3.

La figura 5-11 también muestra que el ancho de banda de la señal modulada por ángulo depende de β y de f_m. De hecho, se puede observar que 98% de la potencia total está contenido en el ancho de banda

$$B_T = 2(\beta + 1)B \tag{5–61}$$

donde β es el índice de modulación en fase o el índice de modulación en frecuencia, y B es el ancho de banda de la señal moduladora (el cual es f_m para una modulación senoidal).[7] Esta fórmula proporciona una expresión empírica para evaluar el ancho de banda de transmisión para señales PM o FM, y se conoce como *regla de Carson*. B_T se muestra en la figura 5-11 para varios valores de β. La regla de Carson es muy importante, ya que ofrece una fórmula fácil para calcular el ancho de

[7] Para FM (y no PM), donde $2 < B < 10$, la regla de Carson, ecuación (5-61), en realidad subestima en cierta forma a B_T. En este caso, una mejor aproximación es $B_T = 2(\beta + 2)B$. Además, si la señal de modulación presenta discontinuidades, como en una modulación de onda cuadrada, ambas fórmulas pueden no ser muy exactas, y entonces B_T se debe evaluar examinando el espectro de la señal modulada por ángulo. Sin embargo, para evitar confusión en el cálculo de B_T se asume que la ecuación (5-61) es aproximadamente correcta para todos los casos.

TABLA 5–2 VALORES CON CUATRO DECIMALES PARA LAS FUNCIONES DE BESSEL $J_n(\beta)$

n \ β:	**0.5**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	0.9385	0.7652	0.2239	−0.2601	−0.3971	−0.1776	0.1506	0.3001	0.1717	−0.09033	−0.2459
1	0.2423	0.4401	0.5767	0.3391	−0.06604	−0.3276	−0.2767	−0.004683	0.2346	0.2453	0.04347
2	0.03060	0.1149	0.3528	0.4861	0.3641	0.04657	−0.2429	−0.3014	−0.1130	0.1448	0.2546
3	0.002564	0.01956	0.1289	0.3091	0.4302	0.3648	0.1148	−0.1676	−0.2911	−0.1809	0.05838
4		0.002477	0.03400	0.1320	0.2811	0.3912	0.3576	0.1578	−0.1054	−0.2655	−0.2196
5			0.007040	0.04303	0.1321	0.2611	0.3621	0.3479	0.1858	−0.05504	−0.2341
6			0.001202	0.01139	0.04909	0.1310	0.2458	0.3392	0.3376	0.2043	−0.01446
7				0.002547	0.01518	0.05338	0.1296	0.2336	0.3206	0.3275	0.2167
8					0.004029	0.01841	0.05653	0.1280	0.2235	0.3051	0.3179
9						0.005520	0.02117	0.05892	0.1263	0.2149	0.2919
10						0.001468	0.006964	0.02354	0.06077	0.1247	0.2075
11							0.002048	0.008335	0.02560	0.06222	0.1231
12								0.002656	0.009624	0.02739	0.06337
13									0.003275	0.01083	0.02897
14									0.001019	0.003895	0.01196
15										0.001286	0.004508
16											0.001567

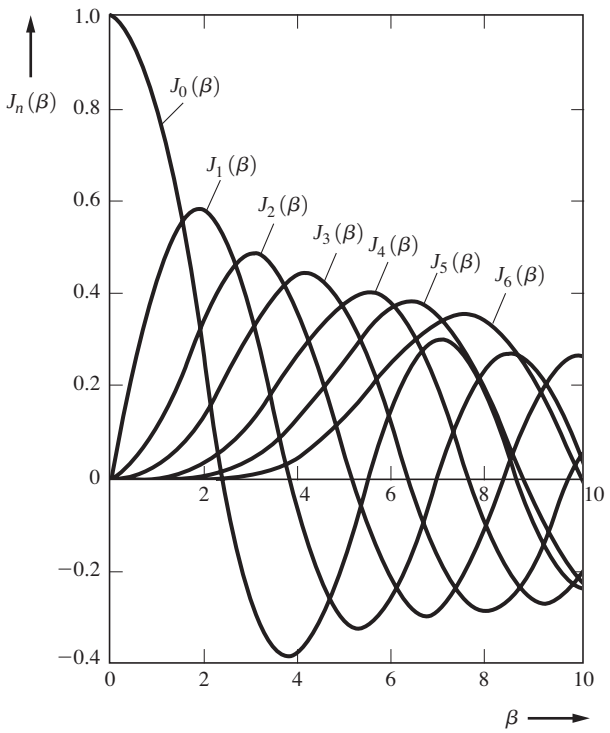


Figura 5–10 Funciones de Bessel para $n = 0$ a $n = 6$.

TABLA 5–3 CEROS DE FUNCIONES DE BESSEL: VALORES PARA β CUANDO $J_n(\beta) = 0$

	Orden de la función de Bessel, *n*						
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
β (para el primer cero)	2.40	3.83	5.14	6.38	7.59	8.77	9.93
β (para el segundo cero)	5.52	7.02	8.42	9.76	11.06	12.34	13.59
β (para el tercer cero)	8.65	10.17	11.62	13.02	14.37	15.70	17.00
β (para el cuarto cero)	11.79	13.32	14.80	16.22	17.62	18.98	20.32
β (para el quinto cero)	14.93	16.47	17.96	19.41	20.83	22.21	23.59
β (para el sexto cero)	18.07	19.61	21.12	22.58	24.02	25.43	26.82
β (para el séptimo cero)	21.21	22.76	24.27	25.75	27.20	28.63	30.03
β (para el octavo cero)	24.35	25.90	27.42	28.91	30.37	31.81	33.23

banda de señales moduladas por ángulo. El cálculo del ancho de banda con otras definiciones, como el ancho de banda a 3 dB, puede ser muy difícil, ya que primero se debe evaluar el espectro de la señal FM o PM. Ésta no es una tarea trivial, con excepción de casos simples como los de la modulación de un solo tono (senoidal), a menos que se utilice una computadora digital para calcular el espectro aproximado.

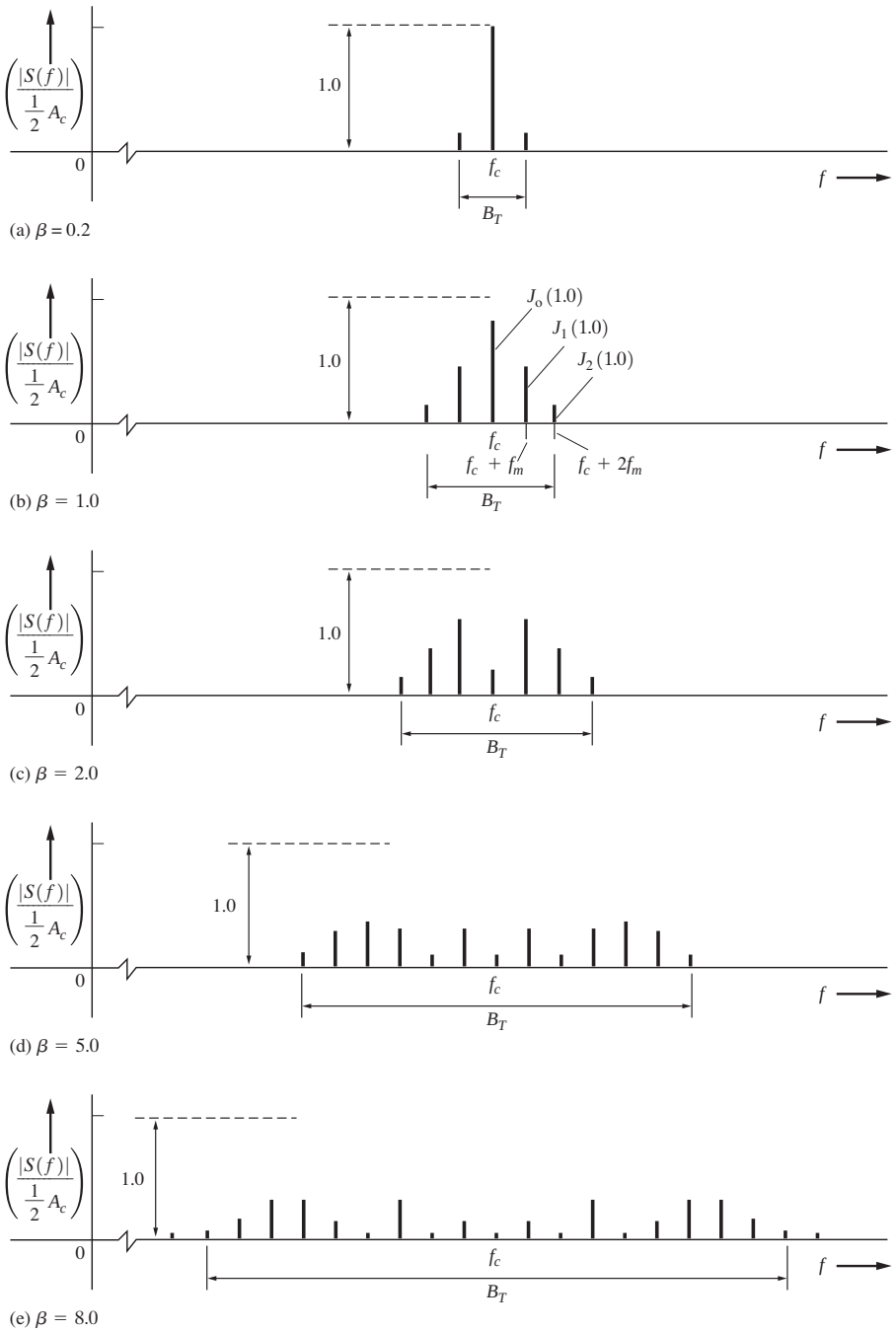


Figura 5–11 Espectros de magnitud para FM o PM con modulación senoidal para varios índices de modulación.

Debido a que en general es muy difícil evaluar el espectro exacto de señales moduladas por ángulo, las fórmulas de aproximación a los espectros son de gran utilidad. Algunas relativamente simples se pueden obtener cuando la desviación pico de fase es pequeña y el índice de modulación es grande. Estos temas se abordan en las secciones siguientes, donde se analiza la modulación por ángulo de banda estrecha y banda ancha de FM.

Modulación por ángulo de banda estrecha

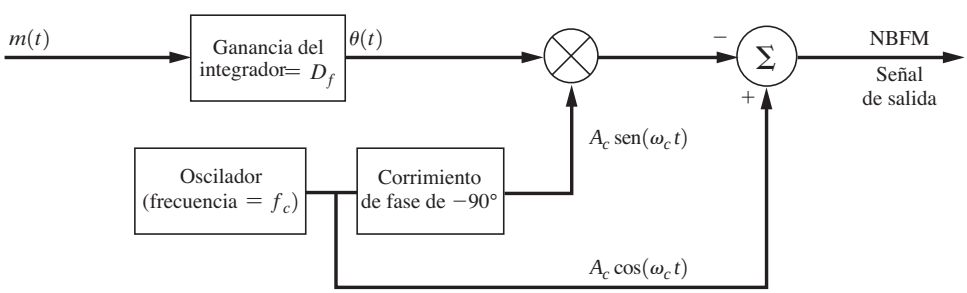
Cuando $\theta(t)$ se restringe a un pequeño valor, como por ejemplo $|\theta(t)| < 0.2$ rad, la envolvente compleja $g(t) = A_c e^{j\theta}$ puede aproximarse mediante una serie de Taylor, donde sólo se utilizan los dos primeros términos. Por tanto, ya que $e^x \approx 1 + x$ para $|x| \ll 1$,

$$g(t) \approx A_c[1 + j\theta(t)] \tag{5–62}$$

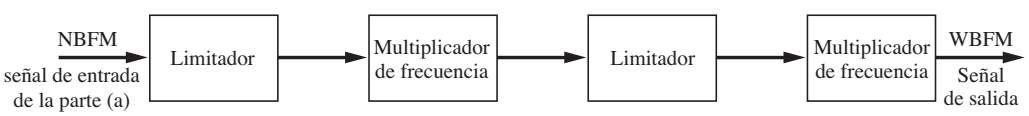
Utilizando la aproximación en las ecuaciones (4-9) o (5-1), se obtiene la expresión para una *señal modulada por ángulo de banda estrecha*:

$$s(t) = \underbrace{A_c \cos \omega_c t}_{\substack{\text{término de} \\ \text{portadora discreta}}} - \underbrace{A_c \theta(t) \operatorname{sen} \omega_c t}_{\text{término de banda lateral}} \tag{5–63}$$

Este resultado indica que la señal modulada por ángulo de banda estrecha consiste de dos términos: un componente de portadora discreta, que no cambia con la señal moduladora, y un término de banda lateral. Esta señal es parecida a la del tipo AM, *excepto* que el término de banda lateral está 90° fuera de fase con el término de portadora discreta. La señal de banda estrecha puede generarse empleando un modulador simétrico (multiplicador), como se muestra en la figura 5-12a para el caso de una frecuencia modulada de banda estrecha (NBFM, por sus siglas en inglés). Más aún, la frecuencia modulada de banda ancha (WBFM, por sus siglas en inglés) se puede generar a partir de la



(a) Generación de NBFM utilizando un modulador simétrico



(b) Generación de WBFM a partir de una señal NBFM

Figura 5–12 Método indirecto de generación de WBFM (método de Armstrong).

señal NBFM utilizando una multiplicación de frecuencia, como se observa en la figura 5-12b. Se requieren circuitos limitadores para suprimir la AM incidental [la cual es $\sqrt{1 + \theta^2(t)}$ como resultado de la aproximación de la ecuación (5-62)], presente en la señal NBFM. Este procedimiento para generar la WBFM se llama *método de Armstrong* o *método indirecto*.

A partir de las ecuaciones (5-62) y (5-49) se sabe que el espectro de la señal modulada por ángulo de banda estrecha es

$$S(f) = \frac{A_c}{2} \{[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + j[\Theta(f - f_c) - \Theta(f + f_c)]\} \tag{5–64}$$

donde

$$\Theta(f) = \mathcal{F}[\theta(t)] = \begin{cases} D_p M(f), & \text{para señalización PM} \\ \dfrac{D_f}{j2\pi f} M(f), & \text{para señalización FM} \end{cases} \tag{5–65}$$

Modulación en frecuencia de banda ancha

Un *método directo* para generar la frecuencia modulada de banda ancha (WBFM) es utilizar un oscilador controlado por voltaje (VCO), como se ilustra en la figura 5-8b. Sin embargo, en el caso de VCO que se diseñan para una desviación ancha de frecuencia (ΔF grande), la estabilidad de la frecuencia de la portadora $f_c = f_0$ no es muy buena, así que el VCO se incorpora en un arreglo de PLL, donde éste se engancha a la fuente de frecuencia estable como un oscilador de cristal. (Vea la figura 5-13.) Se necesita el divisor de frecuencia a fin de reducir el índice de modulación de la señal WBFM para producir una señal NBFM ($\beta \approx 0.2$) de forma tal que un término de portadora discreto grande siempre pueda estar presente a la frecuencia f_c/N para pulsar junto con la señal del oscilador de cristal y producir un voltaje de control de DC. [Consulte la figura 5-11a y las ecuaciones (5-63) y (5-64).] Este voltaje de control de DC mantiene el VCO en la frecuencia asignada, con una tolerancia que se determina mediante el circuito del oscilador de cristal.

La densidad espectral de potencia (PSD) de una señal WBFM se puede *aproximar* mediante la función de densidad de probabilidad (PDF) de la señal moduladora. Esto es razonable desde un punto de vista intuitivo, ya que la frecuencia instantánea varía directamente con la señal moduladora

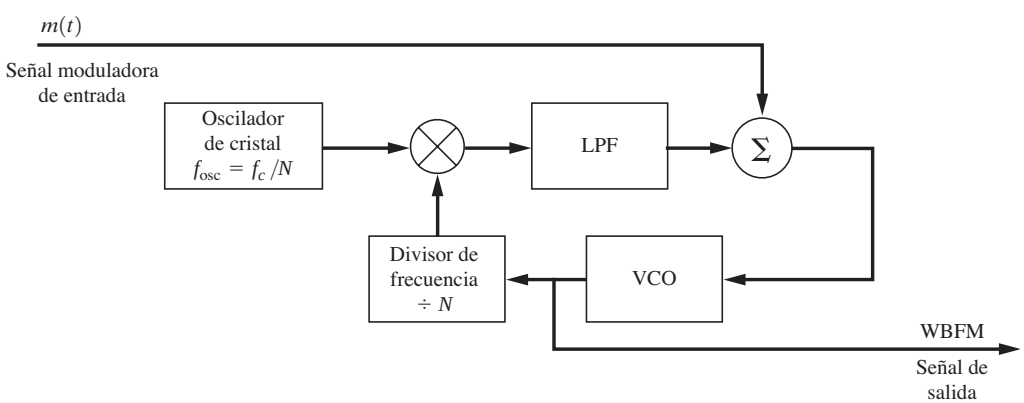


Figura 5–13 Método directo para la generación de WBFM.

de voltaje para el caso de FM [donde $D_f/(2\pi)$ es la constante de proporcionalidad]. Si la señal moduladora permanece más tiempo en un valor de voltaje que en otro, la frecuencia instantánea se mantendrá al nivel correspondiente y el espectro de potencia tendrá un valor pico a dicha frecuencia. Se ha documentado extensamente una discusión sobre la aproximación involucrada, llamada *aproximación casi estática* [Rowe, 1965]. Este resultado se expones en el siguiente teorema.

TEOREMA. *Para la señalización WBFM, donde*

$$s(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\, d\sigma\right]$$

$$\beta_f = \frac{D_f \ \text{máx}[m(t)]}{2\pi B} > 1$$

y B es el ancho de banda de $m(t)$, entonces la PSD normalizada de la señal WBFM se puede aproximar mediante

$$\mathcal{P}(f) = \frac{\pi A_c^2}{2D_f}\left[f_m\left(\frac{2\pi}{D_f}(f - f_c)\right) + f_m\left(\frac{2\pi}{D_f}(-f - f_c)\right)\right] \tag{5–66}$$

donde $f_m(\cdot)$ es la PDF de la señal moduladora.[8]

Este teorema se demuestra en el problema 6-52.

Ejemplo 5–3 ESPECTRO PARA WBFM CON MODULACIÓN TRIANGULAR

Se evaluará el espectro para una señal WBFM con una señal moduladora triangular (figura 5-14a). La PDF asociada para este tipo de modulación se muestra en la figura 5-14b. La PDF se describe como

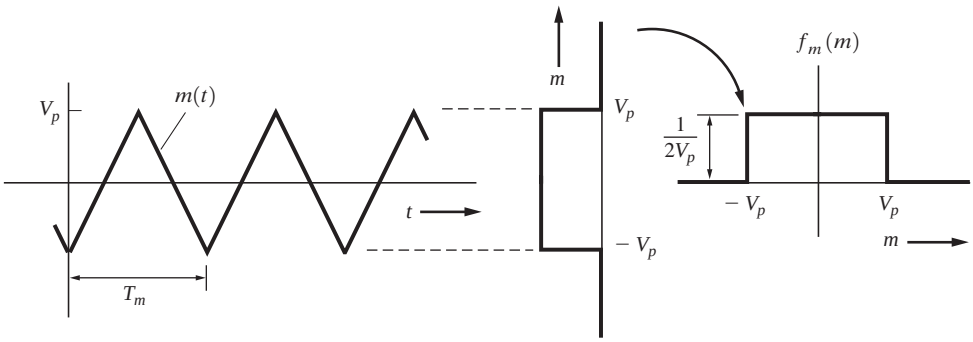
$$f_m(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{2V_p}, & |m| < V_p \\ 0, & m \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{5–67}$$

donde V_p es el voltaje pico de la forma de onda triangular. Sustituyendo esta ecuación dentro de la (5-66), se concluye que

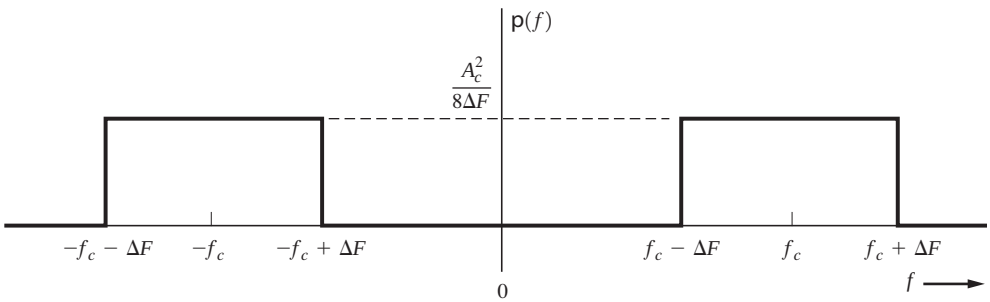
$$\mathcal{P}(f) = \frac{\pi A_c^2}{2D_f}\left[\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{2V_p}, & \left|\dfrac{2\pi}{D_f}(f - f_c)\right| < V_p \\ 0, & f \text{ en cualquier otro caso} \end{array}\right\}\right.$$

$$\left. + \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{2V_p}, & \left|\dfrac{2\pi}{D_f}(f + f_c)\right| < V_p \\ 0, & f \text{ en cualquier otro caso} \end{array}\right\}\right]$$

[8] Consulte el apéndice B para la definición de la PDF y para ejemplos de las PDF en varias formas de onda. Este tema se puede suprimir si el lector no tiene suficiente familiaridad con las PDF. No confunda la PDF de la modulación, $f_m(\cdot)$, con la variable de frecuencia *f*.



(a) Forma de onda triangular moduladora (b) PDF de la modulación triangular



(c) PSD de la señal WBFM con modulación triangular, $\Delta F = D_f V_p / 2\mathrm{p}$

Figura 5–14 Espectro aproximado de una señal WBFM con modulación triangular.

La PSD de la señal WBFM se convierte en

$$\mathcal{P}(f) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{A_c^2}{8\Delta F}, & (f_c - \Delta F) < f < (f_c + \Delta F) \\ 0, & f \text{ en cualquier otro caso} \end{array} \right\}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{A_c^2}{8\Delta F}, & (-f_c - \Delta F) < f < (-f_c + \Delta F) \\ 0, & f \text{ en cualquier otro caso} \end{array} \right\} \tag{5–68}$$

donde la desviación pico de frecuencia es

$$\Delta F = \frac{D_f V_p}{2\pi} \tag{5–69}$$

Esta PSD se grafica en la figura 5-14c. Se reconoce que este resultado es una *aproximación* de la PSD actual. En este ejemplo, la modulación es periódica, con un periodo de T_m, de tal manera que el espectro

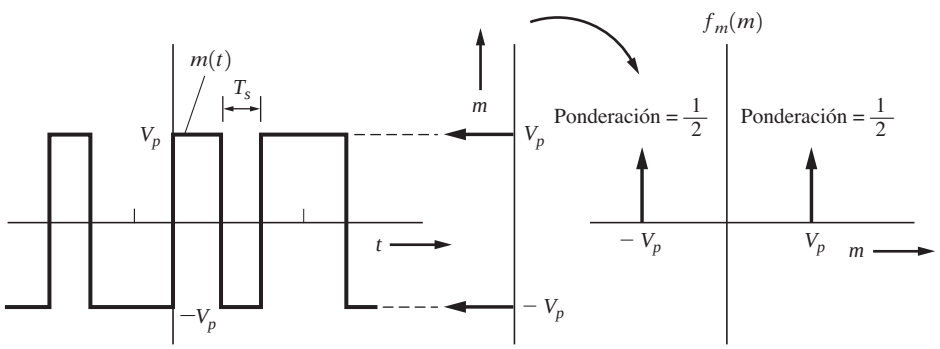
actual es un espectro de línea con las funciones delta separadas cada $f_m = 1/T_m$ hertz una de la otra, como la separación que se muestra en la figura 5-11 para el caso de una modulación senoidal. Esta aproximación proporciona el *envolvente aproximado* del espectro de línea. (Si la modulación hubiese sido periódica, entonces el espectro exacto habría sido continuo y por tanto no sería de línea.)

En otro ejemplo, 1ue utiliza una modulación senoidal (periódica), se sabe que la PSD exacta contiene componentes de línea con ponderaciones de $[A_c J_n(\beta)]^2/2$ ubicadas en las frecuencias de $f = f_c + nf_m$. (Vea la figura 5-11.) Para el caso de un índice alto, el envolvente de estas ponderaciones se aproxima a la PDF de una senoidal como se plantea en el apéndice B.

Los espectros aproximados para las señales *PM digitales de banda ancha* pueden también evaluarse con la ecuación (5-66). Para la modulación digital con formas de pulso rectangulares, la PDF del voltaje de modulación, $m(t)$, consiste en funciones delta ubicadas en niveles discretos de voltaje. En consecuencia, la PSD para la FM digital de banda ancha se aproxima mediante funciones delta. Esta aproximación se ilustra en la figura 5-15 para una modulación por corrimiento de frecuencia binaria de banda ancha (FSK).

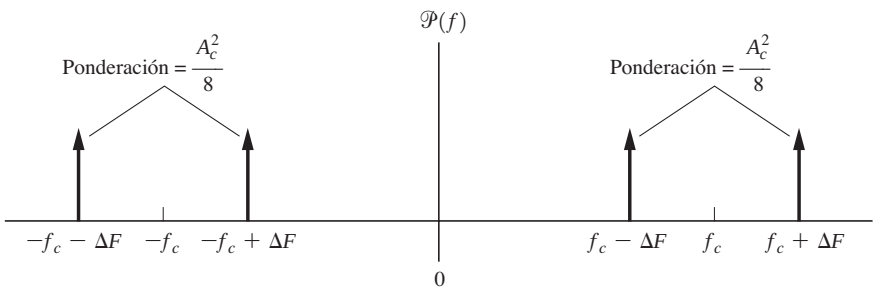
En resumen, algunas propiedades importantes de las señales moduladas por ángulo son las siguientes:

- Una señal modulada por ángulo es una función no lineal de la modulación y, por consecuencia, el ancho de banda de la señal aumenta conforme se incrementa el índice de modulación.



(a) Forma de onda rectangular moduladora (con 1 y 0 binarios igualmente probables)

(b) PDF para una modulación digital



(c) PSD de la FSK de banda ancha con modulación binaria, $\Delta F = D_f V_p/2\pi$

Figura 5–15 Espectro aproximado de una FSK binaria de banda ancha.

- El nivel de la portadora discreta cambia dependiendo de la señal moduladora, y es igual a cero para ciertos tipos de formas de onda moduladoras.
- El ancho de banda de una señal modulada por ángulo de banda estrecha es dos veces el ancho de banda de la señal moduladora, igual que para una señalización AM.
- El envolvente real de una señal modulada por ángulo, $R(t) = A_c$, es constante y, en consecuencia, no depende del nivel de la señal moduladora.

Preénfasis y deénfasis en sistemas modulados por ángulo

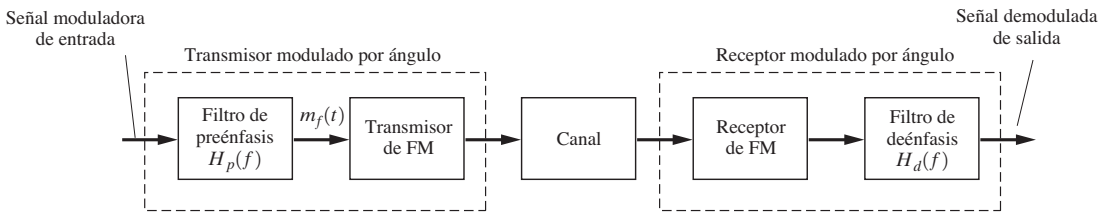
En los sistemas modulados por ángulo la relación señal a ruido puede mejorarse en la salida del receptor si el nivel de la modulación (en el transmisor) se aumenta en el lado superior del espectro (como por ejemplo, de audio). A esto se le conoce como *preénfasis* y si también se atenúa el nivel a altas frecuencias a la salida del receptor, se le llama *deénfasis*. Lo anterior da como resultado una respuesta general de frecuencia de banda base plana que al mismo tiempo mejora la relación señal a ruido en la salida del receptor. (Vea la figura 5-16.) En la característica de preénfasis, la segunda frecuencia de esquina f_2 ocurre mucho más arriba del espectro de banda base de la señal moduladora (por ejemplo, 25 kHz para una modulación de audio). En la difusión por FM la constante de tiempo τ_1 es generalmente de 75 μs, así que f_1 ocurre a 2.12 kHz. La respuesta general de frecuencia resultante en el sistema, obtenida durante preénfasis en el transmisor y deénfasis, en el receptor es plana a lo largo de la banda de la señal moduladora. En la difusión por FM con preénfasis de 75 μs, la señal que se transmite es FM para frecuencias moduladoras de hasta 2.1 kHz, pero es una señal con *modulación en fase* para audiofrecuencias por arriba de 2.1 kHz, ya que la red de preénfasis actúa como un diferenciador para frecuencias entre f_1 y f_2. Por tanto, *la FM preenfatizada es en realidad una combinación de FM y PM,* y combina las ventajas de ambas en relación con el rendimiento del ruido. En el capítulo 7 se mostrará que la preénfasis y deénfasis mejoran la relación señal a ruido en la salida del receptor.

5–7 MULTIPLEXIÓN POR DIVISIÓN DE FRECUENCIAS Y FM EN ESTÉREO

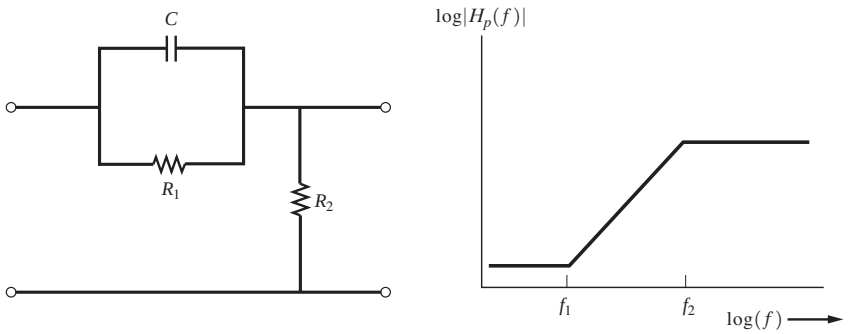
La *multiplexión por división de frecuencias* (FDM, por sus siglas en inglés) es una técnica útil para transmitir múltiples mensajes simultáneamente sobre un canal de banda ancha donde primero se modulan las señales de mensaje a varias subportadoras y se forma una señal compuesta de banda base que es producto de la suma de estas subportadoras moduladas. Esta señal compuesta puede entonces ser modulada dentro de la portadora principal como se muestra en la figura 5-17. Se puede utilizar cualquier tipo de modulación: AM, DSB, SSB, PM, FM y otras. Los tipos de modulación utilizados en las subportadoras, así como el tipo empleado en la portadora principal pueden ser diferentes. Sin embargo, como se muestra en la figura 5-17b, el espectro de la señal compuesta debe consistir de señales moduladas que no se traslapen en sus espectros, de otra manera ocurrirá diafonía entre las señales de mensaje a la salida del receptor. Así, la señal compuesta de banda base modula el transmisor principal para producir la señal FDM que se transmite a través del canal de banda ancha.

La señal FDM recibida se demodula primero para reproducir la señal compuesta de banda base que pasa a través de filtros para separar cada una de las subportadoras moduladas. Después las subportadoras se demodulan para reproducir las señales de mensaje $m_1(t)$, $m_2(t)$, y así sucesivamente.

El sistema de difusión por FM estereofónico adoptado en Estados Unidos es un ejemplo de sistema FDM. Más aún, éste es compatible con el sistema FM monofónico vigente desde los años 1940. Esto es, un radioescucha con un receptor de FM monofónico convencional podrá escuchar el audio monofónico (el cual consiste del canal izquierdo sumado al canal derecho de audio),



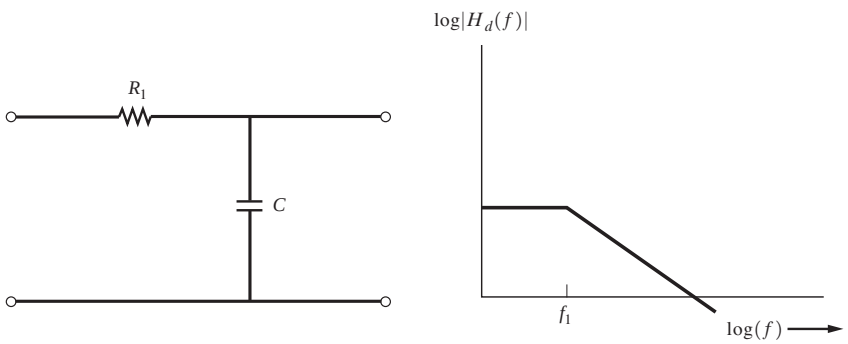
(a) Diagrama de bloques general



$$H_p(f) = K\frac{1 + j(f/f_1)}{1 + j(f/f_2)} \quad \text{donde } f_1 = \frac{1}{2\pi\tau_1} = \frac{1}{2\pi R_1 C}, f_2 = \frac{1}{2\pi\tau_2} = \frac{R_1 + R_2}{2\pi R_1 R_2 C}$$

(b) Filtro de preénfasis

(c) Gráfico de Bode de la respuesta en frecuencia de preénfasis



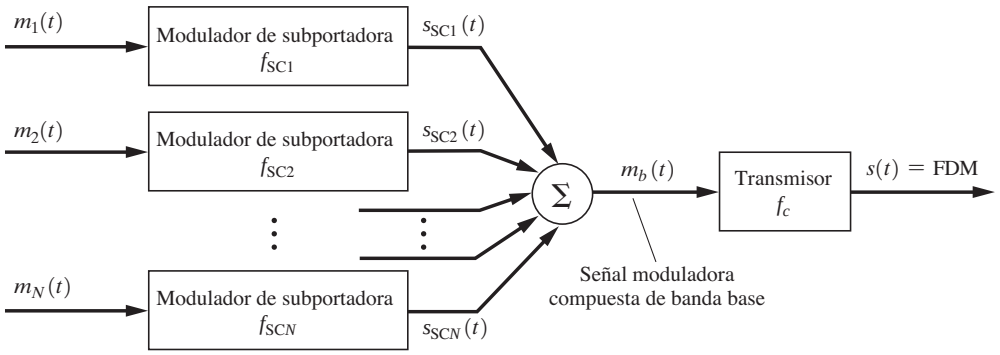
$$H_p(f) = \frac{1}{1 + j(f/f_1)} \quad \text{donde } f_1 = \frac{1}{2\pi\tau_1} = \frac{1}{2\pi R_1 C}$$

(b) Filtro de deénfasis

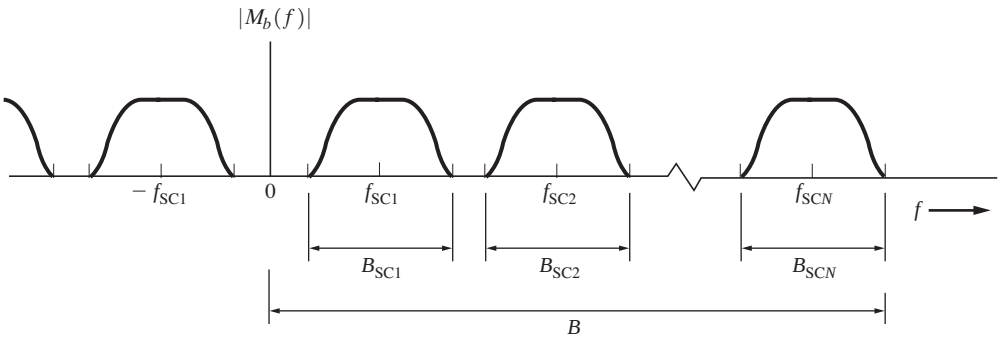
(c) Gráfico de Bode de la característica de deénfasis

Figura 5–16 Sistema modulado por ángulo con preénfasis y deénfasis.

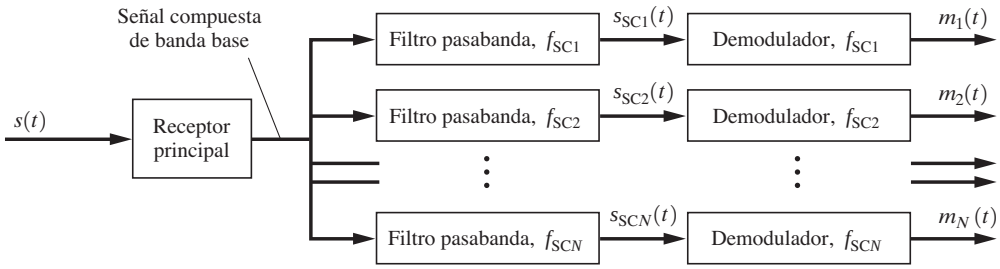
mientras que un radioescucha con un receptor estereofónico podrá recibir el canal izquierdo de audio en la bocina izquierda y el canal derecho en la bocina derecha (vea la figura 5-18). A fin de obtener la característica de compatibilidad, los canales izquierdo y derecho de audio se combinan (se suman) para producir la señal monofónica, y el audio de diferencia se utiliza para modular una señal DSB-SC de 38 kHz. Un tono piloto de 19 kHz se agrega a la señal compuesta de banda base $m_b(t)$ a fin de proporcionar una señal de referencia para la demodulación coherente



(a) Transmisor



(b) Espectro de señal de banda base compuesta

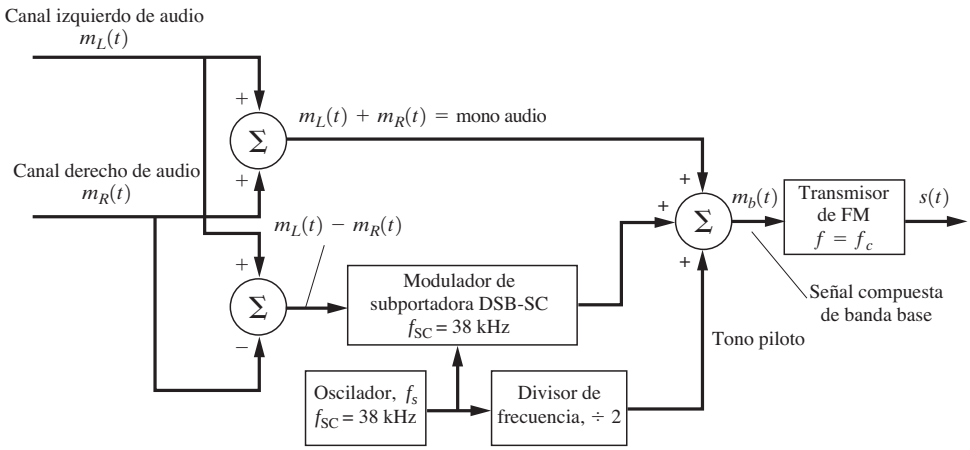


(c) Receptor

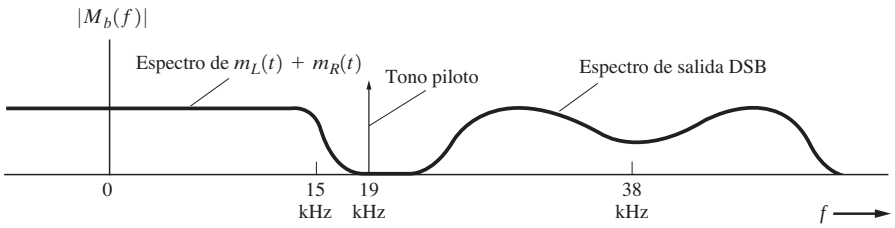
Figura 5–17 Sistema FDM.

(producto) de las subportadoras en el receptor. Como se observa en la figura 5-18c, este sistema es compatible con los receptores de FM monofónicos existentes. En el problema 5-44 se verá que se puede utilizar una técnica de conmutación (muestreo) relativamente simple para implementar la demodulación de la subportadora y para separar las señales izquierda y derecha en una sola operación.

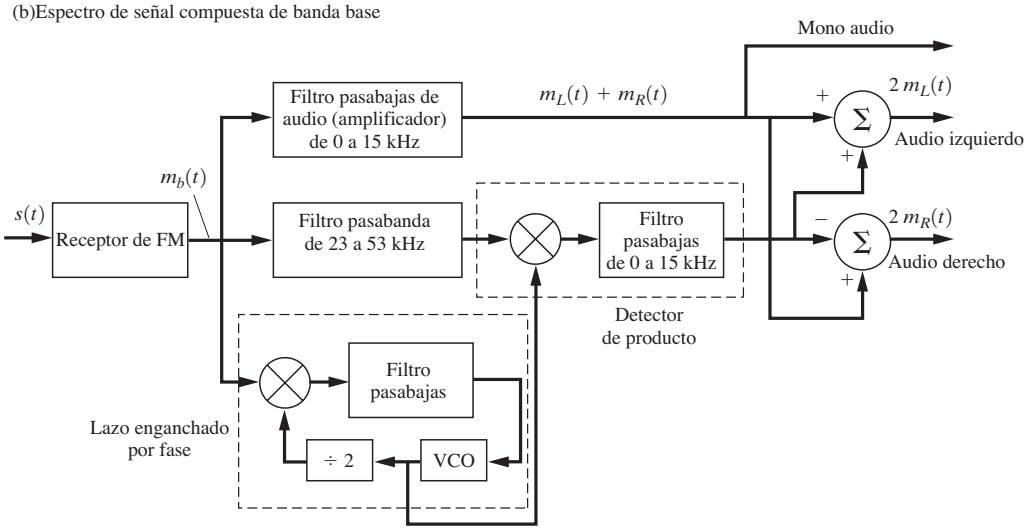
La estación de FM también puede recibir de la FCC *autorización para comunicaciones subsidiarias* (SCA, por sus siglas en inglés). Esto le permite a la estación añadir una subportadora de FM



(a) Transmisor de FM estereofónico



(b)Espectro de señal compuesta de banda base



(c) Receptor de FM estereofónico

Figura 5–18 Sistema de FM estereofónico.

para transmitir un segundo programa de audio analógico o música de fondo destinado a suscriptores comerciales para su uso en tiendas u oficinas. La frecuencia de subportadora SCA FM es a menudo de 67 kHz, aunque no está especificada por las reglas de la FCC. Más aún, la FCC permite hasta cuatro subportadoras SCA, y cada una de ellas puede portar material de datos o de audio analógico. Utilizando una velocidad de datos justo por debajo de los 1,200 b/s sobre una subportadora de 57 kHz, el *sistema de datos de radiodifusión* (RBDC, por sus siglas en inglés) suministra información textual auxiliar, tales como letras de identificación de las estaciones, títulos de programas, nombres de artistas musicales y reportes de tránsito automovilístico.

5–8 ESTÁNDARES TÉCNICOS DE DIFUSIÓN POR FM Y DIFUSIÓN DIGITAL POR FM

En Estados Unidos existen alrededor de 9,000 estaciones de FM. La tabla 5-4 muestra algunos estándares técnicos que la FCC ha adoptado para los sistemas FM. En este país las estaciones de FM se clasifican en tres categorías principales, dependiendo de su área de cobertura deseada. Las clase A son locales y poseen una máxima potencia radiada efectiva (ERP) de 6 kW, así como una altura máxima de antena de 300 pies sobre un terreno promedio. La ERP es la potencia promedio de salida del transmisor multiplicada por las ganancias de potencia tanto de la línea de transmisión (un número menor a la unidad) como de la antena. (Consulte la sección 8-9 para ciertos cálculos de TV ERP.) Las estaciones clase B tienen una máxima ERP de 50 kW, con una máxima altura de antena de 500 pies sobre un terreno promedio, y están asignadas a la zona noreste de Estados Unidos, el sur de California, Puerto Rico y las Islas Vírgenes. Las estaciones clase C, por su parte, se distribuyen en el resto del territorio estadounidense. Éstas cuentan con una máxima ERP de 100 kW y una altura máxima de antena de 2,000 pies. Como se muestra en la tabla 5-4, las estaciones FM se clasifican en comerciales y no comerciales. Las segundas operan en el segmento de 88.1 a 91.9 MHz de la banda de FM y ofrecen programas educativos sin comerciales. En el segmento comercial, de 91.2 a 107.9 MHz, ciertas frecuencias se reservan para estaciones clase A y el resto para estaciones clase B o C. Un listado de estas frecuencias y de las asignaciones específicas de estación para cada ciudad está disponible en [Broadcasting, 2005].

Difusión digital por FM

En Estados Unidos la FCC ha adoptado el sistema iBiquity FM *canal dentro de banda* (IBOC) para la difusión digital en la banda de FM (es decir, de 88.1 a 107.9 MHz). Este sistema IBOC provee simultáneamente una transmisión de datos de audio digitales y datos digitales auxiliares a través de una señal FM convencional modulada por audio analógico. En consecuencia, se puede utilizar un receptor de FM convencional para recibir el audio analógico. También es posible emplear un receptor de IBOC, con su codec incorporado, para convertir la parte digital de la señal FM IBOC en un audio estereofónico casi de calidad de CD. Si la señal FM IBOC recibida es débil, el usuario escuchará el audio analógico convencional de la parte de FM de la señal. Si es fuerte, entonces el audio decodificado será de calidad de CD estereofónico, como se decodifica a partir de los datos de IBOC. Si la fuerza de la señal cae dentro de un rango débil o fuerte, entonces el receptor producirá una mezcla del audio obtenido de las partes de AM y de IBOC.

La multiplexión por división de frecuencias ortogonales (OFDM, por sus siglas en inglés), como se verá en la sección 5-12, se utiliza para producir la señal IBOC. Para generarla, los datos del codec transmisor se dividen en dos grupos de OFDM, que se colocan en forma adyacente a las bandas laterales de la señal FM convencional. Uno de los grupos de OFDM se ubica en la banda lateral superior y el otro en la banda lateral inferior. Ambas bandas son independientes, pero los datos se dividen de tal forma que sólo se requiere una banda lateral para recuperar el audio a una calidad

TABLA 5–4 ESTÁNDARES DE LA FCC PARA FM

Clase de servicio	Elemento	Estándar de la FCC
Difusión por FM	Frecuencia asignada f_c	En incrementos de 200 kHz desde 88.1 MHz (canal 201 de FM) hasta 107.9 MHz (canal 300 de FM)
	Ancho de banda de canal	200 kHz
	Estaciones no comerciales	88.1 MHz (canal 201) a 91.9 MHz (canal 220)
	Estaciones comerciales	92.1 MHz (canal 221) a 107.9 MHz (canal 300)
	Estabilidad de frecuencia de la portadora	±2,000 Hz de la frecuencia asignada
	100□ de modulación[a]	$\Delta F = 75$ kHz
	Respuesta de audiofrecuencia[b]	50 Hz a 15 kHz, siguiendo una curva de preénfasis de 75 μs
	□dice de modulación	5 (para $\Delta F = 75$ kHz y $B = 15$ kHz)
	□ de distorsión armónica[b]	<3.5□ (50–100 Hz)
		<2.5□ (100–7500 Hz)
		<3.0□ (7500–15,000 Hz)
	Ruido de FM	Por lo menos 60 dB por debajo del 100□ de modulación a 400 Hz
	Ruido de AM	50 dB por debajo del nivel correspondiente al 100□ de AM en la banda de 50 Hz–15 kHz
	Máxima potencia autorizada	100 kW en el plano polarizado horizontal, además de 100 kW en el plano polarizado vertical
Radio móvil de FM bidireccional	100□ de modulación	$\Delta F = 5$kHz
	□dice de modulación	1 (para $\Delta F = 5$ kHz y $B = 5$ kHz)
	Frecuencias de portadora dentro de las bandas de frecuencia	32–50 MHz (banda inferior de VHF) 144–148 MHz (banda de radioaficionados de 2 m) 148–174 MHz (banda superior de VHF)[c] 420–450 MHz (banda de radioaficionados de $\frac{3}{4}$ m) 450–470 MHz (banda de UHF) 470–512 MHz (banda de UHF, T) 806–928 MHz (banda de 900 MHz)
Señal audífono de TV analógica (FM)	100□ de modulación	$\Delta F = 25$ kHz
	□dice de modulación	1.67 (para $\Delta F = 25$ kHz y $B = 15$ kHz)

[a] Para la transmisión estereofónica, el tono piloto de 19 kHz puede contribuir tanto como el 10□ de la desviación pico total permitida de 75 kHz. Si se utiliza la SCA, cada subportadora SCA también puede aportar hasta el 10□ y su desviación pico total puede ser de 110□ de 75 kHz.

[b] Bajo la nueva política desreguladora de la FCC, estos requisitos se suprimieron de sus reglamentos, aunque los difusores aún los utilizan como guías para un mínimo rendimiento aceptable.

[c] Se permite también una SSB de amplitud comprimida en la banda de 150 a 170 MHz en canales con ancho de banda de 5 kHz.

limitada. Para recuperar totalmente el audio estereofónico de alta fidelidad se necesitan los datos de ambas bandas laterales (los dos grupos de OFDM).

El ancho de banda de una señal FM IBOC es de 400 kHz, pero el espacio de portadora entre estaciones se mantiene a 200 kHz. Por tanto, existe la posibilidad de interferencia de estaciones asignadas a los canales adyacentes. Sin embargo, la frecuencia asignada a una estación de FM es tal que dichos canales sólo se asignan a ubicaciones lejanas y existe poco traslape entre sus áreas de cobertura. Como consecuencia, hay escasa interferencia de IBOC con las estaciones de canales adyacentes asignados. Para más información acerca de esta técnica y un listado de las estaciones que transmiten por FM IBOC, busque en Internet el término IBOC FM.

5–9 SEÑALIZACIÓN PASABANDA MODULADA BINARIA

Las señales pasabanda digitalmente moduladas se generan utilizando las envolventes complejas para las señalizaciones AM, PM, FM o QM (modulación en cuadratura) expuestas en la tabla 4-1 y estudiadas en secciones anteriores. Para las señales digitales moduladas, la señal moduladora $m(t)$ es de tipo digital, dado por los códigos de línea binarios o multinivel desarrollados en el capítulo 3. En esta sección se presentarán detalles de las señales moduladas binarias. En las secciones 5-10 y 5-11 se describirán las señales multinivel digitalmente moduladas y de modulación por corrimiento mínimo (MSK).

Las técnicas de señalización pasabanda binarias más comunes, ilustradas en la figura 5-19, son las siguientes:

- *Modulación de encendido-apagado* (OOK), también llamada la *modulación por corrimiento de amplitud* (ASK). Consiste en la manipulación (conmutación) de una senoidal portadora a través de su encendido y apagado mediante una señal binaria unipolar. La OOK es idéntica a la modulación binaria *unipolar* en una señal DSB-SC [ecuación (5-13)]. La transmisión por radio en clave Morse es un ejemplo de esta técnica. La OOK fue una de las primeras técnicas de modulación empleadas y antecede a los sistemas analógicos de comunicación.
- *Modulación por corrimiento de fase binaria* (BPSK). Consiste en el corrimiento de la fase de una portadora senoidal a 0° o 180° con una señal binaria unipolar. La BPSK es equivalente a la señalización PM con una forma de onda digital y a la modulación de una señal DSB-SC con una forma de onda digital polar.
- *Modulación por corrimiento de frecuencia* (FSK). Consiste en el corrimiento de la frecuencia de una portadora senoidal desde una frecuencia de marca (correspondiente, por ejemplo, al envío de un 1 binario) a una frecuencia de espacio (correspondiente al envío de un 0 binario), de acuerdo con la señal digital de banda base. La FSK es idéntica a la modulación de una portadora de FM mediante una señal digital binaria.

Como se indicó en la sección 3-6, el ancho de banda de la señal digital requiere minimizarse para alcanzar una conservación espectral. Esto puede llevarse a cabo usando un filtro de coseno realzado de premodulación para minimizar el ancho de banda de la señal digital sin introducir ISI. La formación de la señal digital de banda base produce una forma de onda analógica de banda base que modula el transmisor. La figura 5-19f ilustra la señal DSB-SC resultante cuando se emplea un filtro de premodulación. Por tanto, la señal BPSK de la figura 5-19d se convierte en una señal DSB-SC (figura 5-19f) cuando se recurre a un filtrado de premodulación.

Modulación de encendido-apagado (OOK)

La señal de OOK se representa mediante

$$s(t) = A_c m(t) \cos \omega_c t \tag{5–70}$$

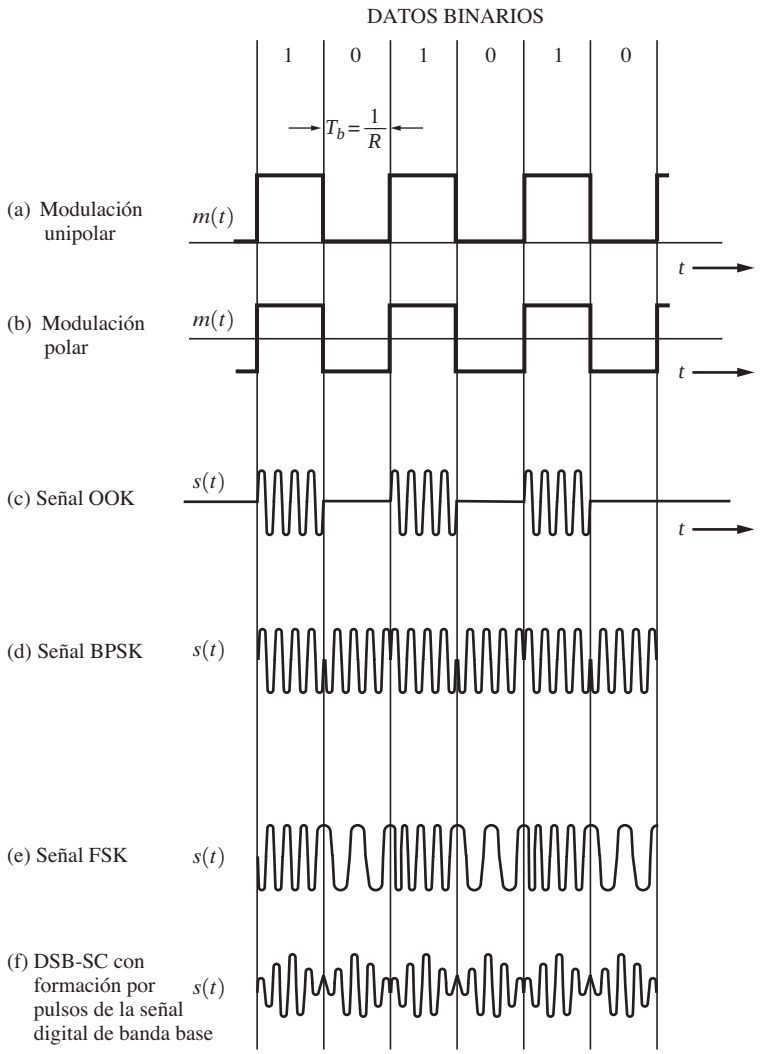


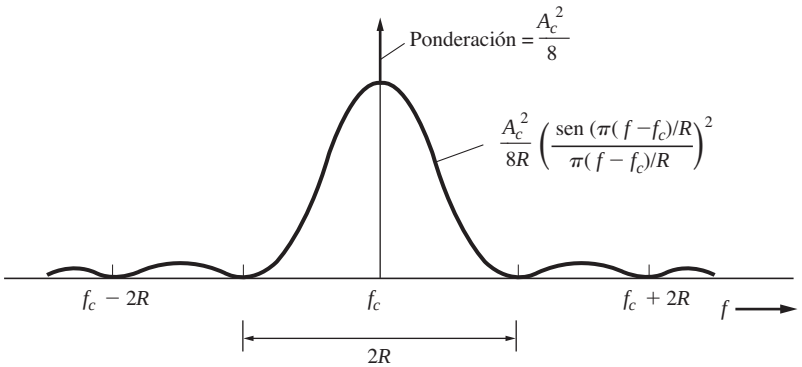
Figura 5–19 Señales pasabanda digitalmente moduladas.

donde $m(t)$ es una señal de datos de banda base unipolar, como se muestra en la figura 5-19a. En consecuencia, la envolvente compleja es simplemente

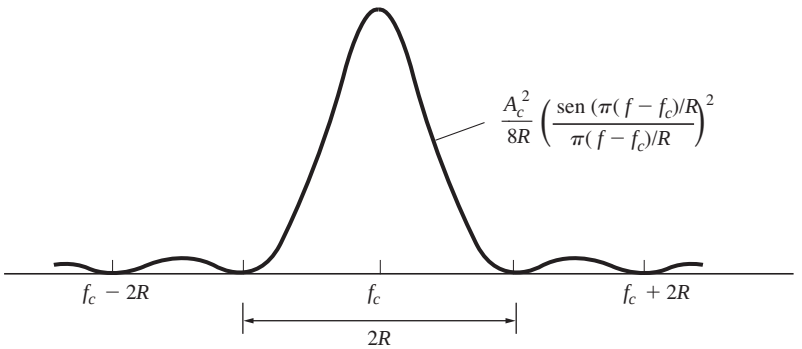
$$g(t) = A_c m(t) \qquad \text{para OOK} \tag{5–71}$$

y la PSD de esta envolvente compleja es proporcional a la de la señal unipolar. Utilizando la ecuación (3-39b) se encuentra que esta PSD es

$$\mathcal{P}_g(f) = \frac{A_c^2}{2}\left[\delta(f) + T_b\left(\frac{\text{sen } \pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2\right] \quad \text{(para OOK)} \tag{5–72}$$



(a) OOK



(b) BPSK (consulte la figura 5-15 para un gráfico espectral más detallado)

Figura 5–20 PSD de las señales pasabanda digitales (se muestran las frecuencias positivas).

donde $m(t)$ tiene un valor pico de $A=\sqrt{2}$ tal que $s(t)$ posee una potencia promedio normalizada de $A_c^2/2$. La PSD para la señal OOK correspondiente se obtiene sustituyendo la ecuación (5-72) dentro de la ecuación (5-2b). El resultado para las frecuencias positivas se muestra en la figura 5-20a, donde $R = 1/T_b$ es la velocidad de bit. El ancho de banda de nulo a nulo es $B_T = 2R$, y el ancho de banda absoluto es $B_T = 2B$, donde B es el ancho de banda de la banda base, ya que la OOK es una señalización del tipo AM.

Si se utiliza un filtrado de coseno realzado (para conservar el ancho de banda), entonces el ancho de banda absoluto de la señal binaria filtrada se relaciona con la velocidad de bit R mediante la ecuación (3-74), donde $D = R$ para la señalización digital binaria. Por tanto, el ancho de banda absoluto de la banda base es

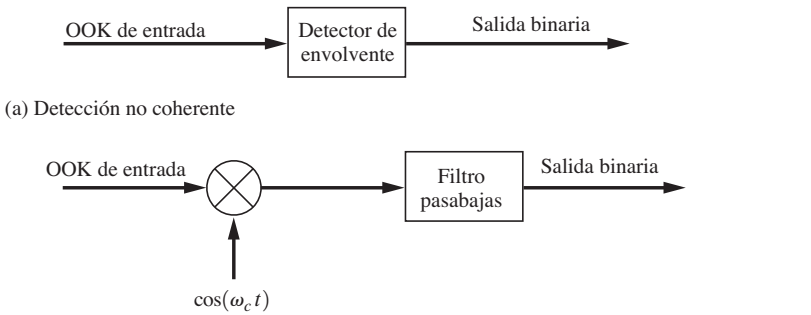
$$B = \tfrac{1}{2}(1 + r)R \tag{5–73}$$

donde r es el factor de *rolloff* del filtro. Esto da como resultado un ancho de banda de transmisión absoluta de

$$B_T = (1 + r)R \tag{5–74}$$

para una señalización OOK con filtrado de coseno realzado.

La OOK puede ser identificada mediante un detector de envolvente (detección no coherente) o de producto (detección coherente), porque es una forma de señalización AM. (En aplicaciones de



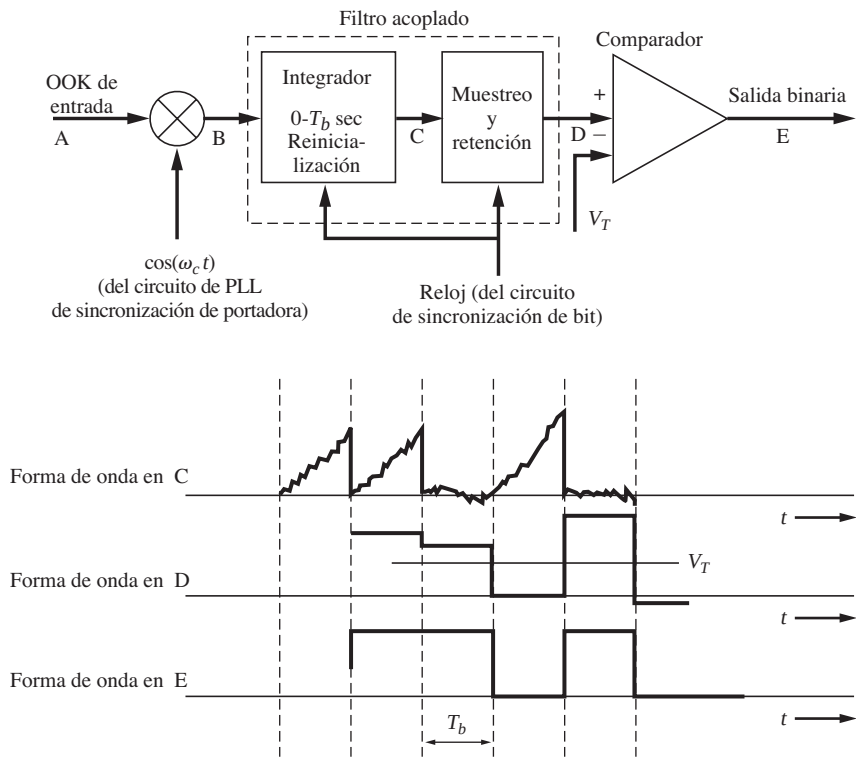


Figura 5–21 Detección de OOK.

receptores de radiofrecuencia donde la señal de entrada de RF es pequeña, se emplea el circuito de receptor superheterodino mostrado en la figura 4-29k, y uno de los circuitos detectores se coloca después de la etapa de salida de IF.) Estos detectores se observan en las figuras 5-21a y 5-21b. Para una detección de producto se debe suministrar la referencia de portadora, cos $(\omega_c t)$. Esta se obtiene usualmente a partir de un circuito de PLL (estudiado en la sección 4-14), donde el PLL se engancha a un término de portadora discreta (vea la figura 5-20a) de la señal OOK.

Para una óptima detección de OOK, esto es, para obtener la menor BER cuando la señal OOK de entrada está corrompida a causa del ruido blanco gaussiano aditivo (AWGN, por sus siglas en inglés), se requiere detectar el producto mediante un procesamiento con filtros acoplados. Esto se muestra en la figura 5-21c, donde se ilustran formas de onda en varios puntos del circuito para la recepción de una señal OOK que corresponde al flujo de datos binarios 1101. La sección 6-8 presenta detalles acerca de la operación, rendimiento y realización del filtro acoplado. Observe que este filtro también requiere una señal de sincronización que se utiliza para reiniciar el integrador al principio de cada intervalo de bit y para sincronizar el circuito de muestreo y retención al final de cada intervalo de bit. Esta señal de reloj (sincronización) es suministrada por un circuito sincronizador de bit (estudiado en el capítulo 4).

El detector óptimo coherente de OOK de la figura 5-21c es más costoso de implementar que el detector no coherente de OOK de la figura 5-21a. Por ello, si el ruido de la entrada es pequeño, entonces el receptor no coherente puede ser la mejor solución si se consideran tanto el costo como el rendimiento del ruido. La ventaja en cuanto al rendimiento de la BER entre la óptima detección coherente y la detección no coherente no óptima se estudiará en la sección 7-6.

Modulación por corrimiento de fase binaria (BPSK)

La señal BPSK se representa mediante

$$s(t) = A_c \cos[\omega_c t + D_p m(t)] \tag{5–75a}$$

donde $m(t)$ es una señal de datos de banda base polar. Conviene que $m(t)$ tenga valores pico de ± 1 y una forma de pulso rectangular.

A continuación se mostrará que la BPSK es también una forma de señalización por AM. Expandiendo la ecuación (5-75a), se tiene que

$$s(t) = A_c \cos(D_p m(t)) \cos \omega_c t - A_c \text{ sen } (D_p m(t)) \text{ sen } \omega_c t$$

Recordando que $m(t)$ tiene valores de ± 1 y que $\cos(x)$ y $\text{sen}(x)$ son funciones pares e impares de x, se puede observar que la representación de la señal BPSK se reduce a

$$s(t) = \underbrace{(A_c \cos D_p) \cos \omega_c t}_{\text{término de portadora piloto}} - \underbrace{(A_c \text{ sen } D_p) m(t) \text{ sen } \omega_c t}_{\text{término de datos}} \tag{5–75b}$$

El nivel del término de portadora piloto se establece mediante el valor de la desviación pico, $\Delta\theta = D_p$.

Para señales moduladas por ángulo, el *índice de modulación digital h* se define como

$$h = \frac{2\Delta\theta}{\pi} \tag{5–76}$$

donde $2\Delta\theta$ es la máxima desviación pico a pico de fase (radianes) durante el tiempo requerido para enviar un símbolo, T_s. Para la señalización binaria, el tiempo del símbolo es igual al tiempo de bit ($T_s = T_b$).

El nivel del término de portadora piloto se establece por el valor de la desviación pico, la cual es de $\Delta\theta = D_p$ para $m(t) = \pm 1$. Si D_p es pequeña, entonces el término de portadora piloto tiene una amplitud relativamente grande en comparación con el término de datos, y en consecuencia existe muy poca potencia en éste, el cual contiene la información fuente. Para máximizar la eficiencia de señalización y que haya una baja probabilidad de error, debe intensificarse la potencia en el término de datos. Esto se logra dejando que $\Delta\theta = D_p = 90° = \pi/2$ radianes, lo cual corresponde al índice de modulación digital de $h = 1$. Para este caso óptimo donde $h = 1$, la señal BPSK se convierte en

$$s(t) = -A_c m(t) \text{ sen } \omega_c t \tag{5–77}$$

En este texto se asume que $\Delta\theta = 90°$, $h = 1$ se utilizan para la señalización por BPSK, a menos que se indique lo contrario. La ecuación (5-77) muestra que la BPSK es equivalente a la señalización DSB-SC con una forma de onda de datos de banda base polar. La envolvente compleja para esta señal BPSK es

$$g(t) = jA_c m(t) \qquad \text{para BPSK} \tag{5–78}$$

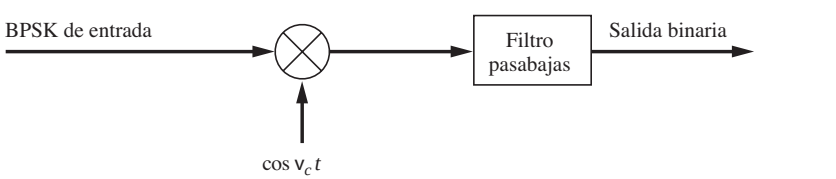
Aplicando la ecuación (3-41) se obtiene la PSD para la envolvente compleja, la cual es

$$\mathcal{P}_g(f) = A_c^2 \; T_b \left(\frac{\text{sen } \pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2 \qquad \text{(para BPSK)} \tag{5–79}$$

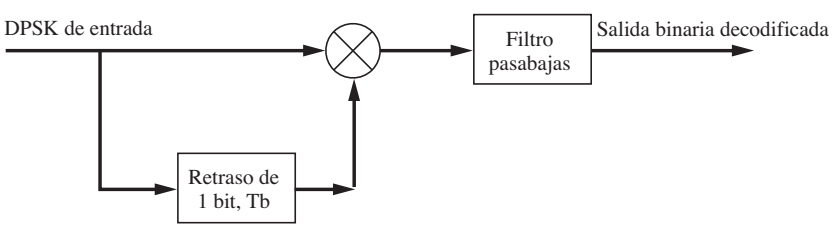
donde $m(t)$ tiene valores de ± 1, así que $s(t)$ tiene una potencia promedio normalizada de $A_c^2/2$. La PSD para la señal BPSK correspondiente se evalúa trasladando el espectro de banda base a la frecuencia de la portadora, como se comprueba sustituyendo la ecuación (5-79) dentro de la ecuación (5-2b). El espectro de la BPSK resultante se observa en la figura 5-20b. El ancho de banda de nulo a nulo para la BPSK es también de $2R$, igual que el encontrado para la OOK.

Se debe emplear la detección síncrona para identificar la BPSK, como se ilustra en la figura 5-22a. Dado que no existe un término de portadora discreta en la señal BPSK, se puede utilizar un PLL para extraer la referencia de portadora *sólo* si una portadora piloto de bajo nivel se transmite junto con la señal BPSK. De otra manera, se puede recurrir a un lazo de Costas o a un lazo cuadrático (figura 5-3) para sintetizar la referencia de portadora a partir de esta señal DSB-SC (es decir, BPSK) y para proveer una detección coherente. No obstante, debe resolverse la ambigüedad de 180° de fase, como se analizó en la sección 5-4. Esto puede llevarse a cabo empleando codificación diferencial a la entrada del transmisor y decodificación diferencial a la salida del receptor, como se ilustró previamente en la figura 3-17.

Para una óptima detección de BPSK (es decir, para la BER más baja posible en el caso de AWGN), el filtro pasabajas en la figura 5-22a es reemplazado por un procesamiento con filtro acoplado de integra y deshecha, como fue ilustrado en la figura 5-21c, donde V_T se establece a 0 V para el caso de BPSK. La probabilidad de error en bits resultante se presenta en la sección 7-3.



(a) Detección de BPSK (detección coherente)



(b) Detección de DPSK (detección parcialmente coherente)

Figura 5–22 Detección de BPSK y DPSK.

Modulación por corrimiento de fase diferencial (DPSK)

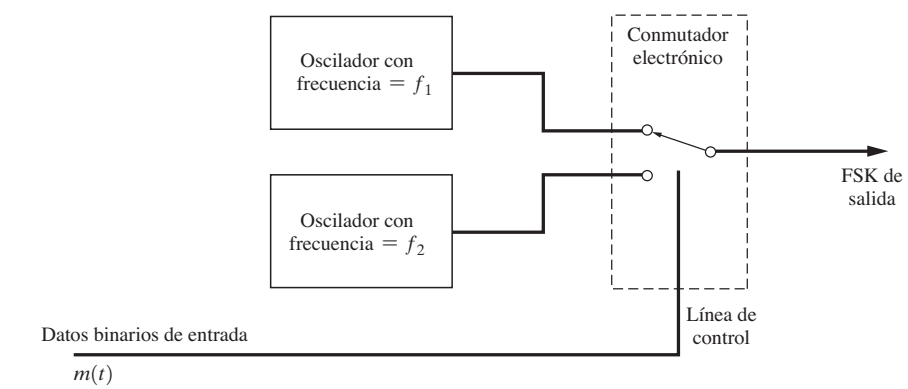
Las señales moduladas por corrimiento de fase no pueden ser detectadas en forma no coherente. Sin embargo, se puede emplear una técnica parcialmente coherente donde la referencia de fase para el intervalo de señalización actual se suministra mediante una versión retrasada de la señal que ocurre durante el intervalo de señalización previo. Esto se ilustra con el receptor mostrado en la figura 5-22b, donde la decodificación diferencial se genera mediante el retraso (de 1 bit) y el multiplicador. Consecuentemente, si los datos en la señal BPSK se decodifican en forma diferencial (vea la ilustración en la tabla 3-4 para un ejemplo), entonces la secuencia de datos *decodificada* será la que se recupere a la salida del receptor. Esta técnica de señalización, que consiste en la transmisión de una señal BPSK diferencialmente codificada, se conoce como DPSK.

Para una óptima detección de DPSK, el filtro pasabajas de la figura 5-22 debe reemplazarse por un filtro acoplado de integra y deshecha, y la señal DPSK de entrada debe prefiltrarse con un filtro pasabanda que tiene una respuesta al impulso de $h(t) = \Pi[(t - 0.5T_b)/T_b] \cos(\omega_c t)$. (Vea la figura 7-12 para mayores detalles acerca de este receptor óptimo.) La BER resultante se genera a partir de las ecuaciones (7-66) y (7-67).

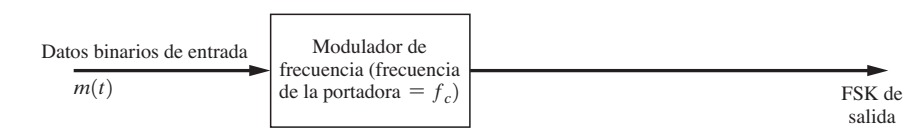
En la práctica, a menudo se emplea la DPSK en lugar de la BPSK, debido a que el receptor de DPSK no requiere un circuito sincronizador de portadora. Un ejemplo de ello es el módem Bell 212A (1,200 bits/s) descrito en el apéndice C, tabla C-6.

Modulación por corrimiento de frecuencia (FSK)

La señal FSK puede caracterizarse en dos tipos, dependiendo del método empleado para generarla. Uno de ellos se presenta al conmutar la línea de salida del transmisor entre dos osciladores diferentes, como se muestra en la figura 5-23a. Este tipo produce una forma de onda de salida que es discontinua durante los tiempos de conmutación. A esto se le llama *FSK de fase discontinua*, ya que



(a) FSK de fase discontinua



(b) FSK de fase continua

Figura 5–23 Generación de FSK.

$\theta(t)$ es discontinua durante los tiempos de conmutación. La señal FSK de fase discontinua se representa mediante

$$s(t) = A_c \cos[\omega_c t + \theta(t)] = \begin{cases} A_c \cos(\omega_1 t + \theta_1), & \text{para } t \text{ en el intervalo de tiempo en que se envía un 1 binario} \\ A_c \cos(\omega_2 t + \theta_2), & \text{para } t \text{ en el intervalo de tiempo en que se envía un 0 binario} \end{cases} \tag{5–80}$$

donde f_1 es la llamada frecuencia de *marca* (1 binario) y f_2 es la denominada frecuencia de *espacio* (0 binario). θ_1 y θ_2 son las fases de inicio de los dos osciladores. La función de fase discontinua es

$$\theta(t) = \begin{cases} \omega_1 t + \theta_1 - \omega_c t, & \text{para } t \text{ durante el intervalo de 1 binario} \\ \omega_2 t + \theta_2 - \omega_c t, & \text{para } t \text{ durante el intervalo de 0 binario} \end{cases}$$

□a que los transmisores por FSK no se construyen de esta manera, el enfoque será del segundo tipo, mostrado en la figura 5-23b.

La señal *FSK de fase continua* se genera alimentando la señal de datos a un modulador de frecuencia, como se observa en la figura 5-23b. Esta señal FSK se representa (consulte la sección 5-6) a través de

$$s(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + D_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)\, d\lambda\right]$$

o

$$s(t) = \text{Re}\{g(t)\, e^{j\omega_c t}\} \tag{5–81a}$$

donde

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)} \tag{5–81b}$$

$$\theta(t) = D_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)\, d\lambda \quad \text{para FSK} \tag{5–81c}$$

y $m(t)$ es la señal digital de banda base. A pesar de que $m(t)$ es discontinua en los tiempos de conmutación, la función de fase $\theta(t)$ es continua, ya que $\theta(t)$ es proporcional a la integral de $m(t)$. Si la forma de onda de entrada de datos seriales es binaria, como una señal de banda base polar, entonces la señal FSK resultante se llama señal *FSK binaria*. Por supuesto que una señal multinivel de entrada producirá una señal FSK multinivel. En esta sección se asume que la entrada es una señal binaria y por ello se examinarán las propiedades de las señales FSK binarias.

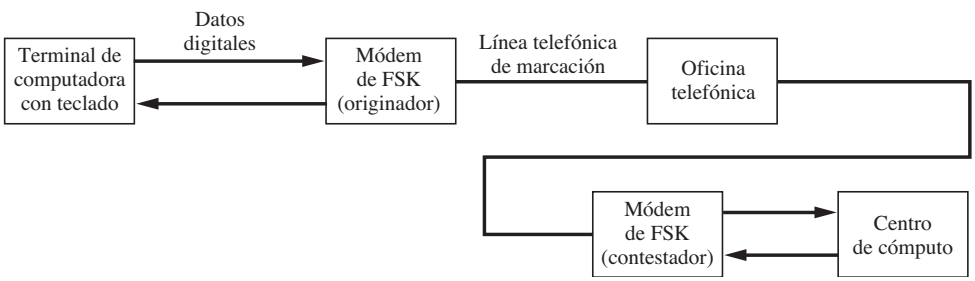


Figura 5–24 Comunicación entre computadoras utilizando señalización por FSK.

En general, los espectros de las señales FSK son difíciles de evaluar, ya que la envolvente compleja $g(t)$ es una función no lineal de $m(t)$. Sin embargo, se pueden aplicar las técnicas desarrolladas en la sección 5-6, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5–4 ESPECTRO DEL MÓDEM TIPO BELL 103 FSK

Las computadoras personales a menudo se conectan a computadoras remotas a través de módems y líneas telefónicas analógicas de marcación. Éstas poseen una banda de paso en el rango de VF desde 300 a 3,300 Hz. Debido a que las señales digitales de banda base (como las señales con código de línea polar) no poseen frecuencias dominantes en esta banda, regularmente se modulan en una portadora para producir una señal pasabanda que tiene componentes espectrales dominantes dentro del rango de VF. Para lograr esto, los módems (es decir, un modulador y un demodulador) se conectan a la línea telefónica en cada terminal. (Vea la figura 5-24.) Los módems V.34 de 28.8 kb/s emplean la señalización por QAM, como se verá en la sección 5-10, y los módems V.90 de 56 kb/s, a su vez, utilizan una técnica PCM (consulte la sección 3-3). La señalización FSK se empleó en el pasado y continúa utilizándose para la identificación de llamadas telefónicas (estándar Bell 202—consulte las tablas 8-1 y C-5), así como en muchas aplicaciones inalámbricas, debido a su costo económico.

La evaluación de los espectros de las señales FSK se demostrarán utilizando como ejemplo el módem estándar Bell System 103 de 300 b/s. Considerando la figura 5-24, encontramos que cada módem contiene tanto un transmisor como un receptor por FSK, de tal forma que la terminal de computadora puede tanto "hablar" como "escuchar". Se usan dos bandas de frecuencia de FSK, una de alrededor de 1 kHz y otra de alrededor de 2 kHz, para hacer posible el hablar y escuchar simultáneamente. Este enfoque se llama *capacidad full-duplex*. (En la *half-duplex* no se puede escuchar mientras se habla, y viceversa, mientras que en la *simplex* sólo se puede hablar o escuchar.) Las frecuencias estándar de marca y de espacio para las dos bandas se muestran en la tabla 5-5. En ésta se puede observar que la desviación pico a pico es de $2\Delta F = 200$ Hz.

A continuación se evaluará el espectro para un módem de tipo Bell 103 en el caso de la señal FSK con el mayor ancho de banda, obtenido cuando la señal de datos de entrada consiste de una onda cuadrada determinista (periódica), correspondiente a un patrón alternante de datos (es decir, 10101010).[9] Esto se ilustra en la figura 5-25a, donde T_b es el intervalo de tiempo para 1 bit y $T_0 = 2T_b$ es el periodo de modulación de los datos. El espectro se obtiene con la técnica de la serie de Fourier desarrollada en la sección 5-6 y en el ejemplo 5-2. Ya que la modulación es periódica, se puede esperar que el espectro de FSK sea un espectro de línea (es decir, funciones delta). Aplicando las ecuaciones (5-81c) y (5-42), se encuentra que la desviación pico de frecuencia es $\Delta F = D_f/(2\pi)$ para $m(t)$ con valores de ± 1. Este resultado en la función de fase triangular se muestra en la figura 5-25b. A partir de la figura, se tiene que el índice de modulación digital es

$$h = \frac{2\Delta\theta}{\pi} = \Delta F T_0 = \frac{2\Delta F}{R} \tag{5–82}$$

donde la velocidad de bit es $R = 1/T_b = 2/T_0$. Observe que en esta aplicación el índice de modulación digital, como se obtiene a partir de la ecuación (5-82), es idéntico al índice de modulación de FM definido por la ecuación (5-48), debido a que

$$h = \frac{\Delta F}{1/T_0} = \frac{\Delta F}{B} = \beta_f$$

siempre y cuando el ancho de banda $m(t)$ se defina como $B = 1/T_0$.

La serie de Fourier para la envolvente compleja es

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n \, e^{jn\omega_0 t} \tag{5–83}$$

[9] En el caso de los datos aleatorios, la PSD para $g(t)$ se obtiene de la curva $h = 0.7 \approx 0.67$ de la figura 5-27.

TABLA 5–5 FRECUENCIAS DE MARCA Y ESPACIO PARA EL MÓDEM DE TIPO BELL 103

	Módem de origen (Hz)	**Módem contestador (Hz)**
Frecuencias de transmisión		
Marca (1 binario)	$f_1 = 1{,}270$	$f_1 = 2{,}225$
Espacio (0 binario)	$f_2 = 1{,}070$	$f_2 = 2{,}025$
Frecuencias de recepción		
Marca (1 binario)	$f_1 = 2{,}225$	$f_1 = 1{,}270$
Espacio (0 binario)	$f_2 = 2{,}025$	$f_2 = 1{,}070$

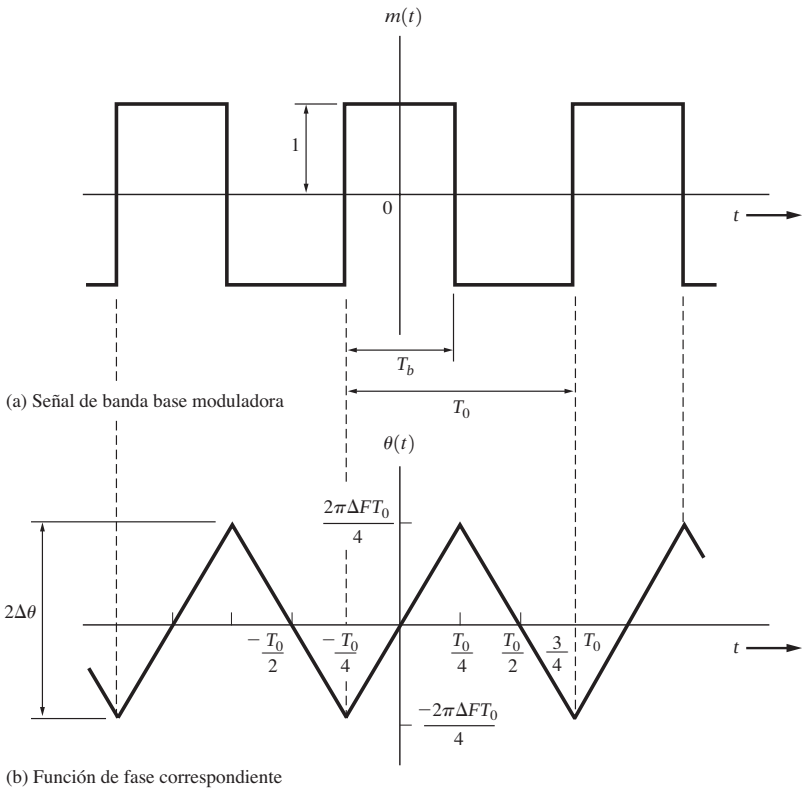


Figura 5–25 Señal de datos de entrada y función de fase de la señal FSK.

donde $f_0 = 1 / T_0 = R/2$,

$$c_n = \frac{A_c}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\theta(t)} e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{A_c}{T_0} \left[\int_{-T_0/4}^{T_0/4} e^{j\Delta\omega t - jn\omega_0 t}\, dt + \int_{T_0/4}^{3T_0/4} e^{-j\Delta\omega (t-(T_0/2))} e^{-jn\omega_0 t}\, dt \right] \tag{5–84}$$

y $\Delta\omega = 2\pi\Delta F = 2\pi h/T_0$. La ecuación (5-84) se reduce a

$$c_n = \frac{A_c}{2}\left[\left(\frac{\text{sen}[(\pi/2)(h-n)]}{(\pi/2)(h-n)}\right) + (-1)^n\left(\frac{\text{sen}[(\pi/2)(h+n)]}{(\pi/2)(h+n)}\right)\right] \tag{5–85}$$

donde el índice de modulación digital es $h = 2\Delta F/R$, $2\Delta F$ es el corrimiento pico a pico de frecuencia, y R es la velocidad de bit. A partir de las ecuaciones (5-49) y (5-59) se observa que el espectro para esta señal FSK con datos alternantes es

$$S(f) = \tfrac{1}{2}\left[G(f-f_c) + G^*(-f-f_c)\right] \tag{5–86a}$$

donde

$$G(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\,\delta(f-nf_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\,\delta\left(f - \frac{nR}{2}\right) \tag{5–86b}$$

y c_n es dado por la ecuación (5-85).

Los espectros de FSK se pueden evaluar fácilmente para diferentes corrimientos de frecuencia ΔF y velocidades de bit R si se utiliza una computadora personal. La figura 5-26 muestra un resumen de tres ejecuciones por computadora aplicando diferentes conjuntos de parámetros. La figura 5-26a presenta los espectros de FSK para el Bell 103. En este caso, cuando se utilizan los parámetros para el Bell 103, el índice de modulación digital es de $h = 0.67$, y no hay líneas espectrales a las frecuencias de marca y de espacio f_1 y f_2, respectivamente. Las figuras 5-26b y 5-26c exponen los espectros de FSK para $h = 1.82$ y $h = 3.33$. Advierta que conforme el índice de modulación aumenta, el espectro se concentra alrededor de f_1 y f_2. Éste es el mismo resultado pronosticado por el teorema de PSD para FM de banda ancha [ecuación (5-66)], ya que la PDF de la modulación binaria consiste de dos funciones delta. (Vea la figura 5-15.)

El ancho de banda de transmisión aproximado B_T para la señal FSK se obtiene a partir de la regla de Carson, $B_T = 2(\beta+1)B$, donde $\beta = \Delta F/B$. Esto equivale a

$$B_T = 2\Delta F + 2B \tag{5–87}$$

donde B es el ancho de banda de la forma de onda digital de modulación (por ejemplo, una onda cuadrada). En el ejemplo sobre la forma de onda como patrón de pruebas con 1 y 0 binarios alternantes, el ancho de banda de esta forma de onda cuadrada moduladora (asumiendo que se utiliza el primer tipo nulo del ancho de banda), es de $B = R$, y con base en la ecuación (5-87) se encuentra que el ancho de banda de transmisión por FSK se convierte en

$$B_T = 2(\Delta F + R) \tag{5–88}$$

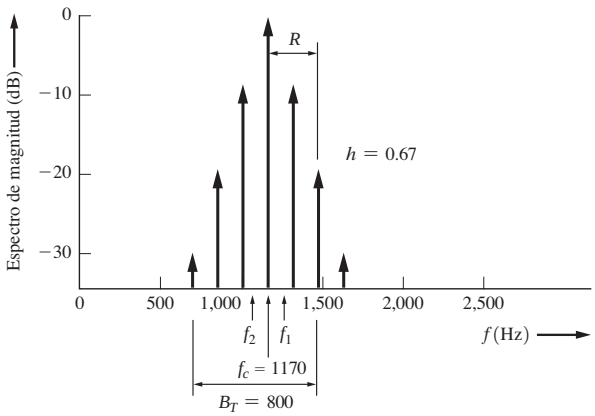
Este resultado se ilustra en la figura 5-26. Si se usa un filtro de premodulación de coseno realzado, entonces el ancho de banda de transmisión de la señal FSK se convierte en

$$B_T = 2\Delta F + (1+r)R \tag{5–89}$$

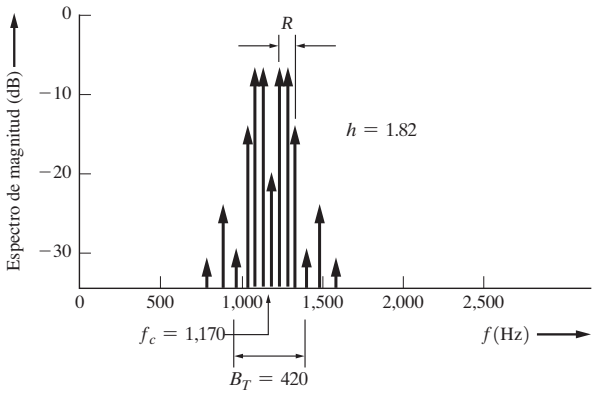
Para una FSK de banda ancha, donde $\beta \gg 1$, ΔF domina en estas ecuaciones, y se tiene que $B_T = 2\Delta F$. Para una FSK de banda estrecha, el ancho de banda de transmisión es $B_T = 2B$.

La PSD exacta para señales FSK de fase continua es difícil de evaluar cuando se trata de una modulación de datos aleatorios. Sin embargo, se puede llevar a cabo mediante algunas técnicas estadísticas elegantes [Proakis, 1995, pp. 209-215; Anderson y Salz, 1965; Bennett y Rice, 1963]. La PSD resultante para la envolvente compleja de la señal FSK es[10]

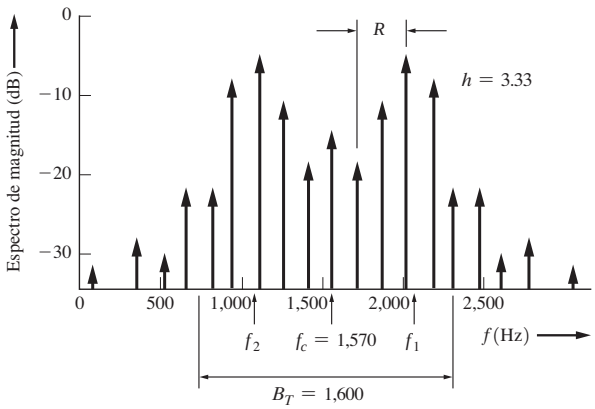
[10] Se asume que $h \neq 0, 1, 2 \ldots$ Cuando $h = 0, 1, 2, \ldots$, existen también términos discretos (funciones delta) en el espectro.



(a) Espectro de FSK con $f_2 = 1{,}070$ Hz, $f_1 = 1{,}270$ Hz, y $R = 300$ bits/s (parámetros para el Bell 103, modo de origen) para $h = 0.67$



(b) Espectro de FSK con $f_2 = 1{,}070$ Hz, $f_1 = 1{,}270$ Hz, y $R = 110$ bits/s para $h = 1.82$



(c) Espectro de FSK con $f_2 = 1{,}070$ Hz, $f_1 = 2{,}070$ Hz, y $R = 300$ bits/s para $h = 3.33$

Figura 5–26 Espectros de FSK para modulación con datos alternantes (se muestran las frecuencias positivas con valores de magnitud de un solo lado).

$$\mathcal{P}_g(f) = \frac{A_c^2 T_b}{2}$$
$$\times (A_1^2(f)[1 + B_{11}(f)] + A_2^2(f)[1 + B_{22}(f)] + 2B_{12}(f)A_1(f)A_2(f)) \tag{5–90a}$$

donde

$$A_n(f) = \frac{\text{sen}[\pi T_b(f - \Delta F(2n - 3))]}{\pi T_b(f - \Delta F(2n - 3))} \tag{5–90b}$$

y

$$B_{nm}(f) =$$
$$\frac{\cos[2\pi f T_b - 2\pi \Delta F T_b(n + m - 3)] - \cos(2\pi \Delta F T_b)\cos[2\pi \Delta F T_b(n + m - 3)]}{1 + \cos^2(2\pi \Delta F T_b) - 2\cos(2\pi \Delta F T_b)\cos(2\pi f T_b)} \tag{5–90c}$$

donde ΔF es la desviación de frecuencia pico, $R = 1/T_b$ es la velocidad de bit, y el índice de modulación digital es $h = 2\Delta F/R$. La PSD se grafica en la figura 5-27 para diversos valores del índice de modulación digital. Las curvas en esta figura se obtuvieron con un cálculo por MATLAB. La curva para $h = 0.7 \approx 0.67$ corresponde a la PSD de $g(t)$ para el módem de FSK Bell 103 de 300 bits/s del ejemplo 5-4.

La FSK puede detectarse con un detector de frecuencia (no coherente) o dos detectores de producto (detección coherente), como se muestra en la figura 5-28. En las secciones 7-3 y 7-4 se

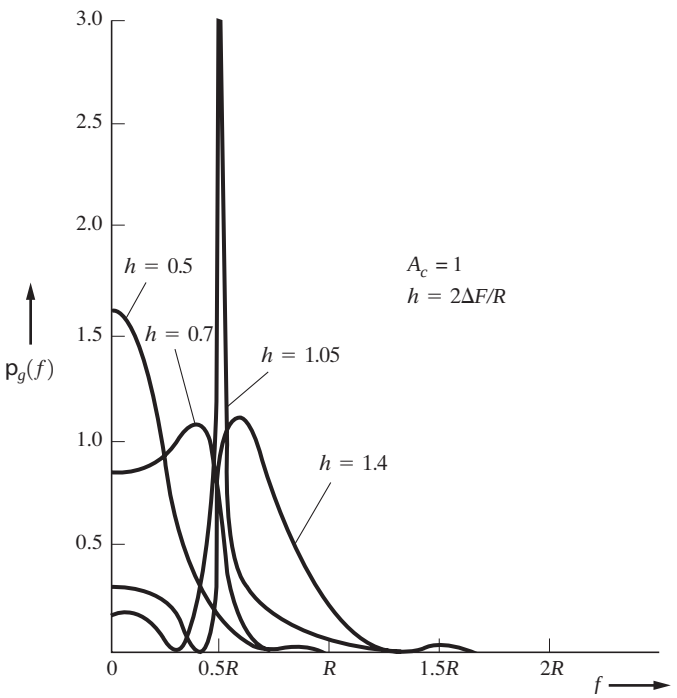
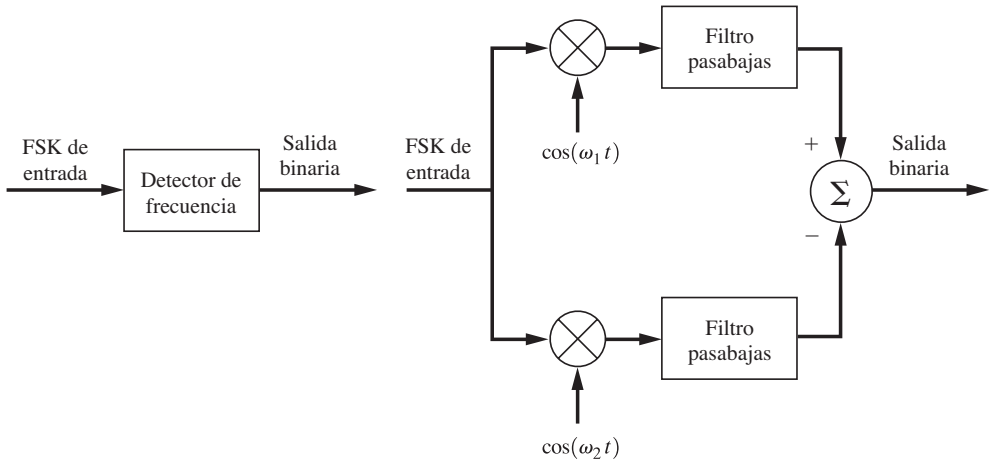


Figura 5–27 PSD para la envolvente compleja de FSK (se muestran las frecuencias positivas).



(a) Detección no coherente (b) Detección coherente (síncrona)

Figura 5–28 Detección de FSK.

estudian a detalle la detección coherente y no coherente de FSK, y se evalúa la BER. Para obtener la BER más baja posible cuando la señal FSK es corrompida por AWGN, se requiere una detección coherente con procesamiento por filtro acoplado, además de un dispositivo de umbral (comparador). (Vea la figura 7-8).

5–10 SEÑALIZACIÓN PASABANDA MULTINIVEL MODULADA

Con la señalización multinivel se permiten entradas digitales con más de dos niveles en la entrada del transmisor. Esta técnica se ilustra en la figura 5-29, la cual muestra cómo se pueden generar señales multinivel a partir de un flujo binario serial de entrada mediante un convertidor digital a analógico (DAC). Por ejemplo, suponga que se utiliza un DAC con $\ell = 2$ bits. Entonces el número de niveles en la señal multinivel es de $M = 2^\ell = 2^2 = 4$, como se ilustra en la figura 3-14a para pulsos rectangulares. La velocidad de símbolo (velocidad en bauds) de la señal multinivel es $D = R/\ell = \frac{1}{2}R$, donde la velocidad de bit es $R = 1/T_b$ bits/s.

Modulación por corrimiento de fase en cuadratura (QPSK) y modulación por corrimiento de fase *M*-aria (MPSK)

Si el transmisor es de PM con una señal digital de modulación de $M = 4$ niveles, entonces se genera una *modulación por corrimiento de fase M-aria* (MPSK) a la salida del transmisor. Asumiendo pulsos de datos en forma rectangular, un gráfico de los valores permitidos de la envolvente compleja, $g(t) = A_c e^{j\theta(t)}$, contendría cuatro puntos y un valor de g (un número complejo en general) para

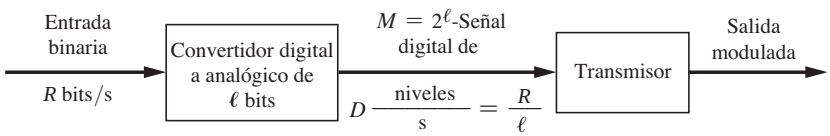


Figura 5–29 Sistema de transmisión digital multinivel.

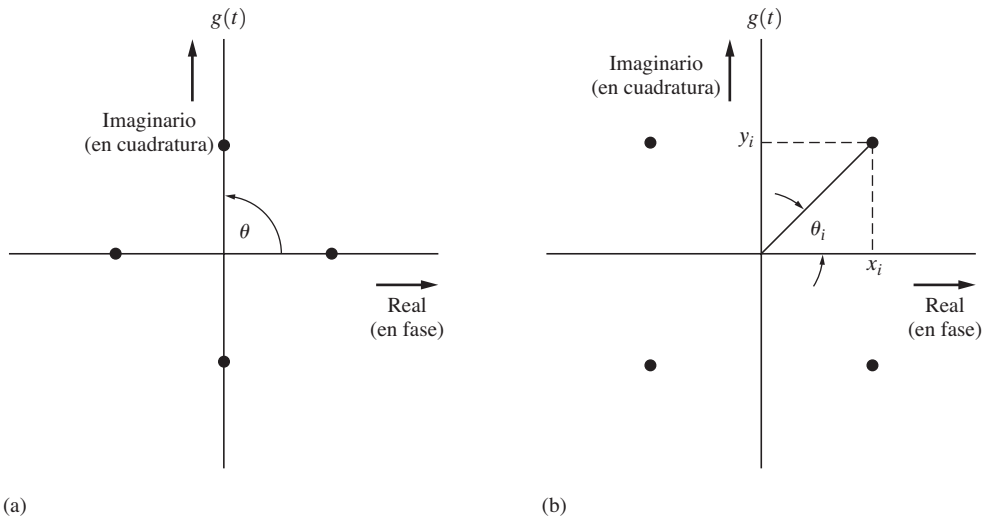


Figura 5–30 Constelaciones (valores permitidos de la envolvente compleja) para señales QPSK y $\pi/4$ QPSK.

cada uno de los cuatro valores multinivel, correspondientes a las cuatro fases permitidas para θ. La figura 5-30 muestra un gráfico de dos posibles conjuntos de $g(t)$. Por ejemplo, suponga que los valores multinivel permitidos en el DAC son -3, -1, $+1$ y $+3$ V. Entonces, en la figura 5-30a estos valores podrían corresponder a las fases de PSK de 0, 90, 180 y 270°, respectivamente. En la figura 5-30b dichos niveles corresponderían a las fases de portadora de 45, 135, 225 y 315°, respectivamente. Estas dos constelaciones para la señal son esencialmente iguales, con excepción de un corrimiento en la referencia de la fase de portadora.[11] Este ejemplo de PSK M-aria donde $M = 4$ se conoce como señalización *modulada por corrimiento de fase en cuadratura* (QPSK, por sus siglas en inglés).

La MPSK puede también generarse utilizando dos portadoras moduladas en cuadratura por los componentes x y y de la envolvente compleja, en lugar de utilizar un modulador de fase. En tal caso,

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)} = x(t) + jy(t) \tag{5–91}$$

donde los valores permitidos para x y y son

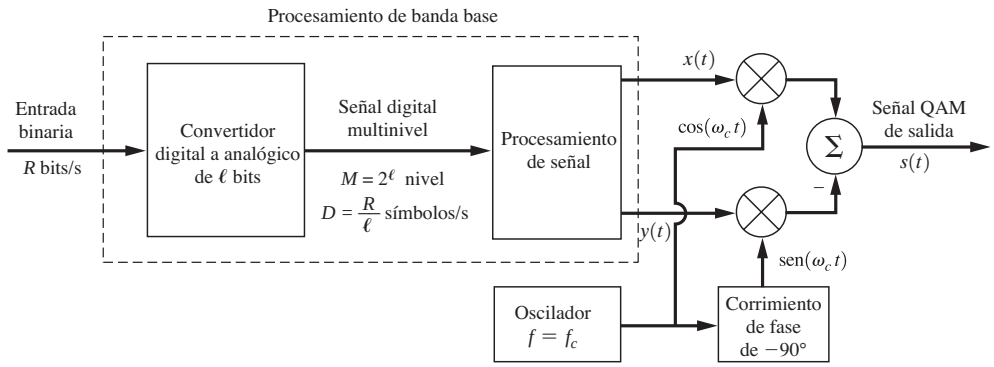
$$x_i = A_c \cos \theta_i \tag{5–92}$$

y

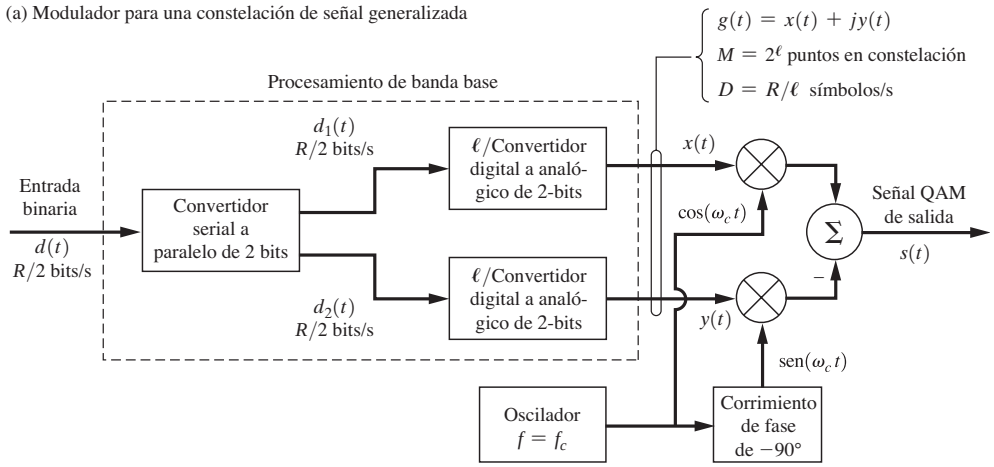
$$y_i = A_c \operatorname{sen} \theta_i \tag{5–93}$$

para los ángulos de fase permitidos θ_i, $i = 1, 2, ..., M$, de la señal MPSK. Esta situación se ilustra en la figura 5-31, donde el circuito de procesamiento de la señal implementa las ecuaciones (5-92) y (5-93). La figura 5-30 presenta la relación entre los ángulos de fase permitidos θ_i y los componentes (x_i, y_i) para dos constelaciones de la señal QPSK. Esto es idéntico al método en cuadratura para generar las señales moduladas que se presentan en la figura 4-28.

[11] Una constelación es un gráfico N-dimensional de los probables vectores de señal correspondientes a las posibles señales digitales. (Consulte la sección 3-4.)



(a) Modulador para una constelación de señal generalizada



(b) Modulador para una constelación de señal rectangular

Figura 5–31 Generación de señales QAM.

Para pulsos de datos en forma rectangular, la envolvente de la señal QPSK es constante. Es decir que no existe AM en la señal, aun durante los tiempos de transición de los datos, donde existe un corrimiento de fase de 180°, debido a que los datos cambian sus valores (de +1 a −1, por ejemplo) instantáneamente. Los datos en forma rectangular producen un espectro de potencia del tipo $(\text{sen } x/x)^2$ para la señal QPSK que posee grandes e indeseados lóbulos laterales espectrales (vea la figura 5-33). Estos lóbulos laterales indeseados pueden eliminarse si los pulsos de datos se filtran a una forma de pulso correspondiente a un filtro de coseno realzado. Desafortunadamente, esto produce AM en la señal QPSK resultante porque la forma de onda de datos filtrada no puede cambiar instantáneamente de un pico a otro cuando ocurre una transición de fase de 180°. A pesar de que el filtrado resuelve el problema de los lóbulos laterales espectrales pobres, crea a su vez otro: AM en la señal QPSK, por causa de la cual se requieren amplificadores lineales de baja eficiencia (clase A o clase B), en lugar de amplificadores no lineales de alta eficiencia (clase C), para amplificar la señal QPSK sin distorsión. En las aplicaciones de comunicación portátiles, estos amplificadores aumentan los requisitos en la capacidad de baterías por lo menos 50□.

Una posible solución a este dilema es utilizar QPSK con corrimiento (OQPSK, del inglés offset QPSK) o $\pi/4$ QPSK, cada una de la cuales posee una cantidad menor de AM (OQPSK y $\pi/4$ QPSK se estudiarán después de la siguiente sección).

Modulación en amplitud en cuadratura (QAM)

La señalización de portadora en cuadratura, como se muestra en la figura 5-31, se conoce como *modulación en amplitud en cuadratura* (QAM, por sus siglas en inglés). En general, las constelaciones para las señales QAM no se restringen a tener puntos de señalización permitidos sólo en un círculo (de radio A_c, como era el caso para MPSK). La señal QAM general es

$$s(t) = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\,\text{sen}\,\omega_c t \tag{5–94}$$

donde

$$g(t) = x(t) + jy(t) = R(t)\,e^{j\theta(t)} \tag{5–95}$$

Por ejemplo, una constelación popular para QAM de 16 símbolos ($M = 16$ niveles) se muestra en la figura 5-32, donde la relación entre (R_i, θ_i) y (x_i, y_i) puede evaluarse fácilmente para cada uno de los 16 valores de señal permitidos. Este tipo de señalización se utiliza en los módems para computadora V.22bis de 2,400 bits/s (consulte la tabla C-6). En este caso, se le permite a x_i y a y_i tener cuatro niveles por dimensión cada uno. Esta señal QAM de 16 símbolos se puede generar mediante dos convertidores digital a analógicos de $(\ell/2 = 2)$ bits y moduladores balanceados o simétricos en cuadratura, como se muestra en la figura 5-31b. Las formas de onda de los componentes I y Q se representan mediante

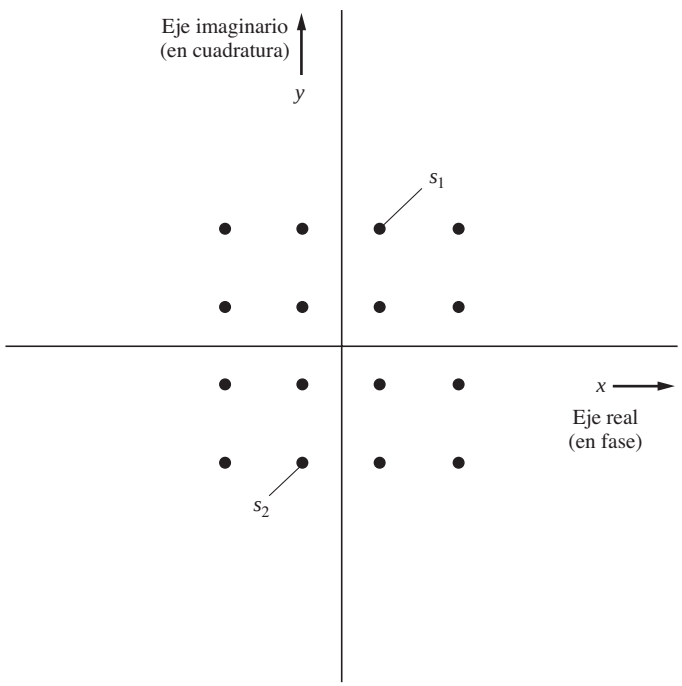
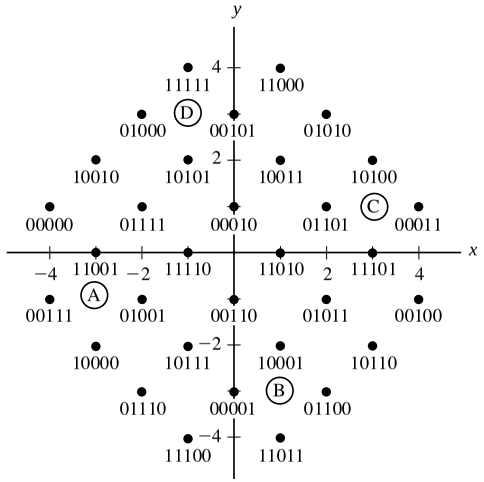
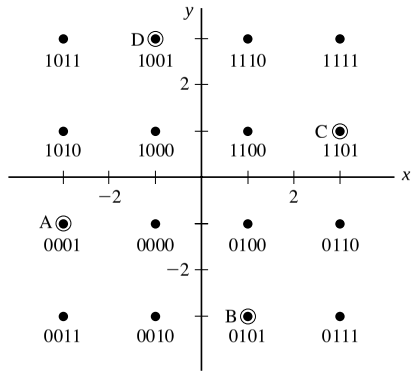


Figura 5–32 Constelación QAM de 16 símbolos (cuatro niveles por dimensión).

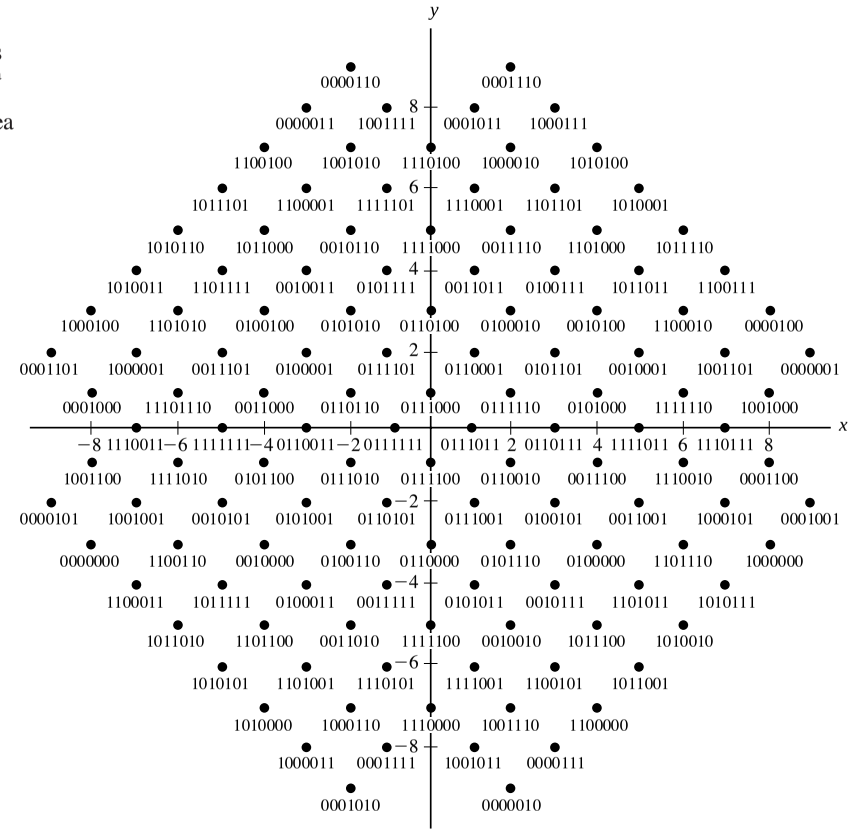
TABLA 5–6 ESTÁNDAR PARA MÓDEM V.32

	Elemento	**Constelación para señal**
Datos	Binarios seriales, asíncronos o síncronos Full-duplex a través de líneas con dos hilos[a]	*Opción 1*: QAM o QPSK
Frecuencia de la portadora	Transmisión[a]: 1,800 Hz Recepción[a]: 1,800 Hz	
Opción 1	9600 b/s para una alta SNR	
Velocidad de DATOS	4,800 b/s para una baja SNR	
Modulación	32 QAM, 2,400 bauds, para una SNR alta utilizando modulación con codificación convolucional (vea la figura 1-9, donde $n = 3$ y $m - k = 2$) con 4 bits de datos además de 1 bit de codificación por símbolo	
	QPSK, 2,400 bauds (estados A, B, C, D) para una baja SNR	
		Opción 2: 16 QAM o QPSK
Opción 2		
Velocidad de DATOS	9,600 b/s para una alta SNR 4,800 b/s para una baja SNR	
Modulación	16 QAM, 2,400 bauds, para una alta SNR	
	QPSK, 2,400 bauds (estados A, B, C, D) para una baja SNR	

[a] En este módem se emplea un híbrido de dos hilos a cuatro hilos para obtener las líneas de transmisión y recepción.

TABLA 5–7 ESTÁNDARES PARA MÓDEMS V.32BIS Y V.33

	Elemento	**Constelación para señal 128 QAM**
Datos	Binarios seriales	
V.32bis	Síncronos/asíncronos, full-duplex a través de una línea de marcación de dos hilos[a]	
V.33	Síncronos, full-duplex a través de una línea arrendada de cuatro hilos[b]	
Frecuencia de la portadora	Transmisión: 1,800 Hz	
	Recepción: 1,800 Hz	
Velocidad de datos	14,400 b/s	
Modulación	128 QAM, 2,400 bauds, utilizando una modulación por codificación convolucional (vea la figura 1-9, donde $n = 3$ y $m - k = 4$) con 6 bits de datos además de 1 bit de codificación por símbolo	
Modo de respaldo	12,000 bits/s utilizando 64 QAM, 2,400 bauds (no se muestra la constelación para la señal) y una modulación con codificación convolucional con 5 bits de datos, además de 1 bit de codificación por símbolo	



[a] El módem V.32bis utiliza una línea de dos hilos y un híbrido interno de dos hilos a cuatro hilos para obtener las líneas de transmisión y recepción.

[b] El módem V.33 utiliza dos hilos para transmisión y dos hilos para recepción.

$$x(t) = \sum_n x_n h_1\left(t - \frac{n}{D}\right) \tag{5–96}$$

y

$$y(t) = \sum_n y_n h_1\left(t - \frac{n}{D}\right) \tag{5–97}$$

donde $D = R/\ell$ y (x_n, y_n) denota uno de los valores (x_i, y_i) permitidos durante el tiempo de símbolo que se centra en $t = nT_s = n/D$ s (se llevan T_s s en enviar cada símbolo)□$h_1(t)$ es la forma de pulso que se utiliza para cada símbolo. Si no se restringe el ancho de banda de la señal QAM, la forma de pulso será rectangular y de una duración de T_s s. Algunos ejemplos de los estándares para módems QAM se muestran en las tablas 5-6 y 5-7. Estos módems se utilizan para suministrar conexiones por líneas telefónicas de una PC a un proveedor de servicio de Internet(ISP, por sus siglas en inglés).

En algunas aplicaciones, la sincronización entre los componentes $x(t)$ y $y(t)$ tiene un corrimiento de $T_s/2 = 1/(2D)$ s. Es decir, $x(t)$ se describirá por la ecuación (5-96) y el corrimiento se describirá como

$$y(t) = \sum_n y_n h_1\left(t - \frac{n}{D} - \frac{1}{2D}\right) \tag{5–98}$$

Un tipo popular de señalización con corrimiento es el *QPSK con corrimiento (OQPSK)*, el cual es idéntico a la QAM con corrimiento cuando $M = 4$. Un caso especial de OQPSK cuando $h_1(t)$ tiene una forma de pulso de tipo senoidal se conoce como *modulación por corrimiento mínimo* (MSK, por sus siglas en inglés). Este tipo de señalización se estudiará en una sección posterior. Aún más, se dice que una señal QPSK es *asimétrica* o *no equilibrada* si los componentes $x(t)$ y $y(t)$ tienen potencias o velocidades de datos desiguales (o ambas).

OQPSK y π/4 QPSK

La *modulación por corrimiento de fase en cuadratura con corrimiento* (OQPSK) es una PSK con $M = 4$, en donde los tiempos de transición de datos permitidos para los componentes I y Q se corren por un $\frac{1}{2}$ intervalo de símbolo (es decir, por un bit). Esta técnica se describe en las ecuaciones (5-96) y (5-98), donde el corrimiento es de $1/(2D)$, mismo que es una ventaja cuando se emplean pulsos de datos no rectangulares (es decir, filtrados), ya que reduce en gran escala la AM en la señal OQPSK porque ocurre una máxima transición de fase de sólo 90° para la señalización OQPSK, a diferencia de los 180° para QPSK, pues los datos de I y Q no pueden cambiar simultáneamente, ya que presentan un corrimiento.

Una señal con *modulación por corrimiento de fase en cuadratura de* $\pi/4$ ($\pi/4$ QPSK) se genera alternando entre dos constelaciones para QPSK que se rotan por $\pi/4 = 45°$ con respecto a cada una. Las dos constelaciones para QPSK, que se muestran en la figura 5-30, se usan alternadamente como sigue: dado un punto en una de las constelaciones para la señal que corresponde a dos bits de los datos de entrada, se leen dos bits para determinar el siguiente punto que se selecciona de la *otra* constelación. Es decir, los dos nuevos bits de entrada causan un corrimiento de fase de ±45° o ±135°, dependiendo de su valor. Por ejemplo, un 11 puede corresponder a un corrimiento de fase de $\Delta\theta = 45°$□un 10 a $\Delta\theta = -45°$□un 01 a $\Delta\theta = 135°$, y un 00 a $\Delta\theta = -135°$. Como esto utiliza una forma de codificación diferencial, se le conoce como *modulación por corrimiento de fase en cuadratura diferencial de* $\pi/4$ ($\pi/4$ DQPSK).

Los datos en la señal $\pi/4$ QPSK pueden detectarse fácilmente en el receptor utilizando un detector de FM seguido por un integrador reinicializable que integra sobre un periodo de símbolo (de 2 bits). El detector de FM produce la derivada de la fase y el integrador evalúa el corrimiento de

fase que ocurre sobre el intervalo de símbolo. El resultado es uno de cuatro posibles corrimientos de fase, ±45° y ±135°. Por ejemplo, si el corrimiento de fase detectado a la salida del integrador es de −45°, los datos detectados correspondientes son los bits 10. Los datos en la señal $\pi/4$ QPSK también pueden detectarse utilizando un procesamiento de IQ de banda base o mediante detección diferencial en la IF [Rappaport, 2002]. Las simulaciones por computadora indican que estas tres estructuras de receptor tienen casi el mismo rendimiento en error de la BER [Anvari y Woo, 1991]. En un canal AWGN el rendimiento de la BER de los tres detectores diferenciales (no coherentes) es de alrededor de 3 dB inferior al de la QPSK, pero la $\pi/4$ QPSK detectada coherentemente posee la misma BER que la QPSK, como se muestra en la figura 7-14. Para el caso de pulsos de datos no rectangulares, la AM en la $\pi/4$ QPSK es menor que para la QPSK, ya que el máximo corrimiento de fase para $\pi/4$ es de 135°, en comparación con los 180° para QPSK. Pero la AM en la OQPSK es aún menor, ya que tiene un máximo corrimiento de fase de 90°. Sin embargo, la $\pi/4$ QPSK es fácil de detectar y se ha adoptado para su uso en sistemas de telefonía celular TDMA (consulte el capítulo 8).

Los espectros de potencia para estas señales se describen en la siguiente sección.

PSD para MPSK, QAM, QPSK, OQPSK y $\pi/4$ QPSK

La PSD para las señales MPSK y QAM es relativamente fácil de evaluar para el caso de señalización con forma de bit rectangular. Aquí, la PSD tiene la misma forma de espectro que la obtenida para la BPSK, *siempre y cuando* se emplee la escala de frecuencia apropiada.

La PSD para la envolvente compleja, $g(t)$, de la señal MPSK o QAM puede obtenerse con la ecuación (6-70d). Se sabe que

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n f(t - nT_s) \tag{5–99}$$

donde c_n es una variable aleatoria de valor complejo que representa el valor multinivel durante el n-ésimo pulso de símbolo, $f(t) = \Pi(t/T_s)$ es el pulso de símbolo rectangular con una duración de símbolo de T_s, y $D = 1/T_s$ es la velocidad de símbolo (o velocidad en bauds). El pulso rectangular tiene la transformada de Fourier

$$F(f) = T_s\left(\frac{\text{sen } \pi f T_s}{\pi f T_s}\right) = \ell T_b\left(\frac{\text{sen } \ell\, \pi f T_b}{\ell\, \pi f T_b}\right) \tag{5–100}$$

donde $T_s = \ell T_b$. Es decir, existen ℓ bits que representan a cada valor multinivel permitido. Para la señalización simétrica (del tipo polar), como se ilustra en la figura 5-32 para el caso de $M = 16$, con multiniveles igualmente probables, el valor de la media de c_n es

$$m_c = \overline{c_n} = 0 \tag{5–101a}$$

y la varianza es

$$\sigma_c^2 = \overline{c_n c_n^*} = \overline{|c_n|^2} = C \tag{5–101b}$$

donde C es una constante real positiva. Sustituyendo las ecuaciones (5-100) y (5-101) dentro de la ecuación (6-70d), se encuentra que la PSD para la envolvente compleja de las señales MPSK y QAM con modulación de datos con forma de bit rectangular es

$$\mathcal{P}_g(f) = K\left(\frac{\text{sen } \pi f \ell T_b}{\pi f \ell T_b}\right)^2, \quad \text{para MPSK y QAM} \tag{5–102}$$

donde $K = C\ell T_b$, $M = 2^\ell$ es el número de puntos en la constelación para la señal y la velocidad de bit es $R = 1/T_b$. Para una potencia total transmitida de P watts, el valor de K es de $K = 2P\ell T_b$,

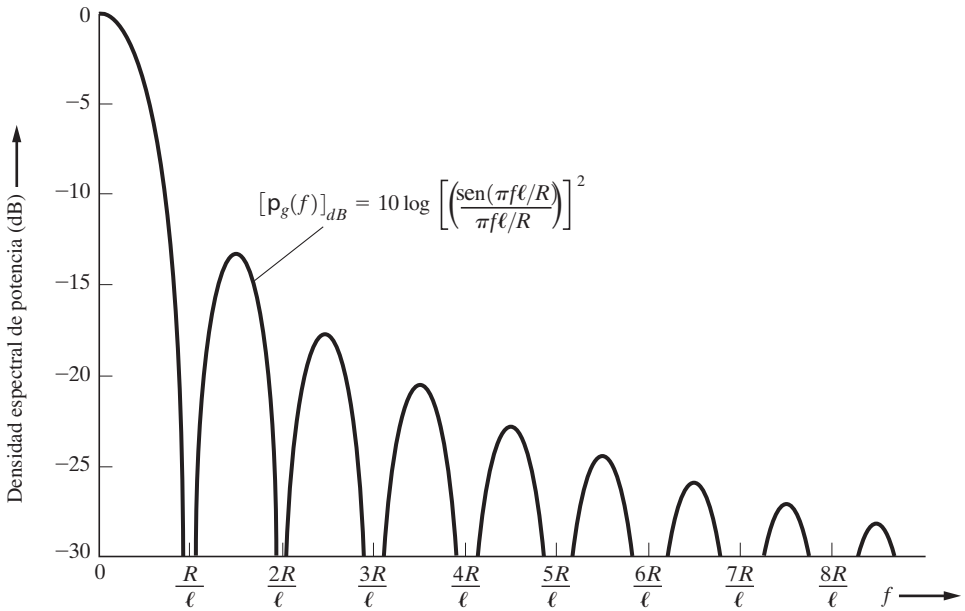


Figura 5–33 PSD para la envolvente compleja de MPSK y QAM con pulsos de datos rectangulares, donde $M = 2^{\ell}$, R es la velocidad de bit y $R/\ell = D$ es la velocidad en baudios (sólo se muestran las frecuencias positivas). Utilice $\ell = 2$ para la PSD de la envolvente compleja de QPSK, OQPSK y $\pi/4$ QPSK.

debido a que $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_s(f)\, df = P$. Esta PSD para la envolvente compleja se grafica en la figura 5-33. La PSD de la señal MPSK o QAM se obtiene simplemente al trasladar la PSD de la figura 5-33 a la frecuencia de la portadora, como se describe en la ecuación (5-2b). Para $\ell = 1$, la figura presenta la PSD para la BPSK (en otras palabras, compare la figura 5-33, $\ell = 1$, con la figura 5-20b). También se observa que la PSD para la envolvente compleja de señales multinivel de banda base, como se describe en la ecuación (5-102), es esencialmente la misma que la PSD para las señales multinivel de banda base que se obtuvieron en la ecuación (3-53).

La ecuación (5-102) y la figura 5-33 también describen la PSD para QPSK, OQPSK y $\pi/4$ QPSK para pulsos de datos con forma rectangular cuando se utiliza $\ell = 2(M = 4)$. Para una señalización con pulsos de datos no rectangulares, la fórmula de la PSD puede también obtenerse siguiendo el mismo procedimiento que el de la ecuación (5-102), siempre y cuando se emplee la función de transferencia de pulso apropiada para reemplazar la ecuación (5-100). Por ejemplo, para un filtrado de coseno realzado, donde $f_0 = 1/(2\ell T_b)$, la PSD de la figura 5-33 se convertirá en $\mathcal{P}_g(f) = 20 \log[|H_e(f)|]$, donde $H_e(f)$ es la función de transferencia de un coseno realzado de la ecuación (3-69) y la figura 3-26a.

De la figura 5-33 se puede observar que el ancho de banda de transmisión de nulo a nulo de MPSK o QAM es

$$B_T = 2R/\ell \tag{5–103}$$

cuando se utilizan pulsos de datos rectangulares.

Sustituyendo la ecuación (5-103) dentro de la ecuación (3-55) se encuentra que la eficiencia espectral de la señalización MPSK o QAM con pulsos de datos rectangulares es

$$\eta = \frac{R}{B_T} = \frac{\ell}{2} \frac{\text{bits/s}}{\text{Hz}} \tag{5–104}$$

donde $M = 2^\ell$ es el número de puntos en la constelación para la señal. Para una señal QAM con $M = 16$, la eficiencia del ancho de banda es $\eta = 2$ bits/s por hertz en el ancho de banda.

Eficiencia espectral para MPSK, QAM, QPSK, OQPSK y $\pi/4$ QPSK con filtrado de coseno realzado

El espectro que se muestra en la figura 5-33 se obtuvo para el caso de pulsos de símbolo rectangulares, y los lóbulos laterales espectrales son terribles. El primer lóbulo lateral se atenúa sólo por 13.4 dB. Los lóbulos laterales pueden eliminarse si se ocupa un filtro de coseno realzado, ya que éste tiene una respuesta en frecuencia absolutamente limitada por banda. Considerando la sección 3-6, se escoge el ancho de banda a 6 dB del filtro de coseno realzado de tal forma que éste sea la mitad de la velocidad de símbolo (velocidad en bauds) para que no exista ISI. Es decir, $f_0 = \frac{1}{2}(R/\ell)$. El filtro de coseno realzado posee la desventaja de introducir AM en las señales MPSK, además de modificar la AM en las señales QAM. En la práctica a menudo se usa una característica de respuesta en frecuencia de coseno realzado de raíz cuadrática (SRRC, por sus siglas en inglés) en el transmisor, además de otro filtro SRRC en el receptor para prevenir la ISI simultáneamente en los pulsos filtrados que se reciben y minimizar los errores en bit debido al ruido en el canal. Sin embargo, el filtro SRRC también introduce AM en la señal transmitida. Si la forma de pulso general satisface la característica del filtro de coseno realzado, entonces, empleando la ecuación (3-74), el ancho de banda absoluto de la señal moduladora de M niveles es

$$B = \tfrac{1}{2}(1 + r)D \tag{5–105}$$

donde $D = R/\ell$ y r es el factor de *rolloff* de la característica del filtro. Incluso, del estudio sobre AM (y más específico, sobre DSB-SC) se sabe que el ancho de banda de transmisión se relaciona con el ancho de banda de modulación a través de $B_T = 2B$, así que el ancho de banda de transmisión general absoluto de la seña QAM con pulsos filtrados por coseno realzado es

$$B_T = \left(\frac{1 + r}{\ell}\right)R \tag{5–106}$$

Esto se compara con un ancho de banda absoluto infinito, y un ancho de banda nulo de $B_T = 2R/\ell$ para el caso de QAM con pulsos de datos rectangulares, como se muestra en la figura 5-33.

Debido a que $M = 2^\ell$ implica que $\ell = \log_2 M = (\ln M)/(\ln 2)$, la eficiencia espectral de la señalización de tipo QAM con filtro de coseno realzado es

$$\eta = \frac{R}{B_T} = \frac{\ln M}{(1 + r)\ln 2} \frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}} \tag{5–107}$$

Este resultado es importante, ya que describe qué tan rápido se puede enviar una señal para un ancho de banda prescrito. El resultado también se mantiene para la MPSK, debido a que ésta es un caso especial de QAM. La ecuación (5-107) se utiliza para generar la tabla 5-8, la cual ilustra la velocidad de bit permitida por hertz del ancho de banda de transmisión para la señalización QAM. Por ejemplo, suponga que se desea enviar una señal a través de un satélite de comunicaciones que tiene un ancho de banda disponible de 2.4 MHz. Si se ocupa BPSK ($M = 2$) con un factor de *rolloff* de 50□, se podrán enviar señales a una velocidad de $B_T \times \eta = 2.4 \times 0.677 = 1.60$ Mbits/s□pero si se emplea QPSK ($M = 4$) con un factor de *rolloff* de 25□, la velocidad sería de $2.4 \times 1.6 = 3.84$ Mbits/s.

TABLA 5–8 EFICIENCIA ESPECTRAL PARA SEÑALIZACIÓN QAM CON FORMACIÓN DE PULSO DE COSENO REALZADO (use $M = 4$ para señalización QPSK, OQPSK y $\pi/4$ QPSK)

Número de niveles, M (símbolos)	Tamaño del DAC, ℓ (bits)	$\eta = \frac{R}{B_T}\left(\frac{\text{bit/s}}{\text{Hz}}\right)$					
		$r = 0.0$	$r = 0.1$	$r = 0.25$	$r = 0.5$	$r = 0.75$	$r = 1.0$
2	1	1.00	0.909	0.800	0.667	0.571	0.500
4	2	2.00	1.82	1.60	1.33	1.14	1.00
8	3	3.00	2.73	2.40	2.00	1.71	1.50
16	4	4.00	3.64	3.20	2.67	2.29	2.00
32	5	5.00	4.55	4.0	3.33	2.86	2.50

Para conservar el ancho de banda, el número de niveles M en la ecuación (5-107) no se puede aumentar mucho ya que, para una potencia pico de envolvente (PEP) dada, el espacio entre los puntos de la señal en la constelación para la misma disminuirán, y el ruido en la señal recibida causará errores. (El ruido mueve el vector de la señal recibida a una nueva ubicación que puede corresponder a un nivel diferente de la señal.) Sin embargo, se sabe que R definitivamente debe ser menor a C, la capacidad del canal (sección 1-9), para que los errores se mantengan pequeños. En consecuencia, utilizando la ecuación (1-10), se requiere que

$$\eta < \eta_{\text{máx}} \tag{5–108a}$$

donde

$$\eta_{\text{máx}} = \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) \tag{5–108b}$$

5–11 MODULACIÓN POR CORRIMIENTO MÍNIMO (MSK) Y GMSK

La modulación por corrimiento mínimo es otra técnica de conservación de ancho de banda, y posee la ventaja de producir una señal de amplitud constante y, como consecuencia, puede amplificarse sin distorsión con amplificadores clase C. Como se verá, la MSK es equivalente a la OQPSK con forma de pulso senoidal [para $h_i(t)$].

DEFINICIÓN. La *modulación por corrimiento mínimo* (MSK, del inglés *minimum-shift keying*) es una FSK de fase continua con un mínimo índice de modulación ($h = 0.5$) que producirá una señalización ortogonal.

Primero demostraremos que $h = 0.5$ es el mínimo índice permitido para una FSK ortogonal de fase continua. Para transmitir un 1 binario sobre el intervalo de bit de $0 < t < T_b$, la señal FSK será $s_1(t) = A_c \cos(\omega_1 t + \theta_1)$, y para transmitir un 0 binario, la señal FSK será $s_2(t) = \cos(\omega_2 t + \theta_2)$, donde $\theta_1 = \theta_2$ para la condición de fase continua al tiempo de conmutación $t = 0$. Para una señalización ortogonal se requiere que, de la ecuación (2-77), la integral del producto de las dos señales sobre el intervalo de bit sea igual a cero. Por lo tanto, se requiere que

$$\int_0^{T_b} s_1(t)s_2(t)\,dt = \int_0^{T_b} A_c^2 \cos(\omega_1 t + \theta_1)\cos(\omega_2 t + \theta_2)\,dt = 0 \tag{5–109a}$$

Esto se reduce al requisito de que

$$\frac{A_c^2}{2}\left[\frac{\text{sen}[(\omega_1 - \omega_2)T_b + (\theta_1 - \theta_2)] - \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)}{\omega_1 - \omega_2}\right] + \frac{A_c^2}{2}\left[\frac{\text{sen}[(\omega_1 + \omega_2)T_b + (\theta_1 + \theta_2)] - \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)}{\omega_1 + \omega_2}\right] = 0 \tag{5–109b}$$

El segundo término es despreciable porque $\omega_1 + \omega_2$ es grande,[12] tal que el requisito es que

$$\frac{\text{sen}[2\pi h + (\theta_1 - \theta_2)] - \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)}{2\pi h} = 0 \tag{5–110}$$

donde $(\omega_1 - \omega_2)T_b = 2\pi\ (2\Delta F)T_b$ y, de la ecuación (5-82), $h = 2\Delta F T_b$. Para el caso de *fase continua*, $\theta_1 = \theta_2$, y la ecuación (5-110) se satisface para un mínimo valor de $h = 0.5$, o una desviación pico de frecuencia de

$$\Delta F = \frac{1}{4T_b} = \frac{1}{4}R, \quad \text{para MSK} \tag{5–111a}$$

Para una FSK de *fase discontinua*, $\theta_1 \neq \theta_2$, y el mínimo valor para que exista ortogonalidad es $h = 1.0$ o

$$\Delta F = \frac{1}{2T_b} = \frac{1}{2}R, \quad \text{para FSK de fase discontinua} \tag{5–111b}$$

A continuación se demostrará que la señal MSK, la cual es una FSK de fase continua con $h = 0.5$, es una forma de señalización OQPSK con forma de pulsos senoidal. Primero, considere la señal FSK sobre el intervalo de señalización $(0, T_b)$. Cuando se utiliza la ecuación (5-81) la envolvente compleja es

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)} = A_c e^{j2\pi\Delta F\int_0^t m(\lambda)d\lambda}$$

donde $m(t) = \pm 1$, $0 < t < T_b$. Utilizando la ecuación (5-111) se encuentra que la envolvente compleja se convierte en

$$g(t) = A_c e^{\pm j\pi t/(2T_b)} = x(t) + jy(t), \quad 0 < t < T_b$$

donde los signos $\pm$ denotan los datos posibles durante el intervalo $(0, T_b)$. Por lo tanto,

$$x(t) = A_c \cos\left(\pm 1\ \frac{\pi t}{2T_b}\right), \quad 0 < t < T_b \tag{5–112a}$$

$$y(t) = A_c\,\text{sen}\left(\pm 1\ \frac{\pi t}{2T_b}\right), \quad 0 < t < T_b \tag{5–112b}$$

y la señal MSK es

$$s(t) = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\,\text{sen}\,\omega_c t \tag{5–112c}$$

[12] Si $\omega_1 + \omega_2$ no es lo suficientemente grande para hacer que el segundo término sea despreciable, escoja $f_c = \frac{1}{2}m/T_b = \frac{1}{2}mR$, donde m es un entero positivo. Esto hará que el segundo término sea cero ($f_1 = f_c - \Delta F$ y $f_2 = f_c + \Delta F$).

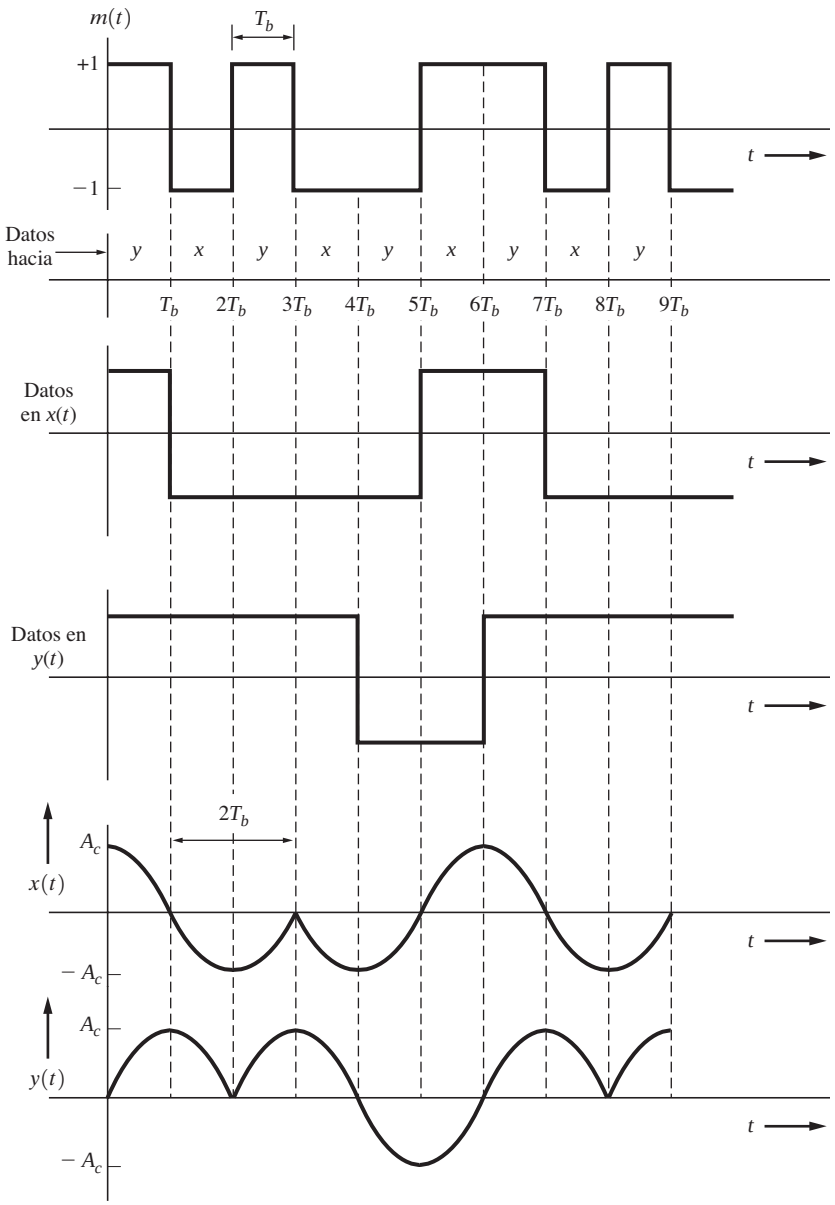


Figura 5–34 Formas de onda de componentes MSK en cuadratura (MSK tipo II).

Una forma de onda de datos de entrada típica $m(t)$ y las formas de onda de modulación en cuadratura resultante $x(t)$ y $y(t)$ se muestran en la figura 5-34. De las ecuaciones (5-112a) y (5-112b) se obtiene que $\cos[\pm\pi t/(2T_b)] = \cos[\pi t/(2T_b)]$ y $\text{sen}[\pm\pi t/(2T_b)] = \pm\text{sen}[\pi t/(2T_b)]$, y se puede observar que el signo ± 1 de $m(t)$ durante el intervalo $(0, T_b)$ sólo afecta a $y(t)$ y no a $x(t)$ sobre el intervalo de señalización de $(0, 2T_b)$. También se observa que el pulso de tipo $\text{sen}[\pi t/(2T_b)]$ de $y(t)$ es de $2T_b$ s de ancho. De la misma manera, se puede ver que el signo ± 1 de $m(t)$ sobre el intervalo

$(T_b, 2T_b)$ afecta sólo a $x(t)$ y no a $y(t)$ sobre el intervalo $(T_b, 3T_b)$. En otras palabras, los datos binarios de $m(t)$ modulan *alternadamente* a los componentes $x(t)$ y $y(t)$, y la forma de pulso para los símbolos de $x(t)$ y de $y(t)$, que son de $2T_b$ de ancho en lugar de T_b, es una senoidal, como se muestra en la figura. Por lo tanto, la MSK es equivalente a la OQPSK con forma de pulsos senoidal.

Las formas de onda $x(t)$ y $y(t)$, como se muestran en la figura 5-34, ilustran la MSK de tipo II [Bhargava, Haccoun, Matyas y Nuspl, 1981], en donde la forma de pulso básica siempre es la mitad de una cosenoidal positiva. Para la MSK del tipo I, la forma de pulso, tanto para $x(t)$ como para $y(t)$, alterna entre una mitad de cosenoidal positiva y una negativa. Para la MSK de tipo I y tipo II se puede mostrar que *no* existe una relación de uno a uno entre los datos de entrada $m(t)$ y las frecuencias de marca y espacio resultantes, f_1 y f_2, respectivamente, en la señal MSK. Esto puede demostrarse evaluando la frecuencia instantánea f_i como función de los datos presentados para $m(t)$ durante diferentes intervalos de bit. La frecuencia instantánea $f_i = f_c + (1/2\pi)[d\theta(t)/dt] = f_c \pm \Delta F$, donde $\theta(t) = \tan^{-1}[y(t)/x(t)]$. El signo $\pm$ se determina mediante la técnica de codificación (tipo I o II) que se ocupa para obtener las formas de onda de $x(t)$ y de $y(t)$ en cada intervalo de bit T_b, así como por el signo de los datos en $m(t)$. Para llegar a una relación de frecuencia de uno a uno entre la señal MSK de tipo I y la señal FSK de $h = 0.5$ correspondiente, llamada señal con *modulación por corrimiento de fase rápida* (FFSK, por sus siglas en inglés), primero se codifica diferencialmente la entrada de datos al modulador FSK de tipo I. Ejemplos de estas formas de onda para la MSK de tipos I y II y para la FFSK se pueden encontrar en las soluciones por MATLAB de los problemas 5-69, 5-70 y 5-71. Independientemente de las diferencias notadas, la FFSK, MSK de tipo I y MSK de tipo II son todas señales FSK de fase continua con amplitud constante y un índice de modulación digital de $h = 0.5$

La PSD para la MSK (de los tipos I y II) puede evaluarse como sigue: debido a que $x(t)$ y $y(t)$ poseen datos independientes y su valor de DC es cero, y debido a que $g(t) = x(t) + jy(t)$, la PSD para la envolvente compleja es

$$\mathcal{P}_g(f) = \mathcal{P}_x(f) + \mathcal{P}_y(f) = 2\mathcal{P}_x(f)$$

donde $\mathcal{P}_x(x) = \mathcal{P}_y(f)$ debido a que $x(t)$ y $y(t)$ tienen el mismo tipo de forma de pulso. Cuando se utiliza la ecuación (3-40) sobre la ecuación (3-36a) con un ancho de pulso de $2T_b$, esta PSD se convierte en

$$\mathcal{P}_g(f) = \frac{2}{2T_b} |F(f)|^2 \tag{5–113}$$

donde $F(f) = \mathcal{F}[f(t)]$ y $f(t)$ es la forma de pulso. Para la forma de pulso de la mitad de una cosenoidal de MSK, se tiene que

$$f(t) = \begin{cases} A_c \cos\left(\dfrac{\pi t}{2T_b}\right), & |t| < T_b \\ 0, & t \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{5–114a}$$

y la transformada de Fourier es

$$F(f) = \frac{4A_cT_b \cos 2\pi T_b f}{\pi[1 - (4T_b f)^2]} \tag{5–114b}$$

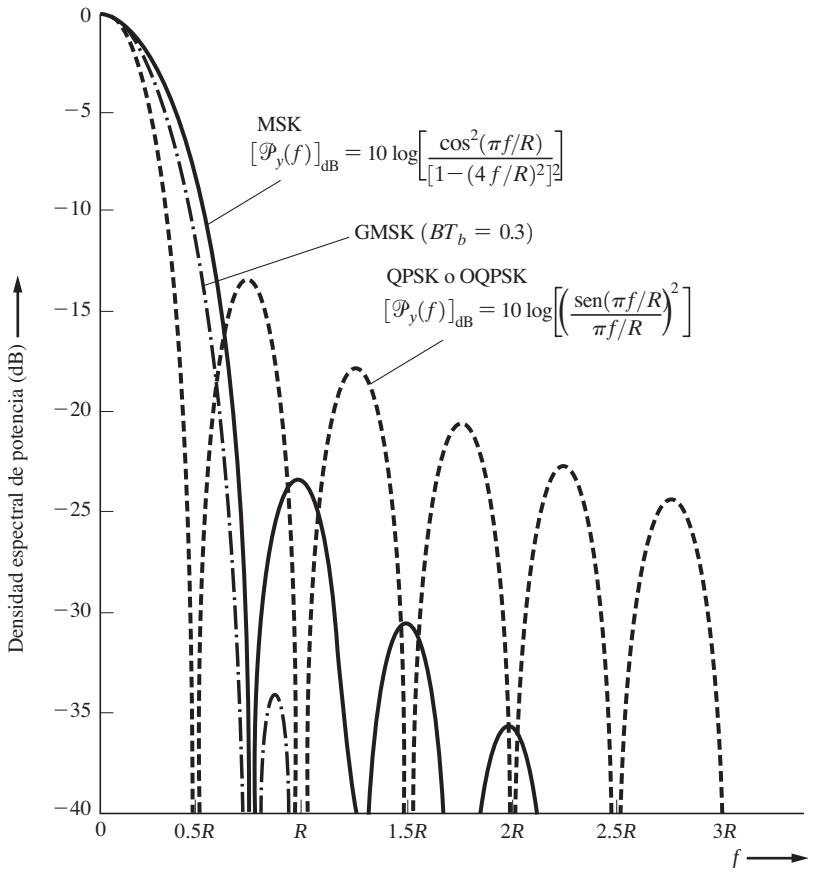


Figura 5–35 PSD para la envolvente compleja de MSK, GMSK, QPSK y OQPSK, donde R es la velocidad de bit (sólo se muestran las frecuencias positivas).

Por lo tanto, la PSD para la envolvente compleja de una señal MSK es

$$\mathcal{P}_g(f) = \frac{16A_c^2T_b}{\pi^2}\left(\frac{\cos^2 2\pi T_b f}{[1 - (4T_b f)^2]^2}\right) \tag{5–115}$$

donde la potencia normalizada en la señal MSK es de $A_c^2/2$. La PSD para la MSK se obtiene fácilmente trasladando el espectro hacia la frecuencia de la portadora, como se describe en la ecuación (5-2b). Esta PSD de la envolvente compleja para la MSK se muestra con la curva en sólido de la figura 5-35.

Otra forma de MSK es la *MSK con filtro gaussiano* (GMSK, por sus siglas en inglés). Para una GMSK, los datos (pulsos en forma rectangular) se pasan a través de un filtro con una característica de respuesta en frecuencia en forma gaussiana antes de que se modulen en frecuencia dentro de la portadora. La función de transferencia del filtro pasabajas gaussiano es

$$H(f) = e^{-[(f/B)^2(\ln 2/2)]} \tag{5–116}$$

donde B es el ancho de banda a 3 dB del filtro. Este filtro reduce los lóbulos laterales espectrales en la señal MSK transmitida. La PSD para la GMSK es difícil de evaluar analíticamente, pero se puede

obtener a través de una simulación por computadora [Muroto, 1981]. El resultado se muestra en la figura 5-35 para el caso donde el ancho de banda a 3 dB es 0.3 de la velocidad de bit (es decir, $BT_b = 0.3$). Para valores pequeños de BT_b, los lóbulos laterales espectrales se reducen aún más, pero la ISI aumenta. $BT_b = 0.3$ resulta en un buen compromiso para lóbulos laterales relativamente bajos y una ISI tolerable que está por debajo del ruido mínimo para aplicaciones de telefonía celular. Para $BT_b = 0.3$, la GMSK tiene lóbulos laterales espectrales más bajos que aquéllos en MSK, QPSK o OQPSK, con pulsos de datos rectangulares. Además, GMSK posee una envolvente constante, ya que es de la forma de FM. Como consecuencia, la GMSK puede amplificarse sin distorsión mediante amplificadores clase C de alta eficiencia. La GMSK y MSK también pueden detectarse coherente o no coherentemente (consulte la sección 7-5). Como se discutirá en el capítulo 8, GMSK con $BT_b = 0.3$ es el formato de modulación utilizado en sistemas de telefonía celular GSM.

Otras técnicas de modulación digital, como la *modulación en frecuencia moderada* (TFM, por sus siglas en inglés), poseen características espectrales aún mejores que las de MSK [De□ager y Dekker, 1978□Pettit, 1982□Taub y Schillin, 1986], y se ha encontrado la forma de pulso óptima para la mínima ocupación espectral de las señales de tipo FSK [Campanella, LoFaso y Mamola, 1984].

Las señales MSK pueden generarse mediante varios métodos, como se aprecia en la figura 5-36. La figura 5-36a muestra la generación de FFSK, la cual es equivalente a una MSK de tipo I con codificación diferencial para los datos de entrada. En este caso se utiliza un modulador de tipo FM simple que posee una desviación pico de $\Delta F = 1/(4T_b) = (1/4)R$. La figura 5-36b ilustra un modulador de MSK de tipo I, que es una manifestación de la ecuación (5-112). A esto se le llama método *paralelo* para la generación de MSK, ya que se emplean canales paralelos en fase (I) y de fase en cuadratura (Q). En la figura 5-36c se observa el método *serial* para la generación de MSK. En este enfoque, primero se genera una BPSK a una frecuencia de la portadora de $f_2 = f_c - \Delta F$, y la banda de paso se filtra alrededor de $f_1 = f_c + \Delta F$ para producir una señal MSK con una frecuencia de la portadora de f_c (consulte el problema 5-72 para demostrar que esta técnica es correcta). Más propiedades de la MSK se presentan en Leib y Pasupathy [1993].

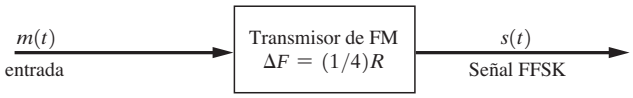
Las secciones 5-9, 5-10 y 5-11 sobre técnicas de señalización digital pasabanda se resumen en la tabla 5-9. Las eficiencias espectrales de varios tipos de señales digitales se muestran para el caso donde se emplean pulsos de datos de forma rectangular y para dos diferentes criterios de ancho de banda: nulo a nulo y a 30 dB. Un valor más grande de η indica una mejor eficiencia espectral. Por supuesto que, como se ve en la tabla 5-8, el filtrado por medio de un filtro de coseno realzado de los pulsos rectangulares puede usarse para reducir el ancho de banda e incrementar η. Como alternativa puede ocuparse un filtrado gaussiano, pero esto introduce alguna ISI.

Cuando se diseña un sistema de comunicaciones, tanto el costo como el rendimiento en base al número de errores deben considerarse de suma importancia, así como la ocupación espectral de la señal. El tema acerca del rendimiento basado en el número de errores que se comenten se aborda en el capítulo 7.

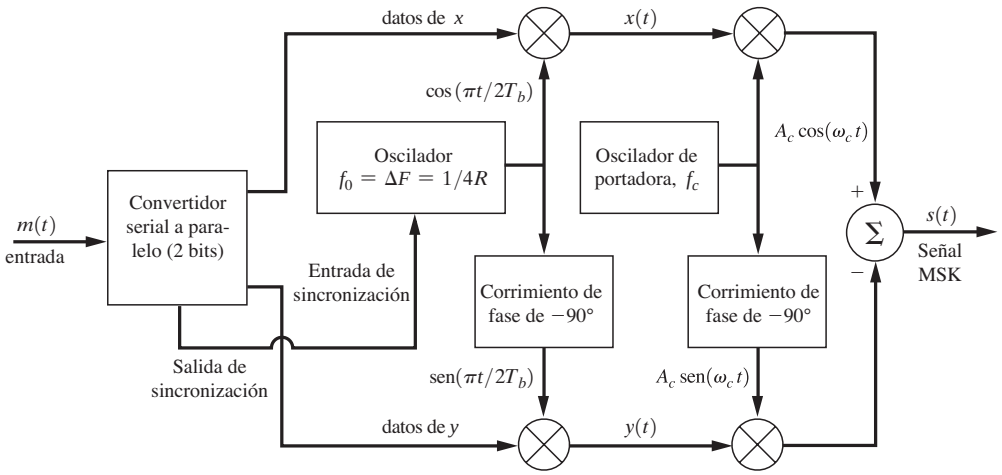
5–12 MULTIPLEXIÓN POR DIVISIÓN DE FRECUENCIAS ORTOGONALES (OFDM)

La *multiplexión por división de frecuencias ortogonales* (OFDM, por sus siglas en inglés) es una técnica para la transmisión de datos en paralelo utilizando un gran número de portadoras moduladas con suficiente espacio entre sus frecuencias de tal forma que sus portadoras sean ortogonales. Como se verá, la OFDM proporciona resistencia a los errores en datos causados por canales con múltiples trayectorias.

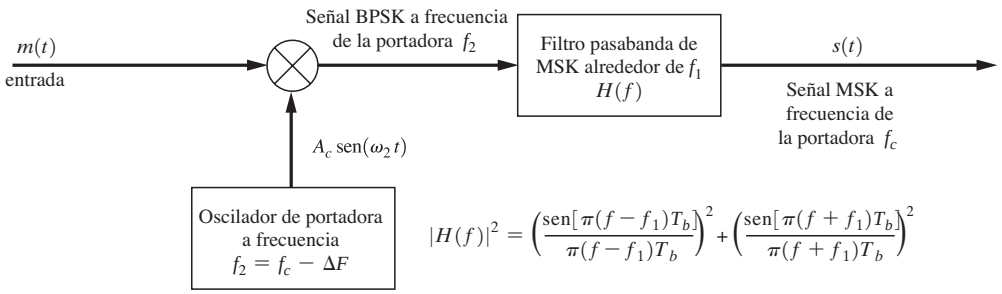
Sobre un intervalo de T segundos, la envolvente compleja para la señal OFDM es



(a) Generación de modulación por corrimiento de fase rápida (FFSK)



(b) Generación en paralelo de MSK tipo I (esto generará una FFSK si se inserta un codificador diferencial a la entrada.)



(c) Generación serial de MSK

Figura 5–36 Generación de señales MSK.

$$g(t) = A_c \sum_{n=0}^{N-1} w_n \varphi_n(t), \quad 0 > t > T \tag{5–117a}$$

donde A_c es la amplitud de la portadora, w_n el elemento del vector de datos en paralelo de N elementos $\mathbf{w} = [w_0, w_1, \ldots, w_{N-1}]$,, y las portadoras ortogonales son

$$\varphi_n(t) = e^{j2\pi f_n t} \quad \text{donde} \quad f_n = \frac{1}{T}\left(n - \frac{N-1}{2}\right) \tag{5–117b}$$

TABLA 5–9 EFICIENCIA ESPECTRAL DE SEÑALES DIGITALES

	Eficiencia espectral, $\eta = \frac{R}{B_T}\left(\frac{\text{bits/s}}{\text{Hz}}\right)$	
Tipo de señal	**Ancho de banda de nulo a nulo**	**Ancho de banda a 30 dB**
OOK y BPSK	0.500	0.052
QPSK, OQPSK, y $\pi/4$ QPSK	1.00	0.104
MSK	0.667	0.438
16 QAM	2.00	0.208
64 QAM	3.00	0.313

La duración del símbolo de datos en cada portadora es de T segundos y las portadoras se separan cada $1/T$ Hz. Esto asegura que las portadoras sean ortogonales, ya que $\varphi_n(t)$ satisface la condición de ortogonalidad de la ecuación (2-77) sobre el intervalo de T segundos, como se muestra en el ejemplo 2-11. Debido a que las portadoras son ortogonales, los datos se pueden detectar en cada una de estas portadoras separadas a poca distancia sin interferencia de otras portadoras.

Una ventaja clave de OFDM es que se puede generar con técnicas de procesamiento digital de señales usando FFT. Por ejemplo, si se suprime el corrimiento en frecuencia $(N - 1)/2T$ de la ecuación (5-117b) y se sustituye la ecuación (5-117b) dentro de la ecuación (5-117a), donde $t = kT/N$, se obtienen los elementos del vector de la IFFT, como se definen en la ecuación (2-117). Por lo tanto, la señal OFDM puede generarse con un algoritmo para la IFFT, como se muestra en la figura 5-37. En esa figura, la envolvente compleja, $g(t)$, es descrita por los componentes $x(t)$ y $y(t)$ de I y Q, donde $g(t) = x(t)$ y $jy(t)$(esta es una aplicación del transmisor generalizado de la figura 4-28b).

Considerando la figura 5-37, asumiendo que los símbolos de datos seriales de entrada tengan una duración de T_s cada uno. Estos datos pueden ser binarios (± 1) para producir portadoras moduladas por BPSK, o seriales multinivel con valores complejos para producir adecuadamente portadoras de QPSK, MPSK o QAM. $D_s = 1/T_s$ es la velocidad de símbolo de entrada (velocidad en bauds). El convertidor serial a paralelo lee N símbolos seriales de entrada a la vez y almacena los valores (elementos de **w**) en las líneas paralelas de salida durante $T = NT_s$ segundos, donde T es el rango de tiempo de la IFFT. La IFFT utiliza a **w** para evaluar el vector IFFT de salida **g**, el cual contiene elementos que representan a las muestras de la envolvente compleja. El convertidor paralelo a serial desplaza los valores de los elementos de **g**, que son las muestras de la envolvente compleja para la señal OFDM que se describe en la ecuación (5-117), donde $x(t)$ y $y(t)$ son los componentes I y Q de la envolvente compleja. La señal OFDM se produce a través de los moduladores de IQ, como se muestra en la figura.

Los datos seriales se recuperan en el receptor a partir de la señal OFDM recibida mediante: (1) la demodulación de la señal para producir datos seriales de I y Q□(2) la conversión de datos seriales a paralelos□(3) la evaluación de la FFT, y (4) la conversión del vector de la FFT (datos en paralelo) a datos seriales de salida.

La longitud del vector de la FFT determina la resistencia de la OFDM a los errores causados por canales con múltiples trayectorias. Se escoge N tal que $T = NT_s$ sea mucho más grande que el máximo tiempo de retraso de los componentes de eco en la señal recibida con múltiples trayectorias.

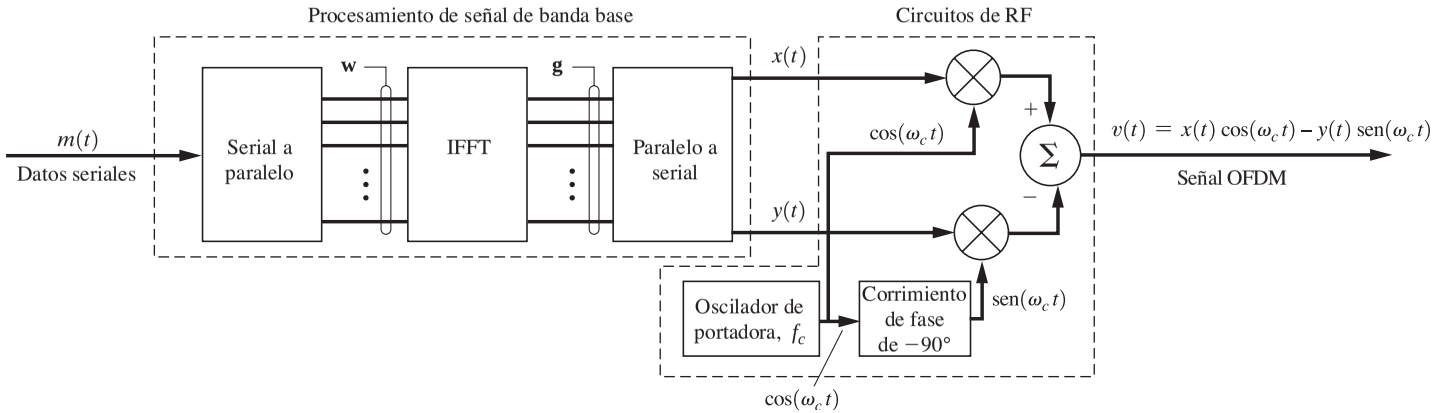


Figura 5–37 Transmisor de OFDM.

La PSD de la señal OFDM puede obtenerse de manera relativamente fácil, ya que la señal OFDM de la ecuación (5-117) consiste en portadoras ortogonales que se modulan mediante datos con formas de pulso rectangulares que tienen una duración de T segundos. En consecuencia, la PSD de cada portadora es de la forma $|\text{Sa}[\pi(f - f_n)T]|^2$ y la PSD general para la envolvente compleja de la señal OFDM es

$$\mathcal{P}_g(f) = C \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{\text{sen}[\pi(f - f_n)T}{\pi(f - f_n)T} \right|^2 \tag{5–118}$$

donde $C = A_c^2 \ \overline{|w_n|^2}T$ y $\overline{w_n} = 0$. El espectro se muestra en la figura 5-38 para el caso de $N = 32$. Debido a que el espacio entre portadoras es de $1/T$ Hz y existen N portadoras, el ancho de banda nulo de la señal OFDM es

$$B_T = \frac{N + 1}{T} = \frac{N + 1}{NT_s} \approx \frac{1}{T_s} = D_s \text{ Hz} \tag{5–119}$$

donde la aproximación es razonable para $N > 10$ y D_s es la velocidad de símbolo (velocidad en bauds) de los datos seriales de entrada para el transmisor de OFDM. Se pueden utilizar formas de pulso redondas (no rectangulares) en los sistemas OFDM más avanzados para así reducir los lóbulos laterales de la PSD fuera de la banda $B_T = D_s$.

En una generalización de OFDM llamada señalización *multitono discreta* (DMT, por sus siglas en inglés) se puede variar la velocidad de datos en cada portadora, dependiendo de la SNR recibida

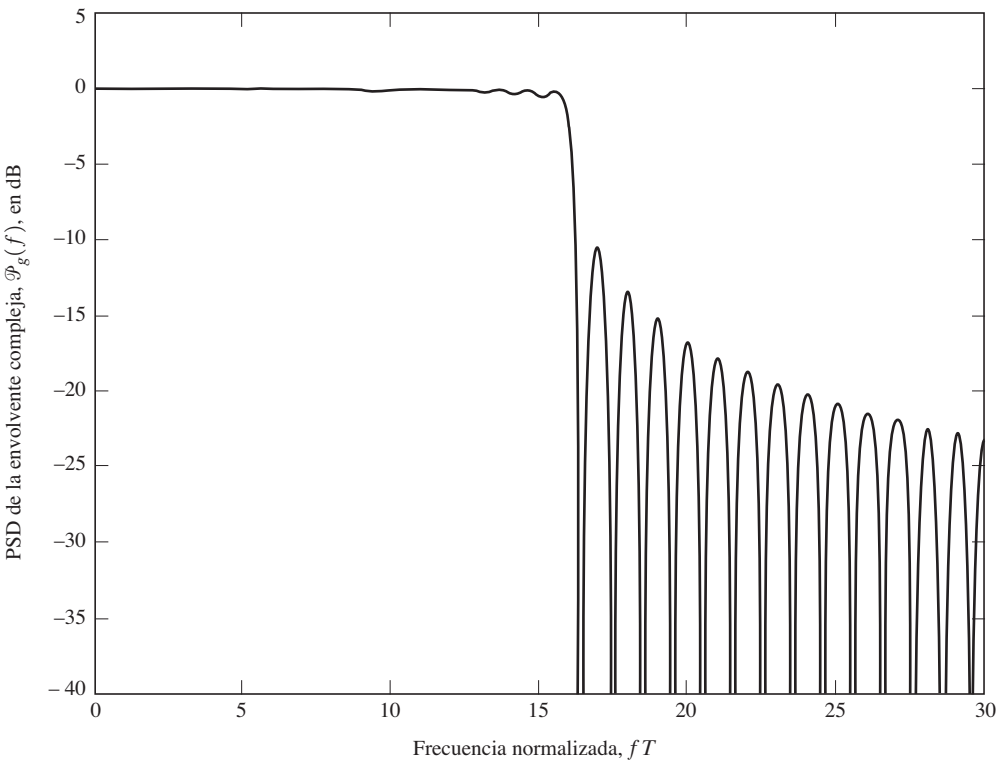


Figura 5–38 PSD para la envolvente compleja de OFDM con $N = 32$.

en cada una. Es decir, se reduce la velocidad de datos (o se apaga la portadora) en las frecuencias de portadora que tienen una baja SNR. Las velocidades de datos se pueden adaptar conforme las condiciones de desvanecimiento varían, lo que resulta en una transmisión casi libre de errores a través de canales en desvanecimiento con múltiples trayectorias.

La OFDM se utiliza en los sistemas de difusión digital europeos (radio y televisión), en algunos módems por líneas telefónicas ASDL y en redes inalámbricas de Wi-Fi y Wi-Ax (consulte el capítulo 8).

5–13 SISTEMAS DE ESPECTRO ENSANCHADO

Este texto se ha enfocado hasta ahora principalmente en el rendimiento de los sistemas de comunicaciones en términos de la eficiencia del ancho de banda y la eficiencia de energía (es decir, la SNR detectada o una probabilidad de error en bit) con respecto al ruido natural. Sin embargo, en algunas aplicaciones se debe también considerar la capacidad de acceso múltiple, capacidad antibloqueo, rechazo de interferencia y operación secreta, o una capacidad de baja probabilidad de intercepción (LPI, por sus siglas en inglés). (Las últimas consideraciones son especialmente importantes en las aplicaciones militares.) Estos objetivos de rendimiento pueden optimizarse mediante técnicas de espectro ensanchado.

La capacidad de acceso múltiple se requiere en aplicaciones de telefonía celular y de comunicación personal, donde muchos usuarios comparten una banda de frecuencias porque no existe suficiente ancho de banda para asignar un canal de frecuencia permanente a cada usuario. Las técnicas de espectro ensanchado pueden proporcionar el uso simultáneo de una banda ancha de frecuencias vía técnicas de *acceso múltiple por división de código* (CDMA, por sus siglas en inglés), como alternativa a la compartición de la banda. Otros dos enfoques, el acceso múltiple por división de tiempo (TDMA) y el acceso múltiple por división de frecuencia (FDMA), se estudian en las secciones 3-9, 5-7 y 8-5.

Existen muchos tipos de sistemas de *espectro ensanchado* (SS, por sus siglas en inglés). Para que un sistema se considere como SS, debe satisfacer dos criterios:

1. El ancho de banda de la señal transmitida $s(t)$ debe ser mucho mayor que el del mensaje $m(t)$.
2. El ancho de banda relativamente ancho de $s(t)$ debe ser causa de una forma de onda moduladora independiente $c(t)$ llamada *señal ensanchadora*, y el receptor debe conocer esta señal para detectar la señal de mensaje $m(t)$.

La señal SS es

$$s(t) = \text{Re}\{g(t)\ e^{j\omega_c t}\} \tag{5–120a}$$

donde la envolvente compleja es una función tanto de $m(t)$ como de $c(t)$. En la mayoría de los casos se utiliza una función de producto, de tal forma que

$$g(t) = g_m(t)g_c(t) \tag{5–120b}$$

donde $g_m(t)$ y $g_c(t)$ son funciones de la envolvente compleja con los tipos comunes de modulación que generan AM, PM, FM y así sucesivamente, como se muestra en la tabla 4-1. Las señales SS se clasifican por el tipo de funciones de mapeo que se emplean para $g_c(t)$.

Los siguientes son algunos de los tipos más comunes de señales SS:

- *Secuencia directa* (DS, por sus siglas en inglés). En este caso se utiliza el tipo DSB-SC de modulación ensanchadora [es decir, $g_c(t) = c(t)$] y $c(t)$ es una forma de onda polar NRZ.

- *Salto de frecuencia* (FH, por sus siglas en inglés). Aquí, $g_c(t)$ es del tipo FM, donde existen $M = 2^k$ frecuencias de salto que se determinan por las palabras de k bits que se obtienen de la forma de onda de código ensanchador $c(t)$.
- Técnicas *híbridas* que incluyen tanto DS como FH.

En las secciones restantes de este capítulo se ilustra cómo funcionan exactamente los sistemas DS y FH.

Secuencia directa

Suponga que la forma de onda de información $m(t)$ proviene de una fuente digital y es una forma de onda polar con valores de ± 1. Más aún, se debe examinar el caso de la modulación BPSK donde $g_m(t) = A_c m(t)$. Por lo tanto, para DS, donde $g_c(t) = c(t)$ se usa en la ecuación (5-120b), la envolvente compleja para la señal SS se convierte en

$$g(t) = A_c m(t) c(t) \tag{5–121}$$

El resultado de $s(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\}$ se llama *señal de espectro ensanchado por secuencia directa con datos con modulación por corrimiento de fase binaria* (BPSK-DS-SS, por sus siglas en inglés), y $c(t)$ es una señal polar ensanchadora. Aún más, asumiendo que esta forma de onda ensanchadora se produzca mediante un generador de código de *seudoruido* (PN, por sus siglas en inglés), como se muestra en la figura 5-39b, donde los valores de $c(t)$ son de ± 1. El ancho de pulso de $c(t)$ se denota con T_c y se llama intervalo de *chip*, en contraste a un intervalo de bit. El generador de código utiliza un sumador de módulo 2 y r etapas de un registro de corrimiento que se sincronizan cada T_c segundos. Puede mostrarse que $c(t)$ es periódica. Además, muestras de retroalimentación de las etapas de los registros de corrimiento y sumadores de módulo 2 se arreglan de tal manera que la forma de onda $c(t)$ tienen un máximo periodo de N chips, donde $N = 2^r - 1$. Se dice que este tipo de generador de código PN produce una forma de onda de *secuencia con máxima longitud* o *secuencia m*.

Propiedades de las secuencias con máxima longitud. Las siguientes son algunas de las propiedades de las secuencias m [Peterson, Ziemer y Borth, 1995]:

Propiedad 1. En un periodo, el número de 1 siempre es uno más que el número de 0.

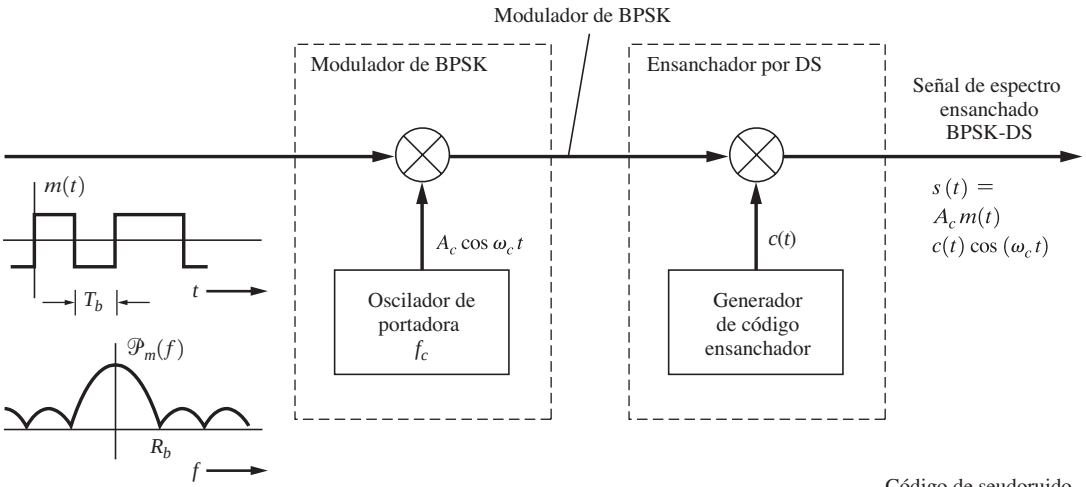
Propiedad 2. La suma de módulo 2 de cualquier secuencia m, cuando se suma chip por chip con una versión desplazada de la misma frecuencia, produce otra versión desplazada de la misma frecuencia.

Propiedad 3. Si una ventana de ancho r, donde r es el número de etapas en el registro de corrimiento, se recorre a lo largo de la secuencia durante N corrimientos, todas las posibles palabras de r bits aparecerán exactamente una sola vez, a excepción de las palabras con todos los r bits iguales a cero.

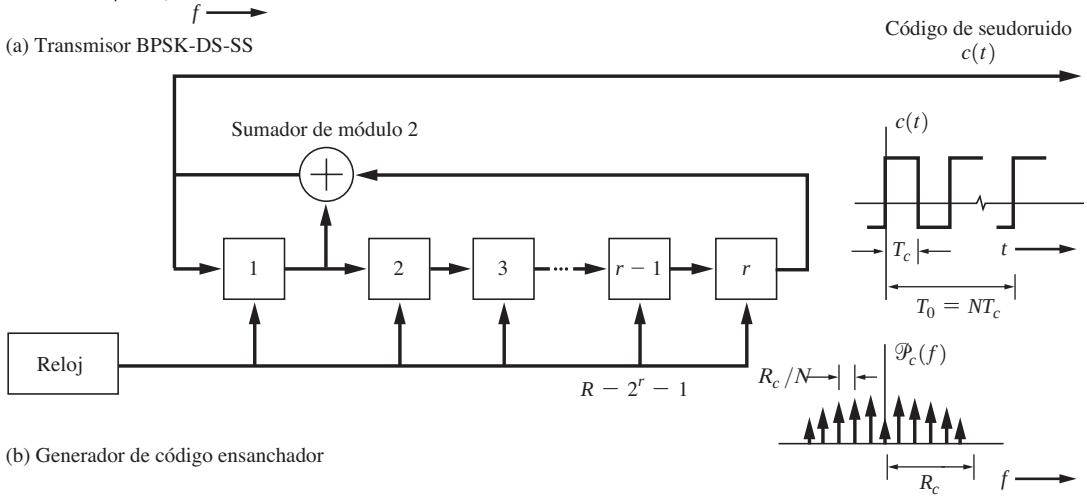
Propiedad 4. Si los 0 y 1 se representan mediante -1 y $+1$ V, la autocorrelación de la secuencia es

$$R_c(k) = \begin{cases} 1, & k = \ell N \\ -\dfrac{1}{N}, & k \neq \ell N \end{cases} \tag{5–122}$$

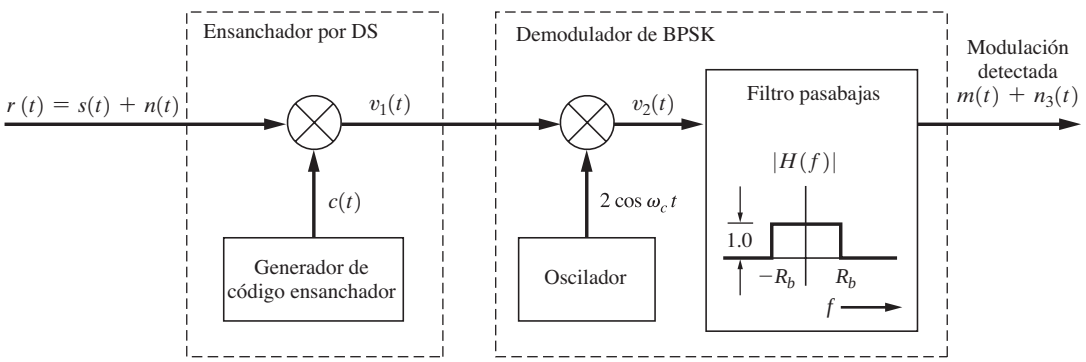
donde $R_c(k) \triangleq (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} c_n c_{n+k}$ y $c_n = \pm 1$.



(a) Transmisor BPSK-DS-SS



(b) Generador de código ensanchador



(c) Receptor BPSK-DS-SS.

Figura 5-39 Sistema de espectro ensanchado por secuencia directa (DS-SS).

La autocorrelación de la *forma de onda* $c(t)$ es

$$R_c(\tau) = \left(1 - \frac{\tau_\varepsilon}{T_c}\right) R_c(k) + \frac{\tau_\varepsilon}{T_c} R_c(k+1) \tag{5–123}$$

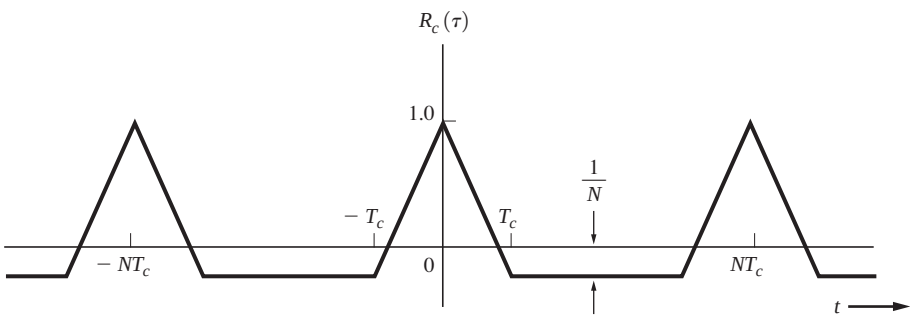
donde $R_c(\tau) = \langle c(t)\, c(t+\tau) \rangle$ y τ_ε se define como

$$\tau = kT_c + \tau_\varepsilon, \qquad \text{con} \qquad 0 \leq \tau_\varepsilon < T_c \tag{5–124}$$

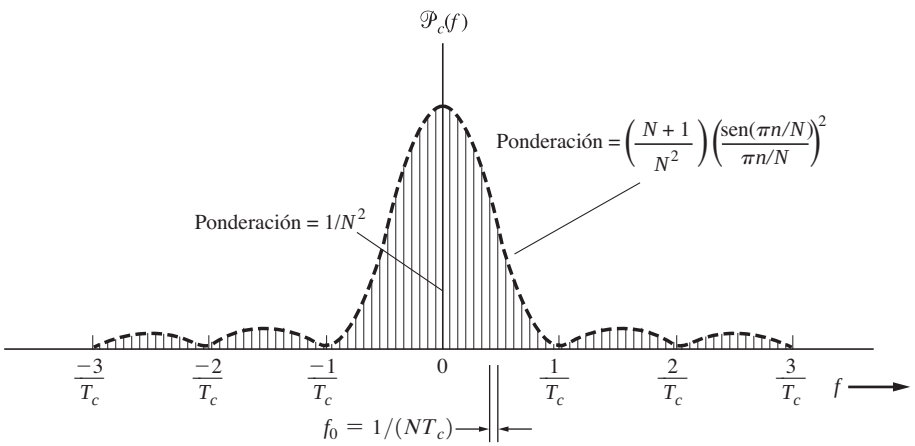
La ecuación (5-123) se reduce a

$$R_c(\tau) = \left[\sum_{\ell=-\infty}^{\ell=\infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right) \Lambda \left(\frac{\tau - \ell N T_c}{T_c} \right) \right] - \frac{1}{N} \tag{5–125}$$

Esta ecuación se grafica en la figura 5-40a, donde es obvio que la función de autocorrelación para la forma de onda de PN es periódica con pulsos rectangulares de un ancho de $2T_c$ repetidos cada NT_c segundos y que un nivel de correlación de $1/N$ ocurre entre estos pulsos triangulares. Aún más, debido a que la función de autocorrelación es periódica, la PSD asociada es un espectro de línea. Es decir, la autocorrelación se expresa como la serie de Fourier



(a) Función de autocorrelación



(b) Densidad espectral de potencia (PSD)

Figura 5–40 Autocorrelación y PSD para una forma de onda de PN de secuencia *m*.

$$R_c(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n e^{j2\pi n f_0 t} \tag{5–126}$$

donde $f_0 = 1/(NT_c)$ y $\{r_n\}$ es el conjunto de coeficientes de la serie de Fourier. Por lo tanto, utilizando la ecuación (2-109) resulta que

$$\mathcal{P}_c(f) = \mathcal{F}[R_c(\tau)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n \delta(f - nf_0) \tag{5–127}$$

donde los coeficientes de la serie de Fourier se evalúan y se encuentra que son

$$r_n = \begin{cases} \dfrac{1}{N^2}, & n = 0 \\ \left(\dfrac{N+1}{N^2}\right)\left(\dfrac{\text{sen}(\pi n/N)}{\pi n/N}\right)^2, & n \neq 0 \end{cases} \tag{5–128}$$

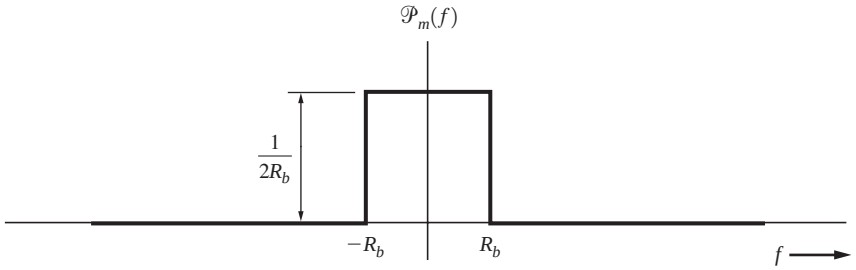
La PSD se grafica en la figura 5-40b.

A continuación se demostrará que el ancho de banda de la señal SS es relativamente grande comparado con la velocidad de datos R_b, y se determina principalmente mediante la forma de onda ensanchadora $c(t)$ y no por la modulación de datos $m(t)$. Considerando la figura 5-39 se observa que las PSD tanto de $m(t)$ como de $c(t)$ son del tipo $[(\text{sen } x)/x]^2$, donde el ancho de banda de $c(t)$ es mucho mayor que el de $m(t)$, pues se asume que la velocidad de chip $R_c = 1/T_c$ es mucho mayor que la velocidad de datos $R_b = 1/T_b$. Es decir, $R_c \gg R_b$. Para simplificar los cálculos matemáticos, aproxime estas PSD a través de espectros rectangulares, como se muestra en las figuras 5-41a y 5-41b, donde las alturas de las PSD se seleccionan de tal forma que las áreas debajo de las curvas sean igual a la unidad, ya que las potencias de $m(t)$ y $c(t)$ son de la unidad (ambas tienen sólo valores de ± 1). De la ecuación (5-121) se sabe que $g(t)$ se obtiene al multiplicar $m(t)$ y $c(t)$ en el dominio del tiempo y que $m(t)$ y $c(t)$ son independientes. Por lo tanto, a la PSD para la envolvente compleja de la señal BPSK-DS-SS se llega a través de una operación de convolución en el dominio de frecuencia:

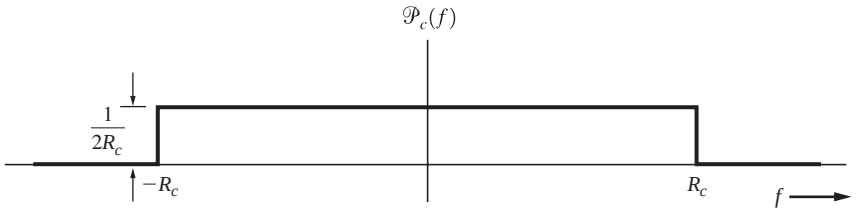
$$\mathcal{P}_g(f) = A_c^2 \, \mathcal{P}_m(f) * \mathcal{P}_c(f) \tag{5–129}$$

Este resultado se muestra en la figura 5-41c para la aproximación de las PSD de $m(t)$ y $c(t)$. El ancho de banda de la señal BPSK-DS-SS se determina esencialmente por la velocidad de chip R_c, ya que $R_c \gg R_b$. Por ejemplo, sea $R_b = 9.6$ kbits/s y $R_c = 9.6$ Mchips/s. Entonces el ancho de banda de la señal SS es $B_T \approx 2R_c = 19.2$ MHz.

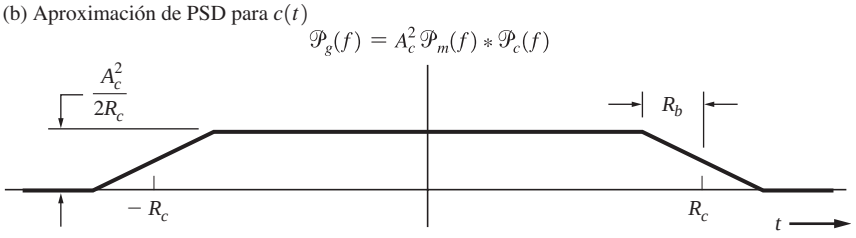
A partir de la figura 5-41 también se puede demostrar que el ensanchado ha hecho a la señal menos susceptible a la detección por una persona que escucha indiscretamente. Es decir, la señal posee LPI. Sin el ensanchado [es decir, si $c(t)$ fuera igual a la unidad], el nivel de la PSD en banda sería proporcional a $A_c^2/(2R_b)$, como se observa en la figura 5-41a, pero con ensanchado, el nivel espectral en banda se reduce a $A_c^2/(2R_c)$, como se aprecia en la figura 5-41c, que es una reducción de R_c/R_b. Por ejemplo, para los valores de R_b y R_c establecidos previamente, el factor de reducción sería de (9.6 Mchips/s)/(9.6 kbits/s) = 1,000, o 30 dB. Con frecuencia, el espía detecta la presencia de una señal empleando un analizador espectral, pero cuando se ocupa la SS, el nivel cae por 30 dB. Esto es a menudo por debajo del mínimo de ruido del posible espía y, por tanto, la señal SS escapará a la detección por el mismo.



(a) Aproximación de PSD para $m(t)$



(b) Aproximación de PSD para $c(t)$



(c) Aproximación de PSD para la envolvente compleja de la señal SS

Figura 5–41 Aproximación de PSD de la señal BPSK-DS-SS.

La figura 5-39c muestra a un receptor que recupera la modulación en la señal SS y que cuenta con un circuito desensanchador que se controla mediante un generador de código PN en sincronía con el código de ensanchado en el transmisor. Suponga que la entrada al receptor consiste en la señal SS y en una señal de bloqueo (onda seno) de banda estrecha. Entonces

$$r(t) = s(t) + n(t) = A_c m(t)\, c(t) \cos \omega_c t + n_j(t), \tag{5–130}$$

donde la señal de bloqueo es

$$n_J(t) = A_J \cos \omega_c t \tag{5–131}$$

En este caso se asume que la potencia de bloqueo es $A_J^2/2$ relativa a la potencia de la señal de $A_c^2/2$ y que la frecuencia de bloqueo se establece a f_c para el peor caso del efecto de bloqueo. Remitiéndose a la figura 5-39c se encuentra que la salida del desensanchador es

$$v_1(t) = A_c m(t) \cos \omega_c t + A_J c(t) \cos \omega_c t \tag{5–132}$$

ya que $c^2(t) = (\pm 1)^2 = 1$. La señal BPSK-DS-SS se ha vuelto simplemente una señal BPSK a la salida del desensanchador. Esto es: a la entrada del receptor la señal SS tiene un ancho de banda de

$2R_c$, pero a la salida del desensanchador el ancho de banda de la señal BPSK resultante es $2R_b$, una reducción de 1,000:1 para las cifras previamente utilizadas. Los datos en la señal BPSK desensanchada se recuperan mediante un circuito detector de BPSK, como se muestra.

A continuación se demuestra que el receptor SS otorga una capacidad antibloqueo de 30 dB para el caso donde $R_b = 9.6$ kbits/s y $R_c = 9.6$ Mchips/s. En la ecuación (5-132) se observa que la señal de bloqueo de banda estrecha que estuvo presente a la entrada del receptor se ha *ensanchado* por el desensanchador debido a que se ha multiplicado por $c(t)$. Este efecto desensanchador sobre la señal de bloqueo produce la capacidad antibloqueo. Usando la ecuación (5-132) y considerando la figura 5-39c se obtiene una entrada al LPF de

$$v_2(t) = A_c m(t) + n_2(t) \tag{5–133}$$

donde

$$n_2(t) = A_J c(t) \tag{5–134}$$

y los nuevos términos alrededor de $f = 2f_c$ se han despreciado debido a que no pasan a través del LPF. Al observar la figura 5-39c se nota que la potencia del bloqueador a la salida del receptor es

$$P_{n_3} = \int_{-R_b}^{R_b} \mathcal{P}_{n_2}(f)\ df = \int_{-R_b}^{R_b} A_J^2\ \frac{1}{2R_c}\ df = \frac{A_J^2}{R_c/R_b} \tag{5–135}$$

y la potencia del bloqueador a la entrada del LPF es A_J^2. [$\mathcal{P}_{n_2}(f) = A_J^2/(2R_c)$, como se muestra en la figura 5-41b y la ecuación (5-134)]. Para un sistema BPSK convencional (es decir, uno sin espectro ensanchado), $c(t)$ será igual a la unidad y la ecuación (5-134) se convertirá en $n_2(t) = A_J$, de tal forma que la potencia de bloqueo a la salida del LPF será de A_J^2 en lugar de $A_J^2\ /(R_c/R_b)$ para el caso de un sistema SS. [La señal de salida debe ser $A_c m(t)$ para ambos casos.] Por lo tanto, el receptor de SS ha reducido el efecto del bloqueo de banda estrecha por un factor de R_c/R_b. Este factor se conoce como *ganancia de procesamiento* del receptor de SS.[13] Para el ejemplo de $R_c = 9.6$ Mchips/s y $R_b = 9.6$ kbits/s la ganancia de procesamiento es de 30 dB, lo cual significa que el bloqueador de banda estrecha deberá tener 30 dB más de potencia para causar el mismo efecto de bloqueo en este sistema SS, comparado con el BPSK convencional (sin SS). Así, esta técnica de SS suministra 30 dB de capacidad antibloqueo para la razón R_c/R_b dada en el ejemplo.

Las técnicas de SS también pueden ocuparse para suministrar acceso múltiple, llamado *acceso múltiple por división de código* (CDMA, por sus siglas en inglés). En este caso a cada usuario se le asigna un código de ensanchado de tal forma que las señales sean ortogonales. La técnica se usa en los sistemas de telefonía celular con CDMA. Por lo tanto, se pueden transmitir simultáneamente múltiples señales SS en la misma banda de frecuencias y aún así decodificar los datos en una señal SS en particular por un receptor, *siempre y cuando* dicho receptor utilice un código PN que es idéntico a, y sincronizado con, la señal SS en particular que será decodificada. Los enlaces de CDMA se diseñan para operar ya sea en el modo síncrono o en el asíncrono. Para el *modo síncrono* se alinean los tiempos de transición de símbolo para todos los usuarios y se ocupa a menudo para el enlace hacia adelante desde una estación base (BS, por sus siglas en inglés) a una estación móvil (MS, por sus siglas en inglés). Para el *modo asíncrono* no se realiza ningún esfuerzo para alinear las secuencias y se utiliza para el enlace en reversa desde la MS a la BS. Este modo presenta mayor interferencia de acceso múltiple pero menores restricciones de diseño.

[13] La ganancia de procesamiento se define como la relación de salida de potencia de ruido sin SS dividida por la salida de potencia de ruido con SS. Esto es equivalente a la relación $(S/N)_{\text{salida}}/(S/N)_{\text{entrada}}$ cuando $(S/N)_{\text{entrada}}$ es la potencia de señal a ruido al receptor y $(S/N)_{\text{salida}}$ es la potencia de señal a ruido a la salida del LPF.

Para soportar más usuarios en las bandas de frecuencia que ahora están saturadas con usuarios de banda estrecha convencionales, como las bandas de radio bidireccional, es posible asignar nuevas estaciones de SS. A esto se le llama *superposición de espectro ensanchado*. Las estaciones de SS operarían con un ancho de banda tan amplio que su PSD parecería despreciable a los receptores de banda estrecha localizados lo suficientemente distantes de los transmisores de SS. Por otra parte, las señales de banda estrecha tendrían un efecto mínimo de bloqueo sobre el receptor de SS debido a la gran ganancia de codificación de éste.

Salto de frecuencias

Como se indicó anteriormente, una señal SS con salto en frecuencias (FH) utiliza una $g_c(t)$ que es del tipo FM, donde existen $M = 2^k$ frecuencias de salto controladas por el código de ensanchado, en el cual se toman k palabras de chip para determinar cada frecuencia de salto. Un transmisor de FH-SS se muestra en la figura 5-42a. La información fuente se modula hacia una portadora utilizando técnicas de FSK o BPSK convencionales para producir una señal FSK o BPSK. El salto de frecuencia se logra mediante un circuito mezclador donde la señal LO se suministra por la salida de un sintetizador de frecuencia que salta debido al código de ensanchado de PN. El convertidor serial a paralelo lee k chips seriales del código de ensanchado y envía como salida una palabra en paralelo de k chips a los divisores programables en el sintetizador de frecuencias (consulte la figura 4-25 y la discusión acerca de sintetizadores de frecuencia relacionada). La palabra de k chips especifica una de las $M = 2^k$ frecuencias de salto posibles, ω_1 , ω_2 , . . . , ω_M.

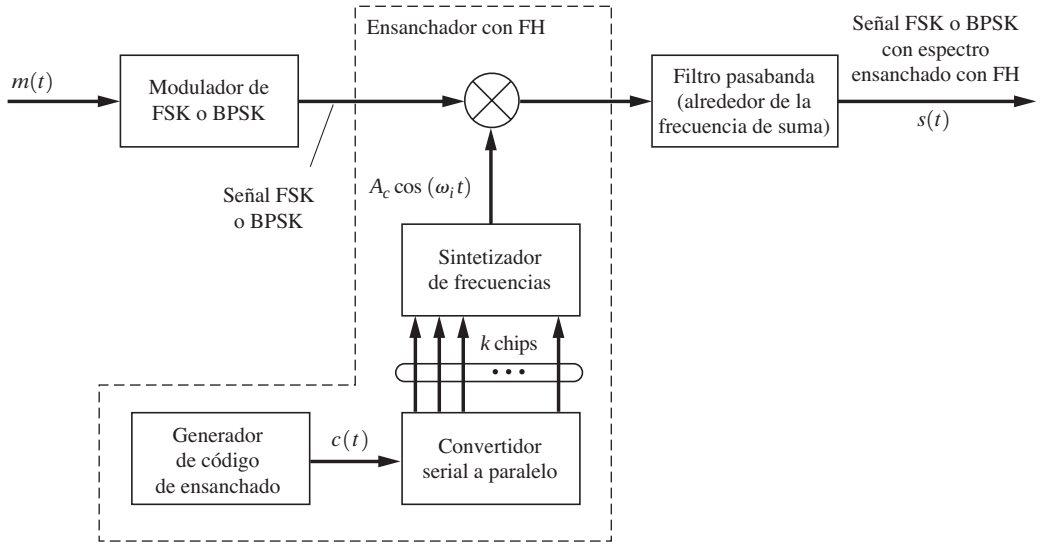
La señal FH se decodifica como se muestra en la figura 5-42b. En este caso el receptor tiene conocimiento del transmisor, $c(t)$, así que el sintetizador de frecuencias en el receptor puede saltar en sincronía con el del transmisor. Esto desensancha a la señal FH y la información fuente se recupera de la señal mediante un demodulador de FSK o un BPSK convencional, como se considere apropiado.

Bandas de frecuencia de SS

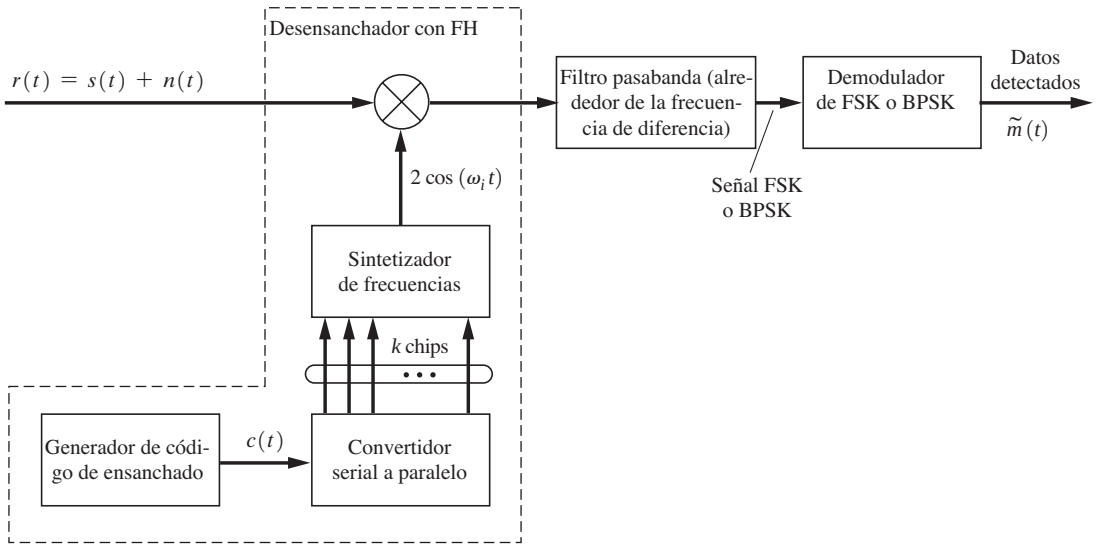
En 1985 la FCC abrió tres bandas de frecuencia compartida, 902 a 928 MHz, 2,400 a 2,483.5 MHz y 5,725 a 5,850 MHz, para uso comercial de SS con transmisores sin licencia de 1 W. Esto ha llevado a la producción y uso de equipo SS para sistemas de telemetría, redes de área local inalámbricas (Wi-Fi u 802.11a, 802.11b, 802.11g y 802.11n) para computadoras personales y sistemas inalámbricos de seguridad y contra incendios. Algunas aplicaciones de SS poseen ventajas sobre otros sistemas. Por ejemplo, un sistema de telefonía celular de SS (es decir, CDMA) parece acomodar cerca de 1,000 usuarios por célula, en comparación con los 55 usuarios por célula que soporta el sistema celular analógico estadounidense [Schilling, Pickholtz y Milstein, 1990]. (Consulte la sección 8-8 sobre los estándares de telefonía celular de CDMA.) Para un estudio más profundo de los sistemas SS se invita al lector a consultar los libros y tratados que se han escrito sobre este tema [Cooper y McGillem, 1986; Dixon, 1994; McGill, Natali y Edwards, 1994; Peterson, Ziemer y Borth, 1995; Rhee, 1998; Torrieri, 2004; Ipatov, 2005].

5–14 RESUMEN

En este capítulo se examinó una gran variedad de sistemas de modulación analógica y digital con base en la teoría desarrollada en los capítulos 1 al 4. Se consideraron a detalle las técnicas de señalización de AM, SSB, PM y FM. Se presentaron estándares para la difusión digital por AM, FM e



(a) Transmisor



(b) Receptor

Figura 5–42 Sistema de espectro ensanchado con salto de frecuencia (FH-SS).

IBOC. Se desarrollaron técnicas de señalización digital como OOK, BPSK, FSK, MSK y OFDM. Los espectros para estas señales digitales se evaluaron en términos de la velocidad de bit de la fuente de información digital. También se estudiaron técnicas de señalización digital multinivel como QPSK, MPSK y QAM, y se evaluaron sus espectros.

Se examinó la señalización con espectro ensanchado. Esta técnica tiene capacidad de acceso múltiple, capacidad antibloqueo, rechazo de interferencia y una baja probabilidad de intercepción, propiedades que se aplican a sistemas personales de comunicación y a sistemas militares.

5–15 EJEMPLOS DE ESTUDIO

SA5–1 Fórmula para la potencia de SSB Demuestre que la potencia promedio normalizada para una señal SSB es $\langle s^2(t)\rangle = A_c^2\langle m^2(t)\rangle$, como se obtiene de la ecuación (5-25).

Solución Para SSB, $g(t) = A_c[m(t) \pm j\hat{m}(t)]$. Utilizando la ecuación (4-17) resulta en

$$P_s = \langle s^2(t)\rangle = \tfrac{1}{2}\langle |g(t)|^2\rangle = \tfrac{1}{2}A_c\langle m^2(t) + [\hat{m}(t)]^2\rangle$$

o

$$P_s = \langle s^2(t)\rangle = \tfrac{1}{2}A_c\{\langle m^2(t)\rangle + \langle [\hat{m}(t)]^2\rangle\} \tag{5–136}$$

Pero

$$\langle [\hat{m}(t)]^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{\hat{m}}(f)\, df = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\, \mathcal{P}_m(f)\, df$$

donde $H(f)$ es la función de transferencia del transformador de Hilbert. Utilizando la ecuación (5-19) se encuentra que $|H(f)| = 1$. En consecuencia,

$$\langle [\hat{m}(t)]^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{\hat{m}}(f)\, df = \langle m^2(t)\rangle \tag{5–137}$$

Sustituyendo la ecuación (5-137) dentro de la ecuación (5-136) se tiene que

$$P_s = \langle s^2(t)\rangle = A_c^2\langle m^2(t)\rangle$$

SA5–2 Evaluación de la potencia de SSB Un transmisor de SSB con $A_c = 100$ se prueba al modularlo con una forma de onda triangular, como se muestra en la figura 5-14a, donde $V_p = 0.5$ V. El transmisor se conecta a una carga resistiva de 50 Ω. Calcule la potencia actual disipada dentro de la carga.

Solución Empleando la ecuación (5-25) resulta en

$$P_{\text{actual}} = \frac{(V_s)^2_{\text{rms}}}{R_L} = \frac{\langle s^2(t)\rangle}{R_L} = \frac{A_c^2}{R_L}\langle m^2(t)\rangle \tag{5–138}$$

Para la forma de onda que se muestra en la figura 5-14a,

$$\langle m^2(t)\rangle = \frac{1}{T_m}\int_0^{T_m} m^2(t)\, dt = \frac{4}{T_m}\int_0^{T_m/4}\left(\frac{4V_p}{T_m}\, t - V_p\right)^2 dt$$

o

$$\langle m^2(t)\rangle = \frac{4V_p^2}{T_m}\left.\frac{\left(\frac{4}{T_m}\, t - 1\right)^3}{3\left(\frac{4}{T_m}\right)}\right|_0^{T_m/4} = \frac{V_p^2}{3} \tag{5–139}$$

Sustituyendo la ecuación (5-139) dentro de la ecuación (5-138) se obtiene que

$$P_{\text{actual}} = \frac{A_c^2 V_p^2}{3R_L} = \frac{(100)^2(0.5)^2}{3(50)} = 16.67 \text{ W}$$

SA5–3 Transmisor de FM con multiplicadores de frecuencia Como se muestra en la figura 5-43, un transmisor de FM consiste en una etapa de excitación de FM, un multiplicador ×3 de frecuencia, un convertidor elevador (con un filtro pasabanda), un multiplicador ×2 de frecuencia y un multiplicador ×3 de frecuencia. El oscilador tiene una frecuencia de 80.0150 MHz y el filtro pasabanda se centra alrededor de la frecuencia de la portadora, la cual está localizada a aproximadamente 143 MHz. El excitador de FM tiene una frecuencia de la portadora de 20.9957 MHz y una desviación pico de 0.694 kHz cuando se aplica la entrada de audio. El ancho de banda de la entrada de audio es de 3 kHz. Calcule la frecuencia de la portadora y la desviación pico para las señales de FM en los puntos *B*, *C*, *D*, *E* y *F*. Además, calcule el ancho de banda requerido y la frecuencia central exacta para el filtro pasabanda.

Solución Como se ilustra en la sección 4-12, un multiplicador de frecuencia produce una señal de salida a la *n*-ésima armónica de la entrada e incrementa cualquier variación de PM o FM en la señal de entrada por un factor de *n*. Es decir, si la señal de entrada tiene una variación en ángulo de $\theta(t)$, la señal de salida tendrá una variación de $n\theta(t)$, como se muestra en la ecuación (4-73). Por lo tanto, la desviación pico a la salida de un multiplicador de frecuencia es de $(\Delta F)_{\text{salida}} = n(\Delta F)_{\text{entrada}}$ debido a que $\Delta F = (1/2\pi)\, d\theta(t)/dt$. La salida del excitador de FM tiene una frecuencia de la portadora $(f_c)_A =$ 20.9957 MHz y una desviación pico de $(\Delta F)_A = 0.694$ kHz. Por lo tanto, la señal FM en el punto B tiene los parámetros

$$(f_c)_B = 3(f_c)_A = 62.9871 \text{ MHz y } (\Delta F)_B = 3(\Delta F)_A = 2.08 \text{ kHz}$$

El mezclador (multiplicador) produce dos señales, un término de la frecuencia de suma y un término de la frecuencia de diferencia en el punto *C*, con las frecuencias de portadora

$$(f_c)_{C\ \text{suma}} = f_0 + (f_c)_B = 143.0021 \text{ MHz}$$

y

$$(f_c)_{C\ \text{dif}} = f_0 - (f_c)_B = 17.0279 \text{ MHz}$$

Como la señal de salida del mezclador tiene la misma envolvente compleja que el de su entrada (consulte la sección 4-11), todos los parámetros de la modulación de salida a la salida del mezclador son los mismos que para la entrada. Por tanto, las frecuencias de portadora de suma y diferencia son frecuencias moduladas y la desviación pico para cada una es de $(\Delta F)_C = (\Delta F)_B = 2.08$ kHz. El filtro pasabanda pasa el término de 143 MHz. En consecuencia, la señal FM en el punto *D* tiene los parámetros

$$(f_c)_D = (f_c)_{C\ \text{suma}} = 143.0021 \text{ MHz y } (\Delta F)_D = (\Delta F)_C = 2.08 \text{ kHz}$$

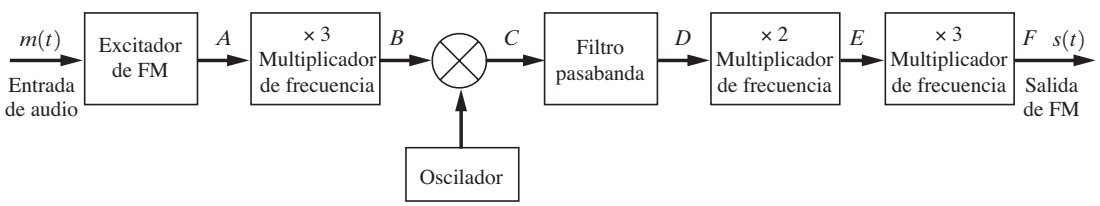


Figura 5–43 Un transmisor de FM.

Las señales FM en los puntos E y F tiene los parámetros

$$(f_c)_E = 2(f_c)_D = 286.0042 \text{ MHz y } (\Delta F)_E = 2(\Delta F)_D = 4.16 \text{ kHz}$$

$$(f_c)_F = 3(f_c)_E = 858.0126 \text{ MHz y } (\Delta F)_E = 3(\Delta F)_E = 12.49 \text{ kHz}$$

En resumen, el circuito de la figura 5-43 produce una señal FM a 858.0126 MHz que tiene una desviación pico de 12.49 kHz. El filtro pasabanda se centra en $(f_c)_{C \text{ suma}} = 143.0021$ MHz y tiene un ancho de banda suficiente para pasar la señal FM con la desviación $(\Delta F)_C = 2.08$ kHz. Empleando la regla de Carson, ecuación (5-61), se tiene que el ancho de banda requerido para el filtro pasabanda es

$$B_T = 2[\beta_C + 1]B = 2[(\Delta F)_C + B]$$

o

$$B_T = 2[2.08 + 3.0] = 10.16 \text{ kHz}$$

SA5–4 Usando un transmisor de SSB para enviar datos en banda base por medio de RF Un operador radioaficionado envía datos en la banda de 40 metros con un transceptor de SSB. Para lograrlo, conecta un módem del tipo Bell 103 a la entrada de audio (micrófono) del transceptor de SSB, como se describió en el ejemplo 5-4. Asuma que el módem se instala en el modo de contestador y el transceptor se configura para transmitir una señal de SSB inferior sobre una frecuencia de la portadora suprimida de $(f_c)_{SSB} = 7.090$ MHz. Describa el tipo de señal digitalmente modulada que se emite y determine su frecuencia de la portadora. Para los datos alternantes 101010 calcule el espectro de la señal transmitida.

Solución Remitiéndose a la sección 4-5 se aprecia que un transmisor de LSSB sólo traslada el espectro de la señal de audio de entrada hasta la frecuencia de la portadora suprimida y remueve la banda lateral superior. En la tabla 5-5 se observa que el módem Bell 103 (modo de contestador) tiene una frecuencia de marca de $f_1 = 2{,}225$ Hz, una frecuencia de espacio de $f_2 = 2{,}025$ Hz y una frecuencia de la portadora de $(f_c)_{\text{Bell 103}} = 2{,}125$ Hz. El transmisor de LSSB traslada estas frecuencias a una frecuencia de marca (1 binario) de

$$(f_c)_{SSB} - f_1 = 7090 \text{ kHz} - 2.225 \text{ kHz} = 7087.775 \text{ kHz}$$

una frecuencia de espacio (0 binario) de

$$(f_c)_{SSB} - f_2 = 7090 - 2.025 = 7087.975 \text{ kHz}$$

y una frecuencia de la portadora de

$$(f_c)_{FSK} = (f_c)_{SSB} - (f_c)_{\text{Bell 103}} = 7090 - 2.125 = 7087.875 \text{ kHz.}$$

Por lo tanto, el transceptor de SSB puede producir una señal FSK digital con una frecuencia de la portadora de 7087.875 kHz.

Para el caso de datos alternantes, el espectro de esta señal FSK se da por la ecuaciones (5-85) y (5-86), donde $f_c = 7087.875$ kHz. El gráfico espectral resultante sería parecido al de la figura 5-26a, donde el espectro se traslada de $f_c = 1{,}170$ Hz a $f_c = 7087.875$ kHz. También se puede observar que este espectro aparece en la banda lateral inferior de la frecuencia de la portadora de SSB $(f_c)_{SSB} = 7090$ kHz. Si se hubiera utilizado un transmisor de DSB-SC en lugar de uno de LSSB, el espectro se replicaría tanto en la banda lateral superior como en la lateral inferior, y se emitirían dos señales FSK redundantes.

Para el caso de datos aleatorios, la PSD para la envolvente compleja se da por la ecuación (5-90) y se muestra en la figura 5-27 para el índice de modulación de $h = 0.7$□ocupando la ecuación (5-2b) se encuentra que la PSD de la señal FSK es la traslación de la PSD para la envolvente compleja hacia la frecuencia de la portadora de 7087.875 kHz.

PROBLEMAS

★ **5–1** Un transmisor de difusión por AM se prueba alimentando la salida de RF a una carga (artificial) de 50 Ω. Se aplica una modulación de tono. La frecuencia de la portadora es de 850 kHz y la potencia de salida autorizada por la FCC es de 5,000 W. El tono senoidal de 1,000 Hz se configura para un 90□ de índice de modulación.

(a) Evalúe la potencia de la FCC en unidades de dBk (dB por arriba de 1 kW).

(b) Escriba una ecuación para el voltaje que aparece a través de la carga de 50 Ω, proporcionando valores numéricos para todas las constantes.

(c) Haga un diagrama del espectro de este voltaje como aparecerá en un analizador espectral calibrado.

(d) □Cuál es la potencia promedio que se disipa en la carga artificial?

(e) □Cuál es la potencia pico de envolvente?

5–2 Un transmisor de AM se modula con una señal de prueba de audio dada por $m(t) = 0.2 \text{ sen } \omega_1 t + 0.5 \cos \omega_2 t$, donde $f_1 = 500$ Hz, $f_2 = 500\sqrt{2}$ Hz y $A_c = 100$. Suponga que la señal AM se alimenta a una carga de 50 Ω.

(a) Haga un diagrama de la forma de onda de AM.

(b) □Cuál es el porcentaje de modulación?

(c) Evalúe y haga un diagrama del espectro de la forma de onda de AM.

5–3 Para la señal AM del problema 5-2,

(a) Calcule la potencia promedio de la señal AM.

(b) Evalúe la PEP de la señal AM.

★ **5–4** Suponga que un transmisor de AM se modula con una señal de prueba de video dada por $m(t) = -0.2 + 0.6 \text{ sen } \omega_1 t$, donde $f_1 = 3.57$ MHz. Sea $A_c = 100$.

(a) Haga un diagrama de la forma de onda de AM.

(b) □Cuáles son los índices de modulación positiva y negativa?

(c) Evalúe y haga un diagrama del espectro de la forma de onda de AM alrededor de f_c.

5–5 Un transmisor de difusión por AM de 50,000 W se evalúa mediante una prueba con dos tonos. El transmisor se conecta a una carga de 50 Ω y $m(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_1 \cos 2\omega_1 t$, donde $f_1 = 500$ Hz. Suponga que se genera una señal AM perfecta.

(a) Evalúe la envolvente compleja para la señal AM en términos de A_1 y ω_1.

(b) Determine el valor de A_1 para un índice de modulación del 90□.

(c) Encuentre los valores para la corriente pico y la corriente promedio dentro de la carga de 50 Ω para el caso de una modulación con un índice de modulación del 90□.

★ **5–6** Un transmisor de AM utiliza un multiplicador de dos cuadrantes de tal forma que la señal transmitida se describe por la ecuación (5-7). Suponga que el transmisor se modula por $m(t) = A_m \cos \omega_m t$, donde A_m se ajusta de tal forma que se obtiene una modulación positiva de 120□. Evalúe el espectro para esta señal AM en términos de A_c, f_c y f_m. Haga un diagrama de sus resultados.

★ **5–7** Una señal DSB-SC se modula por $m(t) = \cos \omega_1 t + 2 \cos 2\omega_1 t$, donde $\omega_1 = 2\pi f_1$, $f_1 = 500$ Hz y $A_c = 1$.
(a) Escriba una expresión para la señal DSB-SC y haga un diagrama de esta forma de onda.
(b) Evalúe y haga un diagrama del espectro para esta señal DSB-SC.
(c) Encuentre el valor de la potencia promedio (normalizada).
(d) Calcule el valor de la PEP (normalizada).

5–8 Suponga que una circuitería de transmisión restringe la señal de salida modulada a cierto valor pico, por ejemplo A_p, a causa de los voltajes de las fuentes de poder que se utilizan y debido a los valores pico de voltaje y de corriente de los componentes. Si una señal DSB-SC con un valor pico de A_p se genera por este circuito, muestre que la potencia de banda lateral de esta señal DSB-SC cuatruplica la potencia de banda lateral de una señal AM comparable que tiene el mismo valor pico A_p y que también puede generarse por este circuito.

5–9 Una señal DSB-SC puede generarse a partir de dos señales AM, como se muestra en la figura P5-9. Basándose en matemáticas para describir las señales en cada punto de la figura, demuestre que la salida es una señal DSB-SC.

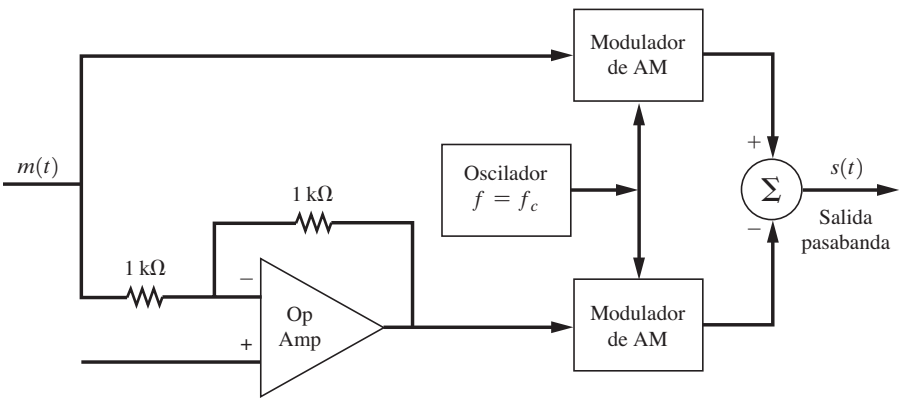


Figura P5–9

5–10 Muestre que la envolvente compleja $g(t) = m(t) - j\hat{m}(t)$ produce una señal de SSB inferior, siempre y cuando $m(t)$ sea una señal real.

5–11 Muestre que la respuesta al impulso de una red de corrimiento de fase de −90° (es decir, un transformador de Hilbert) es $1/\pi t$. *Sugerencia:*

$$H(f) = \lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \begin{cases} -je^{-\alpha f}, & f > 0 \\ je^{\alpha f}, & f < 0 \end{cases}$$

★ **5–12** Las señales SSB pueden generarse mediante un método de puesta en fase, como se mostró en la figura 5-5a, mediante el método de filtro, de la figura 5-5b, o el método de Weaver [Weaver, 1956], como se ilustra en la figura P5-12. Para el método de Weaver (figura P5-12), donde B es el ancho de banda de $m(t)$,
(a) Encuentre una expresión matemática que describa la forma de onda a la salida de cada bloque en el diagrama de bloques.
(b) Muestre que $s(t)$ es una señal SSB.

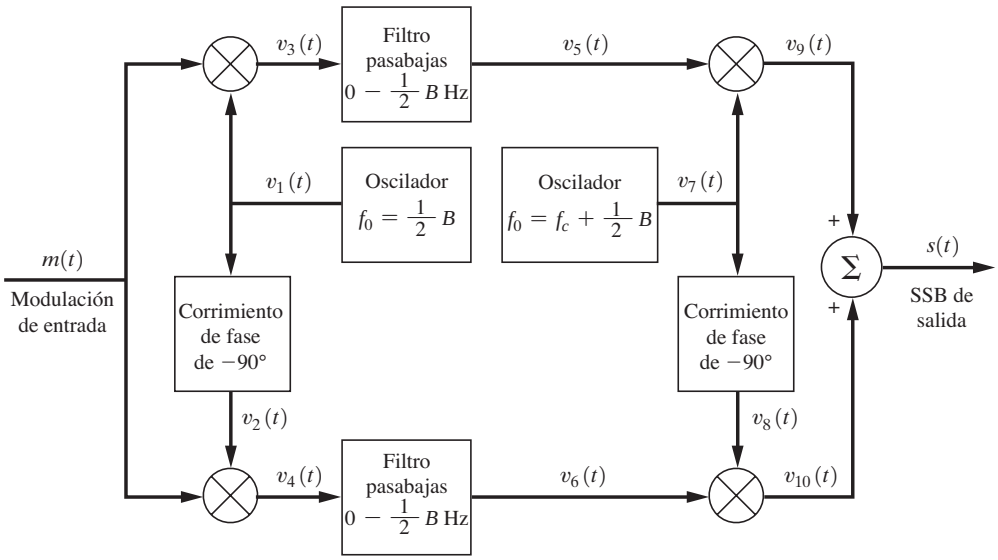


Figura P5–12 Método de Weaver para la generación de SSB.

5–13 Un transmisor de SSB-AM se modula mediante una senoidal $m(t) = 5 \cos \omega_1 t$, donde $\omega_1 = 2\pi f_1$, $f_1 = 500$ Hz y $A_c = 1$.
(a) Evalúe $\hat{m}(t)$.
(b) Encuentre la expresión para una señal SSB inferior.
(c) Halle el valor de RMS para la señal SSB.
(d) Obtenga el valor pico para la señal SSB.
(e) Calcule la potencia promedio normalizada de la señal SSB.
(f) Determine la PEP normalizada de la señal SSB.

★ **5–14** Un transmisor de SSB-AM se modula mediante un pulso rectangular de tal forma que $m(t) = \Pi(t/T)$ y $A_c = 1$.
(a) Demuestre que

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{2t + T}{2t - T} \right|$$

como se presenta en la tabla A-7.
(b) Encuentre una expresión para la señal SSB-AM $s(t)$ y haga un diagrama de la misma.
(c) Halle el valor pico de $s(t)$.

5–15 Para el problema 5-14,
(a) Determine la expresión para el espectro de una señal USSB-AM.
(b) Haga un diagrama del espectro de magnitud, $|S(f)|$.

★ **5–16** Un transmisor de USSB se modula mediante el pulso

$$m(t) = \frac{\text{sen } \pi a t}{\pi a t}$$

(a) Demuestre que

$$\hat{m}(t) = \frac{\text{sen}^2[(\pi a/2)t]}{(\pi a/2)t}$$

(b) Grafique la forma de onda de la señal USSB correspondiente para el caso donde $A_c = 1$, $a = 2$ y $f_c = 20$ Hz.

5–17 Una señal USSB-AM se modula mediante un tren de pulsos rectangulares:

$$m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi[(t - nT_0)/T]$$

Donde $T_0 = 2T$.

(a) Encuentre la expresión para el espectro de la señal SSB-AM.

(b) Haga un diagrama del espectro de magnitud, $|S(f)|$.

5–18 Un detector de SSB-AM del tipo de puesta en fase se muestra en la figura P5-18. Este circuito se conecta a la salida de IF de un receptor superheterodino convencional para suministrar recepción de SSB.

(a) Determine si el detector es sensible a las señales LSSB o USSB. ¿Cómo se puede cambiar el detector para recibir señales SSB con el tipo opuesto de bandas laterales?

(b) Suponga que la señal en el punto *A* es una USSB con $f_c = 455$ kHz. Encuentre las expresiones matemáticas para las señales en los puntos de *B* a *I*.

(c) Repita la parte (b) para el caso de una señal LSSB-AM en el punto *A*.

(d) Discuta los requisitos para el filtro de IF y LP si la señal SSB en el punto A tiene un ancho de banda de 3 kHz.

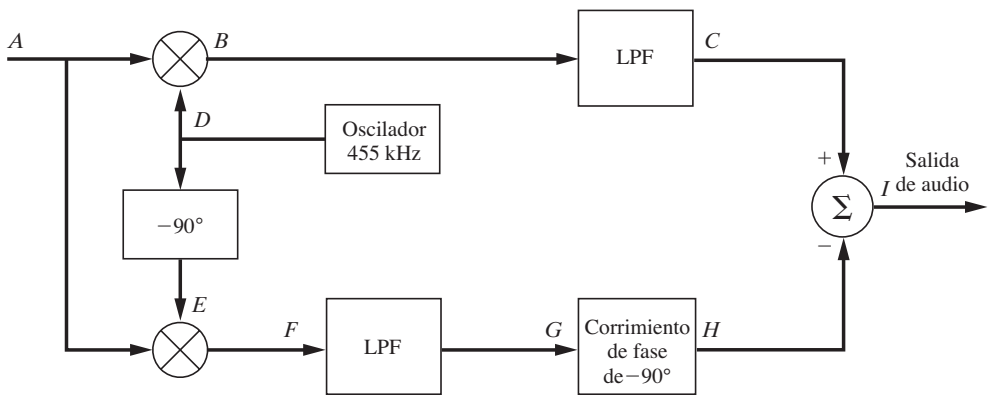


Figura P5–18

5–19 ¿Se puede ocupar un lazo de Costas, que se muestra en la figura 5-3, para demodular una señal SSB-AM? Use expresiones matemáticas para demostrar que su respuesta es correcta.

5–20 Una señal modulada se describe mediante la ecuación

$$s(t) = 10\cos[(2\pi \times 10^8)t + 10\cos(2\pi \times 10^3 t)]$$

Encuentre cada uno de los siguientes elementos:

(a) Porcentaje de AM.

(b) Potencia normalizada de la señal modulada.

(c) Máxima desviación de fase.

(d) Máxima desviación de frecuencia.

★ **5–21** Una señal senoidal $m(t) = \cos 2\pi f_m t$ es la entrada a un transmisor modulado por ángulo, donde la frecuencia de la portadora es $f_c = 1$ Hz y $f_m = f_c/4$.

(a) Grafique $m(t)$ y la señal PM correspondiente, donde $D_p = \pi$.

(b) Grafique $m(t)$ y la señal FM correspondiente, donde $D_f = \pi$.

5–22 Una forma de onda senoidal moduladora de amplitud de 4 V y con frecuencia de 1 kHz se aplica a un excitador de FM que tiene una ganancia de modulador de 50 Hz/V.
(a) ¿Cuál es la desviación pico de frecuencia?
(b) ¿Cuál es el índice de modulación?

5–23 Una señal FM tiene una modulación senoidal con una frecuencia de $f_m = 15$ kHz y un índice de modulación de $\beta = 2.0$.
(a) Encuentre el ancho de banda de transmisión utilizando la regla de Carson.
(b) ¿Cuál es el porcentaje de la potencia total de la señal FM que reside dentro del ancho de banda de la regla de Carson?

★ **5–24** Un transmisor de FM tiene el diagrama de bloques que se muestra en la figura P5-24. La respuesta de audiofrecuencia es plana sobre la banda de audio de 20 Hz a 15 kHz. La señal FM de salida debe tener una frecuencia de la portadora de 103.7 MHz y una desviación pico de 75 kHz.
(a) Encuentre el ancho de banda y la frecuencia central requerida para el filtro pasabanda.
(b) Calcule la frecuencia f_0 del oscilador.
(c) ¿Cuál es la capacidad de desviación pico requerida por el excitador de FM?

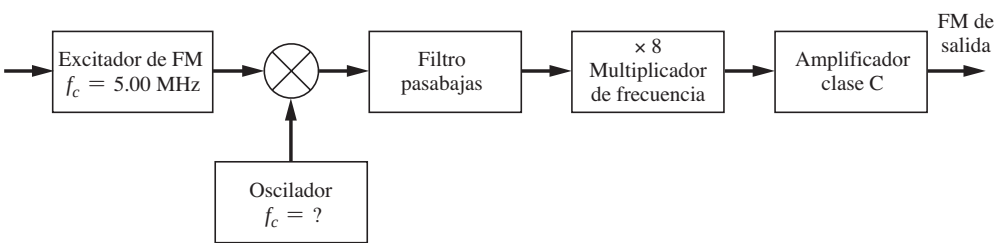


Figura P5–24

5–25 Analice el rendimiento del circuito de FM de la figura 5-8b. Suponga que el voltaje que aparece a través de diodos con polarización invertida, los cuales proporcionan la capacitancia variable de voltaje, es de $v(t) = 5 + 0.05\ m(t)$, donde la señal moduladora es un tono de prueba, $m(t) = \cos\ \omega_1 t$, $\omega_1 = 2\pi f_1$ y $f_1 = 1$ kHz. La capacitancia de cada uno de los diodos polarizados es de $C_d = 100/\sqrt{1 + 2v(t)}$ pF. Suponga que $C_0 = 180$ pF y que se escoge una L con resonancia a 5 MHz.
(a) Encuentre el valor de L.
(b) Muestre que la señal del oscilador resultante es una señal FM. Para su conveniencia, suponga que el nivel pico de la señal del oscilador es de 10 V. Obtenga el parámetro D_f.

★ **5–26** Una forma de onda modulada de RF se representa con $500 \cos[\omega_c t + 20 \cos\ \omega_1 t]$, donde $\omega_1 = 2\pi f_1$, $f_1 = 1$ kHz y $f_c = 100$ MHz.
(a) Si la constante de desviación de fase es de 100 rad/V, encuentre la expresión matemática para el voltaje de modulación en fase correspondiente $m(t)$. ¿Cuál es el valor pico y su frecuencia?
(b) Si la constante de desviación de frecuencia es de 1×10^6 rad/V-s, halle la expresión matemática para el voltaje de FM correspondiente $m(t)$. ¿Cuál es su valor pico y su frecuencia?
(c) Si la forma de onda de RF aparece a través de una carga de 50 Ω, determine la potencia promedio y la PEP.

5–27 Considere la señal FM $s(t) = 10 \cos\ [\omega_c t + 100 \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\ d\sigma]$, donde $m(t)$ es una señal polar de onda cuadrada con un ciclo de trabajo de 50%, un periodo de 1 s y un valor pico de 5 V.
(a) Haga un diagrama de la forma de onda de frecuencia instantánea y la forma de onda de la señal FM correspondiente (consulte la figura 5-9).
(b) Grafique la desviación de fase $\theta(t)$ como función del tiempo.
(c) Evalúe la desviación pico de frecuencia.

5–28 Una portadora $s(t) = 100\cos(2\pi \times 10^9 t)$ de un transmisor de FM se modula mediante una señal de tono. Para este transmisor, un tono de 1 V (RMS) produce una desviación de 30 kHz. Determine la amplitud y la frecuencia de todos los componentes (líneas espectrales) de la señal FM que son mayores a 1% de la amplitud de portadora sin modulación para las siguientes señales moduladoras:
(a) $m(t) = 2.5\cos(3\pi \times 10^4 t)$.
(b) $m(t) = 1\cos(6\pi \times 10^4 t)$.

5–29 Remitiéndose a la ecuación (5-58), muestre que

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$$

★ **5–30** Considere un excitador de FM con una salida $s(t) = 100\cos[2\pi\, 1{,}000t + \theta(t)]$. La modulación es $m(t) = 5\cos(2\pi 8t)$ y la ganancia de modulación del excitador es de 8 Hz/V. La señal FM de salida se pasa a través de un filtro pasabanda ideal (pared de ladrillos) que tiene una frecuencia central de 1,000 Hz, un ancho de banda de 56 Hz y una ganancia igual a la unidad. Determine la potencia promedio normalizada
(a) A la entrada del filtro pasabanda.
(b) A la salida del filtro pasabanda.

★ **5–31** Una señal senoidal de 1 kHz modula por fase una portadora a 146.52 MHz con una desviación pico de fase de 45°. Evalúe los espectros exactos de magnitud de la señal PM si $A_c = 1$. Haga un diagrama de sus resultados. Utilizando la regla de Carson, evalúe el ancho de banda aproximado de la señal PM y vea si es un número razonable comparado con su gráfico espectral.

5–32 Una señal senoidal de 1 kHz modula en frecuencia a una portadora a 146.52 MHz con una desviación pico de 5 kHz. Evalúe los espectros exactos de magnitud de la señal FM si $A_c = 1$. Haga un diagrama de sus resultados. Utilizando la regla de Carson, evalúe el ancho de banda aproximado de la señal FM y vea si es un número razonable comparado con su gráfico espectral.

5–33 La calibración de un monitor con desviación por frecuencia se debe verificar empleando una prueba por función de Bessel. Una señal FM de prueba con una desviación de frecuencia calculada se genera mediante la modulación en frecuencia de una onda seno a la portadora. Suponga que la onda seno tiene una frecuencia de 2 kHz y la amplitud de la misma aumenta lentamente desde cero hasta que el término de portadora discreta (a f_c) de la señal FM desaparece, como se observa en un analizador espectral. ¿Cuál es la desviación pico de frecuencia de la señal FM de prueba cuando el término de portadora discreta es cero? Suponga que la amplitud de la onda seno aumenta aún más hasta que el término de portadora discreta aparece, alcanza un máximo y vuelve a desaparecer. ¿Cuál es ahora la desviación pico de frecuencia de la señal FM de prueba?

5–34 Un modulador de frecuencia tiene una ganancia de modulador de 10 Hz/V y la forma de onda moduladora es

$$m(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 5, & 0 < t < 1 \\ 15, & 1 < t < 3 \\ 7, & 3 < t < 4 \\ 0, & 4 < t \end{cases}$$

(a) Grafique la desviación de frecuencia en hertz sobre el intervalo de tiempo $0 < t < 5$.
(b) Grafique la desviación de fase en radianes sobre ese mismo intervalo de tiempo.

★ **5–35** Una señal de prueba de onda cuadrada (digital) con un ciclo de trabajo de 50% modula en fase a un transmisor donde $s(t) = 10\cos[\omega_c t + \theta(t)]$. La frecuencia de la portadora es de 60 MHz y la desviación pico de fase es de 45°. Suponga que la señal de prueba es del tipo unipolar NRZ con un periodo de 1 ms y que es simétrica alrededor de $t = 0$. Encuentre el espectro exacto de $s(t)$.

5–36 Dos senoidales, $m(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$, modulan en fase a un transmisor. Derive una fórmula que genere el espectro exacto para la señal PM resultante en términos de los parámetros de señal A_c, ω_c, D_p, A_1, A_2, ω_1 y ω_2. [*Sugerencia:* utilice $e^{ja(t)} = (e^{ja_1(t)})(e^{ja_2(t)})$, donde $a(t) = a_1(t) + a_2(t)$.]

5–37 Grafique el espectro de magnitud centrado a $f = f_c$ para una señal FM donde la señal moduladora es

$$m(t) = A_1 \cos 2\pi f_1 t + A_2 \cos 2\pi f_2 t$$

Suponga que $f_1 = 10$ Hz y $f_2 = 17$ Hz y que A_1 y A_2 se ajustan de tal manera que cada tono aporta una desviación pico de 20 Hz.

5–38 Para valores pequeños de β, $J_n(\beta)$ puede aproximarse a través de $J_n(\beta) = \beta^n/(2^n n!)$. Muestre que, para el caso de FM con modulación senoidal, $\beta = 0.2$ es lo suficientemente pequeña para dar NBFM.

★ **5–39** Una onda cuadrada polar con un ciclo de trabajo de 50% modula en frecuencia a un transmisor de NBFM de tal manera que la desviación pico de fase es de 10°. Suponga que la onda cuadrada tiene un valor pico de 5 V, un periodo de 10 ms y un cruce con cero en $t = 0$ con una pendiente positiva.

(a) Determine la desviación pico de frecuencia para esta señal NBFM.

(b) Evalúe y haga un diagrama del espectro de la señal, utilizando la técnica de análisis de banda estrecha. Asuma que la frecuencia de la portadora es de 30 MHz.

5–40 Diseñe un transmisor de FM de banda ancha que utilice el método indirecto para la generación de una señal WBFM. Suponga que la frecuencia de la portadora de la señal WBFM es de 96.9 MHz y que el transmisor es capaz de producir una señal FM de alta calidad con una desviación pico de 75 kHz cuando se modula por una senoidal de 1 V (RMS) de frecuencia de 20 Hz. Muestre un diagrama de bloques completo de su diseño, indicando las frecuencias y las desviaciones pico de las señales en varios puntos.

5–41 Una señal FM, $100 \cos[\omega_c t + D_f \int_{-\infty}^{t} m(\sigma)\, d\sigma]$, se modula mediante la forma de onda que se muestra en la figura P5-41. Sea que $f_c = 420$ MHz.

(a) Obtenga el valor de D_f de tal manera que la desviación pico a pico de frecuencia sea de 25 kHz.

(b) Evalúe y haga un diagrama de la PSD aproximada.

(c) Determine el ancho de banda de esta señal FM de tal forma que los componentes espectrales decaigan por lo menos 40 dB del nivel de portadora sin modulación para las frecuencias fuera de dicho ancho de banda.

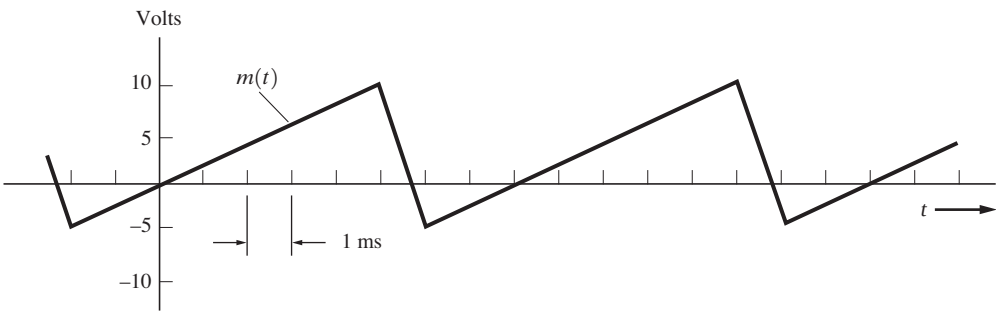


Figura P5–41

★ **5–42** Una señal digital multinivel periódica de prueba, como se muestra en la figura P5-42, modula a un transmisor de WBFM. Evalúe y haga un diagrama del espectro de potencia aproximado de esta señal WBFM si $A_c = 5$, $f_c = 2$ GHz y $D_f = 10^5$.

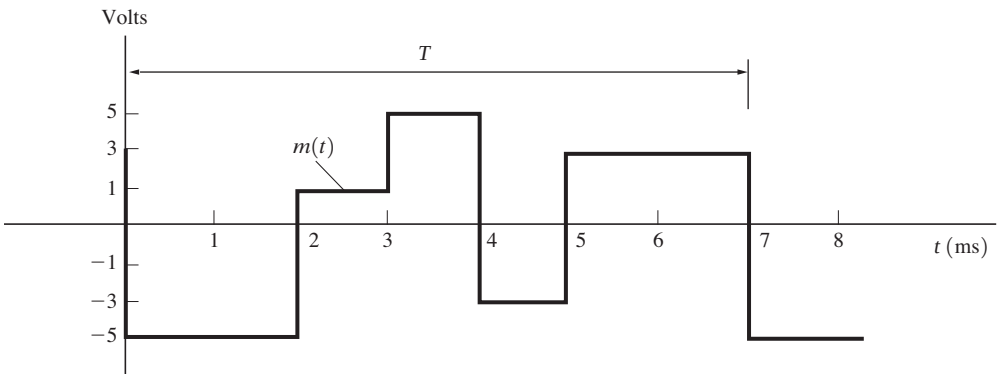


Figura P5–42

5–43 Remítase a la figura 5-16b, la cual muestra el diagrama de un circuito para una red de filtro de preénfasis comúnmente utilizada.
(a) Muestre que $f_1 = 1/(2\pi R_1 C)$.
(b) Compruebe que $f_2 = (R_1 + R_2)/(2\pi R_1 R_2 C) \approx 1/(2\pi R_2 C)$.
(c) Evalúe K en términos de R_1, R_2 y C.

5–44 La señal de banda base compuesta para una transmisión de FM en estéreo se representa mediante

$$m_b(t) = [m_L(t) + m_R(t)] + [m_L(t) - m_R(t)] \cos(\omega_{sc} t) + K \cos(\tfrac{1}{2}\omega_{sc} t)$$

Un receptor de FM en estéreo que utiliza un demultiplexor de tipo conmutador para recuperar $m_L(t)$ y $m_g(t)$ se muestra en la figura P5-44.
(a) Determine las formas de onda de conmutación en los puntos C y D que activan los conmutadores analógicos. Asegúrese de especificar la puesta en fase correcta para cada uno. Haga un diagrama de estas formas de onda.
(b) Dibuje un diagrama de bloques más detallado que muestre los bloques dentro del PLL.
(c) Escriba ecuaciones para las formas de onda en los puntos A a F y explique cómo funciona este circuito haciendo diagramas de formas de onda típicas para cada uno de estos puntos.

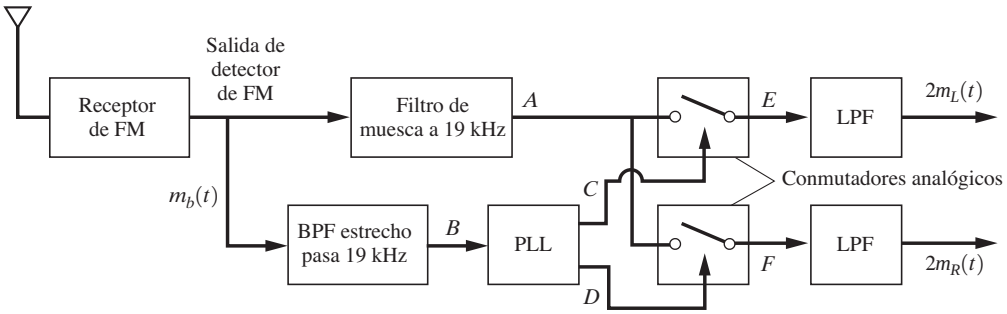


Figura P5–44

★ **5–45** En un sistema de comunicaciones, dos señales de banda base (pueden ser analógicas o digitales) se transmiten simultáneamente al generar la señal de RF

$$s(t) = m_1(t) \cos \omega_c t + m_2(t) \operatorname{sen} \omega_c t$$

La frecuencia de la portadora es 7.250 MHz. El ancho de banda de $m_1(t)$ es de 5 kHz y el de $m_2(t)$ es de 10 kHz.

(a) Evalúe el ancho de banda de $s(t)$.

(b) Derive una ecuación para el espectro de $s(t)$ en términos de $M_1(f)$ y $M_2(f)$.

(c) $m_1(t)$ y $m_2(t)$ pueden recuperarse (es decir, detectarse) a partir de $s(t)$ utilizando un receptor superheterodino con dos detectores de conmutación. Dibuje un diagrama de bloques para el receptor y haga un diagrama de las formas de onda digitales que se requieren para operar los muestreadores. Describa cómo se pueden obtener. Pruebe que los criterios de muestreo de Nyquist se satisfacen (*sugerencia:* vea la figura P5-44).

★ **5–46** Una señal digital de banda base que consiste en pulsos binarios rectangulares que ocurren a una velocidad de 24 kbits/s será transmitida a través de un canal pasabanda.

(a) Evalúe el espectro de magnitud para una señalización OOK que se modula mediante un patrón digital de banda base de prueba que consiste en 1 y 0 alternantes.

(b) Haga un diagrama del espectro de magnitud e indique el valor del primer ancho de banda de nulo a nulo. Asuma una frecuencia de la portadora de 150 MHz.

(c) Para un patrón de datos aleatorios, encuentre la PSD y grafique el resultado. Compare este resultado con el que se obtuvo en las partes (a) y (b) para datos alternantes.

5–47 Repita el problema 5-46 para el caso de una señalización BPSK.

★ **5–48** Una portadora se modula por ángulo con una señal de datos de banda base polar que produce una señal BPSK $s(t) = 10\cos[\omega_c t + D_p m(t)]$, donde $m(t) = \pm 1$ corresponde a los datos binarios 10010110□ $T_b = 0.0025$ segundos y $\omega_c = 1{,}000\pi$. Utilizando MATLAB, grafique la forma de onda de la señal BPSK y su espectro de la FFT correspondiente para los siguientes índices de modulación digital:

(a) $h = 0.2$.

(b) $h = 0.5$.

(c) $h = 1.0$.

5–49 Evalúe el espectro de magnitud para una señal FSK con datos alternantes de 1 y 0. Suponga que la frecuencia de marca es de 50 kHz, la frecuencia de espacio de 55 kHz y la velocidad de bit de 2,400 bits/s. Encuentre el primer ancho de banda de nulo a nulo.

5–50 Suponga que se envían datos aleatorios a 4,800 bits/s a través de un canal pasabanda mediante una señalización BPSK. Encuentre el ancho de banda de transmisión B_T de tal manera que la envolvente espectral decaiga por lo menos 35 dB fuera de esta banda.

5–51 Como se indica en la figura 5-22a, una señal BPSK puede demodularse empleando un detector coherente en donde la referencia de portadora se suministra a través de un lazo de Costas para el caso de $h = 1.0$. Como alternativa, la referencia de portadora puede suministrarse mediante un lazo cuadrático que usa un multiplicador $\times 2$ de frecuencia. Un diagrama de bloques para un lazo cuadrático se muestra en la figura P5-51.

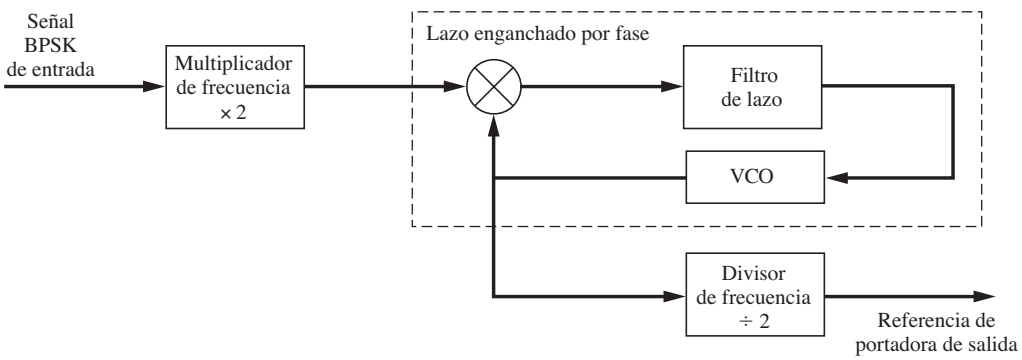


Figura P5–51

(a) Ocupando el lazo cuadrático, dibuje un diagrama de bloques general para un receptor de BPSK.
(b) Apoyado en matemáticas para representar las formas de onda, muestre cómo el lazo cuadrático recupera la referencia de portadora.
(c) Demuestre si el lazo cuadrático tiene o no un problema de ambigüedad de fase de 180°.

5–52 Una señal de datos binaria se codifica diferencialmente y modula a un transmisor de PM para producir una señal con modulación por corrimiento de fase diferencialmente codificada (DPSK). La desviación pico a pico de fase es de 180° y f_c se relaciona armónicamente a la velocidad de bit R.
(a) Dibuje un diagrama de bloques para el transmisor, incluyendo el codificador diferencial.
(b) Muestre formas de onda típicas en varios puntos del diagrama de bloques si la secuencia de datos de entrada es 01011000101.
(c) Suponga que el receptor consiste en un circuito superheterodino. El detector que se emplea se muestra en la figura P5-52, donde $T = 1/R$. Si la señal DPSK IF $v_1(t)$ tiene un valor pico de A_c volts, determine el valor apropiado para la configuración de umbral de voltaje V_T.
(d) Haga un diagrama de las formas de onda que aparecen en varios puntos de este circuito detector para la secuencia de datos en la parte (b).

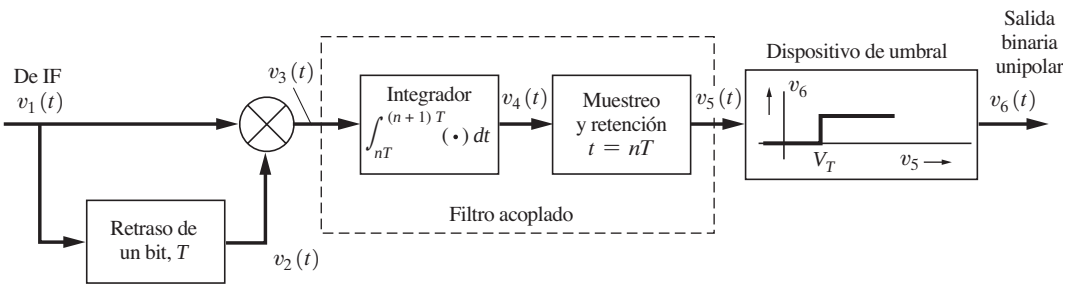


Figura P5–52

★ **5–53** Una señal binaria de banda base se pasa a través de un filtro de coseno realzado con un factor de *rolloff* de 50% y después se modula a una portadora. La velocidad de datos es de 64 kbits/s. Evalúe
(a) El ancho de banda absoluto de la señal OOK resultante.
(b) El ancho de banda aproximado de la señal FSK resultante cuando la frecuencia de marca es de 150 kHz y la frecuencia de espacio es de 155 kHz.
(*Nota:* es interesante comparar estos anchos de banda con los obtenidos en los problemas 5-46 y 5-49.)

5–54 Evalúe el espectro exacto de magnitud de la señal FSK que se emite por un módem del tipo Bell 103 que opera en modo de contestador a 300 bits/s. Asuma que los datos son 1 y 0 alternantes.

5–55 Empezando con la ecuación (5-84), desarrolle todos los pasos matemáticos para derivar el resultado dado en la ecuación (5-85).

5–56 Cuando se detectan señales FSK utilizando detección coherente, como se muestra en la figura 5-28b, se asume que cos $\omega_1 t$ y cos $\omega_2 t$ son funciones ortogonales. Esto es verdadero si $f_1 - f_2 = 2\,\Delta F$ es lo suficientemente grande. Encuentre la condición *exacta* requerida para que las señales FSK de marca y de espacio sean ortogonales (*sugerencia:* la respuesta relaciona a f_1, f_2 y R).

5–57 Muestre que el ancho de banda de transmisión aproximado para FSK se obtiene a partir de $B_T = 2R(1 + h/2)$, donde h es el índice de modulación digital y R la velocidad de bit.

★ **5–58** Suponga que se emplea una señal QPSK para enviar datos a una velocidad de 30 Mbits/s sobre un transpondedor satelital que tiene un ancho de banda de 24 MHz.

(a) Si la señal del satélite se ecualiza para tener una característica de filtro de coseno realzado equivalente, ¿cuál es el factor de *rolloff r* requerido?
(b) ¿Puede encontrarse un factor de *rolloff r* de tal manera que se pueda soportar una velocidad de datos de 50 Mbits/s?

★ **5-59** Una señal QPSK se genera mediante pulsos de datos no rectangulares en los canales I y Q. Los pulsos de datos poseen espectros correspondientes a la función de transferencia de un filtro de coseno realzado de raíz cuadrática.

(a) Encuentre la fórmula para la PSD de la señal QPSK.
(b) Grafique la PSD para la envolvente compleja de la señal QPSK, donde el factor de *rolloff* es $r = 0.35$ y la velocidad de datos se normaliza a $R = 1$ bit/s. Grafique su resultado en dB contra frecuencia normalizada a la velocidad de bit, parecido a lo que se muestra en la figura 5-33.

5–60 Muestre que dos sistemas BPSK pueden operar simultáneamente sobre el mismo canal usando portadoras en cuadratura (seno y coseno). Dibuje un diagrama de bloques para los transmisores y receptores. ¿Cuál es la velocidad de datos general agregada R para este sistema de multiplexión de portadora en cuadratura como una función del ancho de banda nulo del canal B_T? ¿Cómo se compara la velocidad de datos agregada del sistema con la velocidad de datos para un sistema que hace una multiplexión por división de tiempo de las dos fuentes y después transmite los datos de TDM a través de una portadora de QPSK?

5–61 Una línea telefónica de par trenzado de 18,000 pies tiene un ancho de banda utilizable de 750 kHz. Encuentre la máxima velocidad de datos que se puede soportar en esta línea para producir un ancho de banda de nulo a nulo de 750 kHz si
(a) Se emplea señalización QPSK (pulsos rectangulares) con una sola portadora.
(b) Se emplea señalización OFDM con portadoras de QPSK.

5–62 Suponga que un canal de línea telefónica se ecualiza para permitir una transmisión pasabanda de datos sobre un rango de frecuencias de 400 a 3,100 Hz de tal forma que el ancho de banda de canal disponible es de 2,700 Hz y la frecuencia de medio canal es de 1,750 Hz. Diseñe un esquema de señalización QAM de 16 símbolos que permita una velocidad de datos de 9,600 bits/s de transferencia a través del canal. En su diseño, seleccione un factor de *rolloff r* adecuado e indique el ancho de banda absoluto y a 6 dB de la señal QAM. Explique por qué seleccionó el valor de r que utilizó en particular.

5–63 Suponga que $R = 9{,}600$ bits/s. Para pulsos de datos rectangulares, calcule el *segundo* ancho de banda de nulo a nulo para BPSK, QPSK, MSK, 64PSK y 64QAM. Explique las ventajas y desventajas de cada uno de estos métodos de señalización.

5–64 Remitiéndose a la figura 5-31b, haga un diagrama de las formas de onda que aparecerán a la salida de cada bloque, asumiendo que la entrada es una señal de nivel TTL con datos 110100101 y $\ell = 4$. Explique cómo funciona este transmisor de QAM.

5–65 Diseñe un receptor (es decir, determine el diagrama de bloques) que detectará los datos en una forma de onda QAM con una constelación de $M = 16$ puntos para la señal, como se muestra en la figura 5-32. Explique cómo funciona su receptor (*sugerencia:* estudie la figura 5-31b).

5–66 Empleando MATLAB, grafique las formas de onda de QPSK y OQPSK en fase y modulación en cuadratura para el siguiente flujo de datos

$$\{-1, -1, -1, +1, +1, +1, -1, -1, -1, +1, -1, -1, +1, -1, -1\}$$

Use una forma de pulso rectangular. Para su conveniencia, asuma que $T_b = 1$.

★ **5-67** Para señalización $\pi/4$ QPSK,
(a) Calcule los corrimientos de fase de la portadora cuando el flujo de datos de entrada es 10110100101010, donde los bits más a la izquierda son los que se aplican primero al transmisor.
(b) Encuentre el ancho de banda absoluto de la señal si se ocupa un filtro de coseno realzado con $r = 0.5$ y la velocidad de datos es de 1.5 Mbits/s.

5–68 **(a)** La figura 5-34 muestra las formas de onda de $x(t)$ y de $y(t)$ para la MSK de tipo II. Vuelva a dibujar estas formas de onda para el caso de la MSK de tipo I.
(b) Muestre que la ecuación (5-114b) es la transformada de Fourier de la ecuación (5-114a).

5–69 Empleando MATLAB, grafique las formas de onda de modulación MSK de tipo I $x(t)$ y $y(t)$ y la señal MSK $s(t)$. Asuma que el flujo de datos de entrada es

$$\{+1, -1, -1, +1, -1, -1, +1, -1, -1, +1, +1, -1, +1, +1, -1\}$$

Asuma también que $T_b = 1$ y que f_c tiene un valor de tal forma que se obtiene un buen gráfico de $s(t)$ en una cantidad razonable de tiempo de computación.

5–70 Repita el problema 5-69, pero utilice el flujo de datos

$$\{-1, -1, -1, +1, +1, +1, -1, -1, -1, +1, -1, -1, +1, -1, -1\}$$

Este flujo de datos es la versión codificada diferencialmente del flujo de datos del problema 5-69. La generación de la FFSK es equivalente a la MSK de tipo I con codificación diferencial de los datos de entrada. La FFSK tiene una relación de uno a uno entre los datos de entrada y las frecuencias de marca y de espacio.

★ **5–71** Ocupando MATLAB, grafique las formas de onda de modulación MSK de tipo II $x(t)$ y $y(t)$ y la señal MSK $s(t)$. Asuma que el flujo de datos de entrada es

$$\{-1, -1, -1, +1, +1, +1, -1, -1, -1, +1, -1, -1, +1, -1, -1\square$$

Asuma también que $T_b = 1$ y que f_c tiene un valor de tal manera que se obtiene un buen gráfico de $s(t)$ en una cantidad razonable de tiempo de computación.

5–72 Muestre que la MSK puede generarse mediante el método serial de la figura 5-36c, es decir, que la PSD para la señal a la salida del filtro pasabanda MSK es el espectro de MSK, como se describe en las ecuaciones (5-115) y (5-2b).

★ **5–73** La GMSK se genera filtrando pulsos de datos con forma rectangular con un filtro gaussiano y aplicando la señal filtrada a un transmisor de MSK.
(a) Muestre que el pulso de datos después de pasar por un filtro gaussiano es

$$p(t) = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\ln 2}}\right)(BT_b)\int_{\frac{t}{TB_b}-\frac{1}{2}}^{\frac{t}{TB_b}+\frac{1}{2}} e^{-\left[\frac{2\pi^2}{\ln 2}(BT_b)^2x^2\right]}\,dx$$

[*Sugerencia:* evalúe $p(t) = h(t)*\Pi(t/T_b)$, donde $h(t) = \mathfrak{F}^{-1}[H(f)]$ y $H(f)$ se describen en la ecuación (5-116).]
(b) Grafique $p(t)$ para $BT_b = 0.3$ y una T_b normalizada a T_b.

5–74 Recalcule las eficiencias espectrales para todas las señales que se muestran en la tabla 5-7 ocupando un criterio de ancho de banda de 40 dB.

5–75 Evalúe y grafique la PSD para una señalización OFDM con $N = 64$. Encuentre el ancho de banda de esta señal OFDM si la velocidad de datos de entrada es de 10 Mbits/s y cada portadora utiliza modulación de 16PSK.

5–76 Demuestre que la ecuación (5-123), la autocorrelación para un código PN de secuencia m, es correcta. *Sugerencia:* emplee la definición de la función de autocorrelación, $R_c(\tau) = \langle c(t)c(t+\tau)\rangle$, y la ecuación (5-122), donde

$$c(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n p(t - nT_c)$$

y

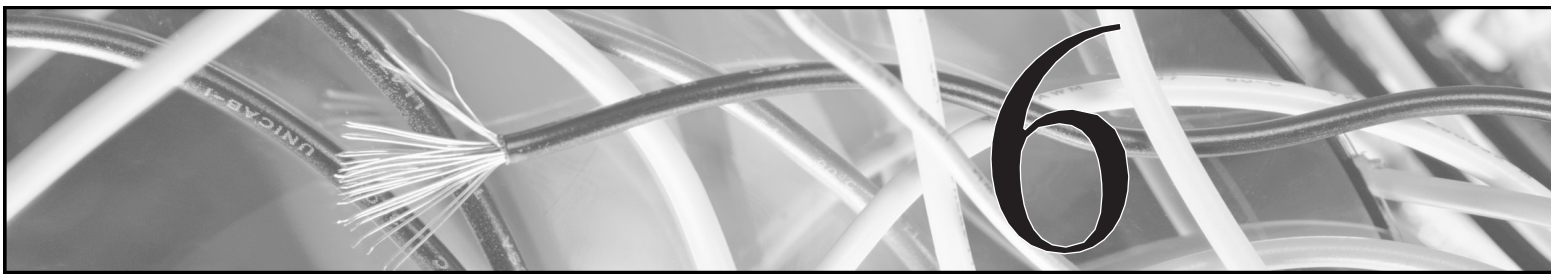
$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T_c \\ 0, & t \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

5–77 Encuentre una expresión para la PSD de un código PN de secuencia *m* cuando la velocidad de chip es de 10 MHz y existen ocho etapas en el registro de corrimiento. Haga un diagrama de su resultado.

5–78 Remitiéndose a la figura 5-40a, muestre que los coeficientes complejos de la serie de Fourier para la autocorrelación de una forma de onda de PN de secuencia *m* se obtienen a partir de la ecuación (5-128).

★ **5–79** Suponga que el modulador y demodulador para el sistema FH-SS de la figura 5-42 son del tipo FSK.
(a) Encuentre una expresión matemática para la señal FSK-FH-SS $s(t)$ a la salida del transmisor.
(b) Utilizando su resultado para $s(t)$ de la parte (a) como la entrada al receptor de la figura 5-42b [es decir, $r(t) = s(t)$], muestre que la salida del filtro pasabanda del receptor es una señal FSK.

Capítulo



6

PROCESOS ALEATORIOS Y ANÁLISIS ESPECTRAL

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Procesos aleatorios
- Densidad espectral de potencia
- Características de sistemas lineales
- Procesos gaussianos aleatorios
- Filtros acoplados

Este capítulo examinará los procedimientos matemáticos empleados para describir señales y ruido aleatorios. Como recordará del inicio de la obra, las señales aleatorias, o estocásticas, a diferencia de las deterministas, se utilizan para transmitir información. El ruido también se describe en términos estadísticos. Por lo tanto, el conocimiento acerca de las señales y ruido aleatorios es fundamental para la comprensión de los sistemas de comunicaciones.

Este capítulo se redactó en el entendido de que el lector tiene conocimientos básicos de probabilidad, variables aleatorias y promedios conjuntos, los cuales se desarrollan en el apéndice B. Si el lector no está familiarizado con estos conceptos, se recomienda que estudie dicho apéndice en este momento como si fuera cualquier otro capítulo. Asimismo, el apéndice B puede servir como breve repaso al estudiante que ha tomado cursos sobre el tema.

Los procesos aleatorios son extensiones de los conceptos asociados con variables aleatorias cuando el parámetro de tiempo se agrega al problema. Como se verá, esto habilita la incorporación de la respuesta de frecuencia dentro de la descripción estadística.

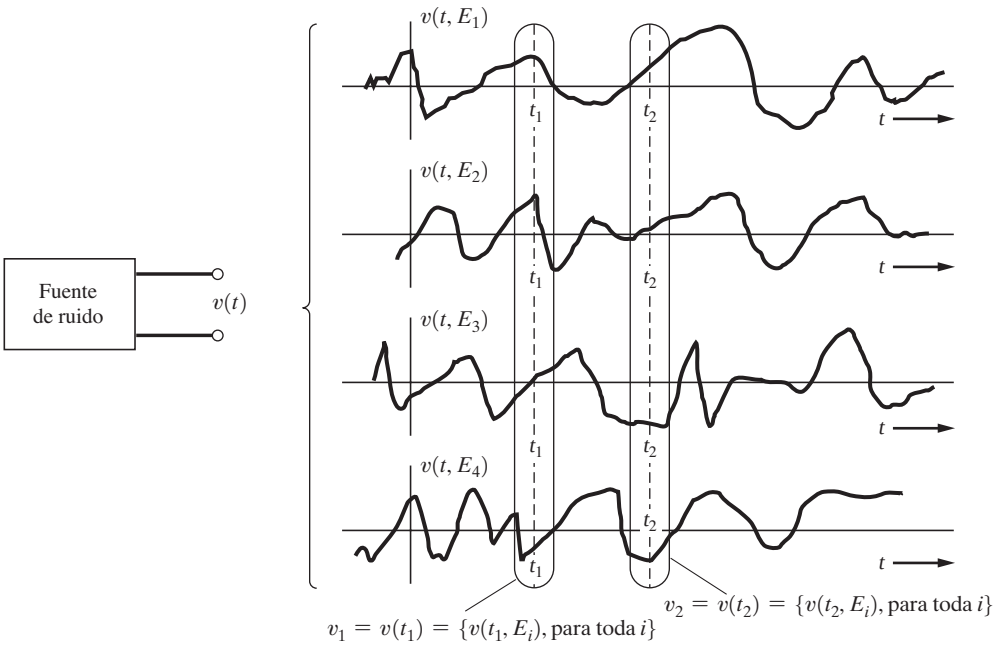


Figura 6–1 Fuente de ruido aleatorio y algunos ejemplos de funciones del proceso de ruido aleatorio.

6–1 ALGUNAS DEFINICIONES BÁSICAS

Procesos aleatorios

DEFINICIÓN. Un *proceso aleatorio real* (o *proceso estocástico*) es un conjunto indexado de funciones reales de algún parámetro, generalmente el tiempo, que posee ciertas propiedades estadísticas.

Considere las formas de onda de voltaje que pueden emitirse por una fuente de ruido (vea la figura 6-1). Una posible forma de onda es $v(t, E_1)$ otra es $v(t, E_2)$. En general, $v(t, E_i)$ denota la forma de onda que se obtiene cuando ocurre el evento E_i del espacio muestra. Se dice que $v(t, E_i)$ es una función *muestreal* del espacio muestra. El conjunto de todas las posibles funciones muestrales $\{v(t, E_i)\}$ se conoce como *conjunto* y define al *proceso aleatorio* $v(t)$ que describe a la fuente de ruido. Es decir, los eventos $\{E_i\}$ se asignan a un conjunto de funciones de tiempo $\{v(t, E_i)\}$. Esta colección de funciones es el proceso aleatorio $v(t)$. Cuando se observa la forma de onda de voltaje que se genera por la fuente de ruido se puede identificar una de las funciones muestrales.

Es factible obtener las funciones muestrales observando simultáneamente las salidas de muchas fuentes de ruido idénticas. Para obtener todas las funciones muestrales en general se requeriría un infinito número de fuentes de ruido.

La definición de un proceso aleatorio puede compararse con la de una variable aleatoria. Una variable aleatoria asigna eventos a *constantes*, mientras que un proceso aleatorio asigna eventos a *funciones* del parámetro *t*.

TEOREMA. *Un proceso aleatorio puede describirse mediante un conjunto indexado de variables aleatorias.*

Considerando la figura 6-1, defina un conjunto de variables aleatorias $v_1 = v(t_1)$, $v_2 = v(t_2)$, …, donde $v(t)$ es el proceso aleatorio. En este caso, la variable aleatoria $v_1 = v(t_1)$ toma los valores que se describen a través del conjunto de constantes $\{v(t, E_i)$, para toda $i\}$.

Por ejemplo, suponga que la fuente de ruido tiene una distribución gaussiana. Entonces cualquiera de las variables aleatorias se describirá mediante

$$f_{v_j}(v_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-(v_j - m_j)^2/(2\sigma j^2)} \tag{6–1}$$

donde $v_1 \triangleq v(t_1)$. Se puede observar que, en general, la función de densidad de probabilidad (PDF) depende implícitamente del tiempo, ya que m_j y σ_j, respectivamente, corresponden al valor de la media y de la desviación estándar obtenidas al tiempo $t = t_j$. La distribución conjunta de $N = 2$ para la fuente gaussiana para $t = t_1$ y $t = t_2$ es la PDF gaussiana bivariante $f_v(v_1, v_2)$, como se obtiene de la ecuación (B-97), donde $v_1 = v(t_1)$ y $v_2 = v(t_2)$

Para describir completamente un proceso aleatorio general $x(t)$ se requiere de una PDF N-dimensional, $f_x(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N)$, $x_j \triangleq x(t_j)$, y $N \to \infty$. Aún más, la PDF N-dimensional es una función implícita de N constantes de tiempo $t_1, t_2, \ldots, t_N$, debido a que

$$f_x(\mathbf{x}) = f_x(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_N)) \tag{6–2}$$

Los procesos aleatorios pueden clasificarse como continuos o discretos. Los primeros consisten en un proceso aleatorio con variables aleatorias continuamente distribuidas asociadas al mismo, las cuales son de la forma $v_j = v(t_j)$. El proceso gaussiano aleatorio descrito anteriormente es un ejemplo de proceso aleatorio continuo. El ruido en los circuitos lineales de comunicaciones es generalmente del tipo continuo, en muchos casos, en circuitos no lineales también lo es. Un *proceso aleatorio discreto* consiste en variables aleatorias con distribuciones discretas. Por ejemplo, la salida de un limitador ideal (absoluto) es un proceso aleatorio binario (discreto con dos niveles). Algunas funciones muestrales de un proceso aleatorio binario se ilustran en la figura 6-2.

Estacionalidad y ergodicidad

DEFINICIÓN. Se dice que un proceso aleatorio $x(t)$ es *estacionario hasta el orden de N* si, para cualquier $t_1, t_2, \ldots, t_N$,

$$f_x(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_N)) = f_x(x(t_1 + t_0), x(t_2 + t_0), \ldots, x(t_N + t_0)) \tag{6–3}$$

donde t_0 es cualquier constante real arbitraria. Aún más, se dice que el proceso es *estrictamente estacionario* si es estacionario al orden de $N \to \infty$.

Esta definición implica que si un proceso estacionario de orden N se traslada en el tiempo, entonces las estadísticas del N-ésimo orden no cambian. Además, la PDF N-dimensional depende de $N - 1$ diferencias de tiempo $t_2 - t_1$, $t_3 - t_1$, …, $t_N - t_1$, ya que se puede escoger una t_0 que sea igual a $-t_1$.

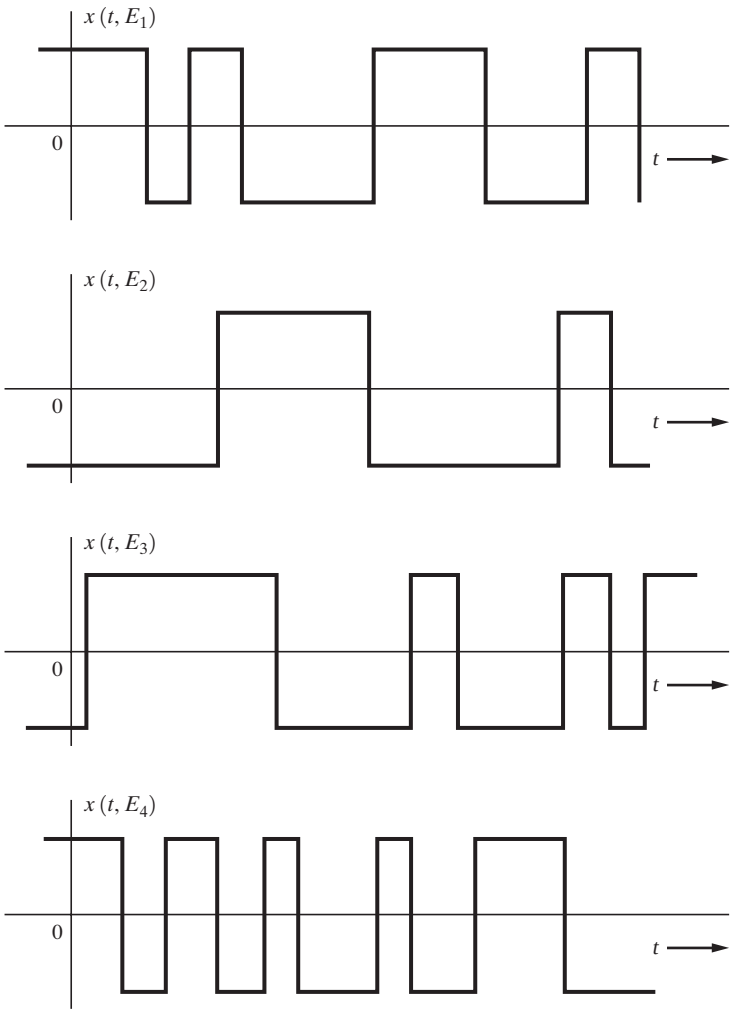


Figura 6–2 Funciones muestrales de un proceso aleatorio binario.

Ejemplo 6–1 ESTACIONALIDAD DE PRIMER ORDEN

Examine un proceso aleatorio $x(t)$ para determinar si es estacionario de primer orden. De la ecuación (6−3) se tiene que el requisito para una estacionalidad de primer orden es que la PDF de primer orden no sea una función del tiempo.

Sea el proceso aleatorio

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \theta_0) \tag{6–4}$$

CASO 1: UN RESULTADO ESTACIONARIO. Primero, suponga que A y ω_0 son constantes deterministas y que θ_0 es una variable aleatoria□t es el parámetro del tiempo. Suponga además que θ_0 se distribuye uniformemente sobre $-\pi$ a π. Entonces $\psi \triangleq \theta_0 + \omega_0 t$ es una variable aleatoria uniformemente distribuida sobre el intervalo $\omega_0 t - \pi < \psi < \omega_0 t + \pi$. La PDF de primer orden para $x(t)$ se

puede obtener mediante la técnica de transformación desarrollada en la sección B—8 del apéndice B. Este es esencialmente el mismo problema que el desarrollado en el ejemplo B—5. A partir de la ecuación (B—71) se tiene que la PDF de primer orden para $x(t)$ es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}, & |x| \leq A \\ 0, & x \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{6–5a}$$

Debido a que esta PDF no es una función de t, resulta que $x(t)$ es un proceso estacionario de primer orden para las suposiciones del caso 1, donde θ_0 es una variable aleatoria. Este resultado sería aplicable en los problemas en donde θ_0 es la fase aleatoria de inicialización de un oscilador asíncrono.

CASO 2: RESULTADO NO ESTACIONARIO. En segundo lugar, suponga que A, ω_0 y θ_0 son constantes deterministas. Entonces, para cualquier tiempo, el valor de $x(t)$ es conocido con una probabilidad de la unidad. Por lo tanto, la PDF de primer orden de $x(t)$ es

$$f(x) = \delta(x - A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \theta_0)) \tag{6–5b}$$

La PDF es una función de t. Como consecuencia, $x(t)$ no es estacionario de primer orden para la suposición del caso 2, donde θ_0 es una constante determinista. Este resultado sería aplicable a problemas en donde el oscilador se sincroniza a alguna fuente externa de tal forma que la fase de inicialización de aquél tendrá el valor conocido de θ_0.

DEFINICIÓN. Se dice que un proceso aleatorio es *ergódico* si todos los promedios de tiempo de cualquier función muestral es igual a los promedios conjuntos correspondientes (expectativas).

Los valores de DC y RMS son dos promedios importantes en la ingeniería eléctrica. Estos valores se definen en términos de promedios de tiempo, pero si el proceso es ergódico, pueden evaluarse a través de promedios conjuntos. El valor de DC de $x(t)$ es $x_{\text{dc}} \triangleq \langle x(t) \rangle$. Cuando $x(t)$ es ergódico el promedio de tiempo es igual al promedio conjunto, así que se obtiene que

$$x_{\text{dc}} \triangleq \langle x(t) \rangle \equiv \overline{[x(t)]} = m_x \tag{6–6a}$$

donde el promedio de tiempo es

$$\langle [x(t)] \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t)] dt \tag{6–6b}$$

el promedio conjunto es

$$\overline{[x(t)]} = \int_{-\infty}^{\infty} [x] f_x(x) dx = m_x \tag{6–6c}$$

y m_x denota el valor de la media. De la misma manera, el RMS se obtiene como

$$X_{\text{rms}} \triangleq \sqrt{\langle x^2(t) \rangle} \equiv \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\sigma_x^2 + m_x^2} \tag{6–7}$$

donde σ_x^2 es la varianza de $x(t)$.

En resumen, si un proceso es ergódico, todos los promedios de tiempo y conjunto son intercambiables. Por lo tanto, el promedio de tiempo no puede ser una función del mismo, ya que su parámetro se ha promediado. Aún más, el proceso ergódico debe ser estacionario, ya que de otra manera los promedios conjuntos (como los momentos) serían una función del tiempo. Sin embargo, no todos los procesos estacionarios son ergódicos.

Ejemplo 6–2 PROCESO ERGÓDICO ALEATORIO

Sea un proceso aleatorio dado por

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) \tag{6–8}$$

donde A y ω_0 son constantes y θ es una variable aleatoria uniformemente distribuida sobre $(0, 2\pi)$. Primero se evalúan algunos promedios conjuntos. La media y el segundo momento son

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} [x(\theta)] f_\theta(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} [A\cos(\omega_0 t + \theta)]\, \frac{1}{2\pi}\, d\theta = 0 \tag{6–9}$$

y

$$\overline{x^2(t)} = \int_0^{2\pi} [\mathrm{A}\cos(\omega_0 t + \theta)]^2\, \frac{1}{2\pi}\, d\theta = \frac{A^2}{2} \tag{6–10}$$

En este ejemplo, el parámetro del tiempo t desapareció cuando los promedios conjuntos se evaluaron, lo cual no hubiera sido el caso a menos que $x(t)$ fuese estacionario.

Segundo, se evaluarán los promedios de tiempo correspondientes empleando una función típica de muestra del proceso aleatorio. Una función muestral es $x(t, E_1) = A\cos\omega_0 t$, lo cual ocurre cuando $\theta = 0$, lo que corresponde a uno de los eventos (resultados). El promedio de tiempo para cualquiera de las funciones muestrales se puede evaluar si θ es del valor apropiado entre 0 y 2π. Los promedios de tiempo para el primer y segundo momentos son

$$\langle x(t)\rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A\cos(\omega_0 t + \theta)\, dt = 0 \tag{6–11}$$

y

$$\langle x^2(t)\rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [A\cos(\omega_0 t + \theta)]^2\, dt = \frac{A^2}{2} \tag{6–12}$$

donde $T_0 = 1/f_0$, y donde se ha utilizado el operador de promedio de tiempo para una función periódica, la ecuación (2–4). En este ejemplo la θ desaparece cuando se evalúa el promedio de tiempo como consecuencia de que $x(t)$ es un proceso ergódico. Sin embargo, en un ejemplo no ergódico el promedio de tiempo sería una variable aleatoria.

Comparando la ecuación (6-9) con la ecuación (6-11) y la ecuación (6-10) con la (6-12), se puede observar que el promedio de tiempo es igual al promedio conjunto para el primer y segundo momentos□por lo tanto, se sospecha que este proceso puede ser ergódico. Sin embargo, aún no se ha demostrado que lo sea, ya que no se han evaluado todos los posibles promedios de tiempo y conjunto o todos los momentos. No obstante, parece que los otros promedios de tiempo y conjunto serían iguales, así que se *asume* que el proceso es ergódico. En general, es difícil demostrar que un proceso es ergódico, así que se asumirá que este es el caso si el proceso parece ser estacionario y algunos de los promedios de tiempo son iguales a los promedios conjuntos correspondientes. Un proceso ergódico debe ser estacionario porque los promedios de tiempo no pueden ser funciones del mismo tiempo. Sin embargo, si se sabe que un proceso es estacionario, éste puede o no ser ergódico.

En el problema 6-2, al final del capítulo, se mostrará que el proceso aleatorio descrito por la ecuación (6-8) no sería estacionario (y, en consecuencia, tampoco ergódico) si θ estuviese uniformemente distribuida sobre $(0, \pi/2)$ en lugar de $(0, 2\pi)$.

Funciones de correlación y estacionalidad en sentido amplio

DEFINICIÓN. La *función de autocorrelación* de un proceso real $x(t)$ es

$$R_x(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)x(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_x(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \tag{6–13}$$

donde $x_1 = x(t_1)$ y $x_2 = x(t_2)$. Si el proceso es estacionario de segundo orden, entonces la función de autocorrelación es una función sólo de la diferencia de tiempo $\tau = t_2 - t_1$.

Es decir,

$$R_x(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} \tag{6–14}$$

si $x(t)$ es estacionario de segundo orden.[1]

DEFINICIÓN. Se dice que un proceso aleatorio es *estacionario en sentido amplio* si

$$1.\ \overline{x(t)} = \text{constante y} \tag{6–15a}$$

$$2.\ R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) \tag{6–15b}$$

donde $\tau = t_2 - t_1$.

Un proceso estacionario de orden 2 o mayor es estacionario en sentido amplio. Sin embargo, lo contrario no es necesariamente correcto, ya que sólo *ciertos* promedios conjuntos, principalmente aquellos de la ecuación (6-15), se deben satisfacer para una estacionalidad en sentido amplio.[2] Como indica la ecuación (6-15), la media y las funciones de autocorrelación de un proceso estacionario en sentido amplio no cambian con un desplazamiento en el origen del tiempo. Esto implica que los elementos del circuito asociado que generan al proceso aleatorio estacionario en el sentido amplio no se corren (o se deterioran) con el tiempo.

La función de autocorrelación proporciona una idea de la respuesta en frecuencia asociada con el proceso aleatorio. Por ejemplo, si $R_x(\tau)$ permanece relativamente constante conforme se aumenta τ de cero a cierto número positivo, entonces, en promedio, los valores muestra de x tomados a $t = t_1$ y $t = t_1 + \tau$ son casi idénticos. En consecuencia, $x(t)$ no cambia rápidamente con el tiempo (en promedio) y se espera que tenga bajas frecuencias. Por otra parte, si $R_x(\tau)$ disminuye rápidamente conforme τ aumenta, se espera que $x(t)$ cambie rápidamente con el tiempo y, por tanto, se presentarán altas frecuencias. En la sección 6-2 se formula este resultado rigurosamente, donde se mostrará que la densidad espectral de potencia, PS, la cual es una función de frecuencia, es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación.

Las propiedades de la función de autocorrelación de un proceso estacionario real en sentido amplio son las siguientes:

$$1.\ R_x(0) = \overline{x^2(t)} = \text{segundo momento} \tag{6–16}$$

$$2.\ R_x(\tau) = R_x(-\tau) \tag{6–17}$$

$$3.\ R_x(0) \geq |R_x(\tau)| \tag{6–18}$$

[1] El tipo de promedio de tiempo de la función de autocorrelación se definió en el capítulo 2. La función de autocorrelación del promedio de tiempo, la ecuación (2–68), es idéntica a la función de autocorrelación del promedio conjunto, ecuación (6-14), cuando el proceso es ergódico.

[2] Existe una excepción para el proceso gaussiano aleatorio, donde la estacionalidad en sentido amplio sí implica que el proceso es estacionario en sentido estricto, ya que la PDF gaussiana de $N \to \infty$ dimensiones se especifica completamente por la media, varianza y covarianza de $x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_N)$.

Las primeras dos propiedades provienen directamente de la definición de $R_x(\tau)$, como se obtiene de la ecuación (6–14). Aún más, si $x(t)$ es ergódico, entonces $R(0)$ es idéntico al cuadrado del valor RMS de $x(t)$. La propiedad 3 se demuestra como sigue: $[x(t) \pm x(t+\tau)]^2$ es una cantidad no negativa, tal que

$$\overline{[x(t) \pm x(t+\tau)]^2} \geq 0$$

o

$$\overline{x^2(t)} \pm \overline{2x(t)x(t+\tau)} + \overline{x^2(t+\tau)} \geq 0$$

Esta ecuación es equivalente a

$$R_x(0) \pm 2R(\tau) + R(0) \geq 0$$

la cual se reduce a la propiedad 3.

La autocorrelación puede generalizarse para definir una función de correlación apropiada para dos procesos aleatorios.

Definición. La *función de correlación cruzada* para dos procesos reales $x(t)$ y $y(t)$ es

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)y(t_2)} \tag{6–19}$$

Además, si $x(t)$ y $y(t)$ son conjuntamente estacionarios,[3] la función de correlación cruzada se convierte en

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(\tau)$$

donde $\tau = t_2 - t_1$.

Algunas *propiedades* de las funciones de correlación cruzada de procesos reales conjuntamente estacionarios son

$$1.\ R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau) \tag{6–20}$$

$$2.\ |R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{R_x(0)R_y(0)} \tag{6–21}$$

y

$$3.\ |R_{xy}(\tau)| \leq \tfrac{1}{2}[R_x(0) + R_y(0)] \tag{6–22}$$

La primera propiedad proviene directamente de la definición, la ecuación (6–19). La propiedad 2 proviene del hecho de que

$$\overline{[x(t) + Ky(t+\tau)]^2} \geq 0 \tag{6–23}$$

para cualquier constante real K. Expandiendo la ecuación (6–23) se obtiene una ecuación que es una cuadrática en K:

[3] De manera similar a la definición de la ecuación (6–3), se dice que $x(t)$ y $y(t)$ son conjuntamente estacionarios cuando

$$f_{xy}(x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_N), y(t_{N+1}), y(t_{N+2}), \ldots, y(t_{N+M})) = f_{xy}(x(t_1+t_0), x(t_2+t_0), \ldots, x(t_N+t_0), y(t_{N+1}+t_0), y(t_{N\pm2}+t_0), \ldots, y(t_{N\pm M}+t_0))$$

$x(t)$ y $y(t)$ son conjuntamente estacionarios en sentido estricto si esta igualdad se mantiene para $N \to \infty$ y $M \to \infty$ y son conjuntamente estacionarios en sentido amplio para $N = 2$ y $M = 2$.

$$[R_y(0)]K^2 + [2R_{xy}(\tau)]K + [R_x(0)] \geq 0 \tag{6–24}$$

Para que K sea real se puede mostrar que el discriminante de la ecuación (6–24) tiene que ser no positivo.[4] Esto es,

$$[2R_{xy}(\tau)]^2 - 4[R_y(0)][R_x(0)] \leq 0 \tag{6–25}$$

Lo que es equivalente a la propiedad 2, como se describe en la ecuación (6–21). La propiedad 3 proviene directamente de la ecuación (6–24), donde $K = \pm 1$. Además,

$$|R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{R_x(0)R_y(0)} \leq \tfrac{1}{2}[R_x(0) + R_y(0)] \tag{6–26}$$

debido a que la media geométrica de dos números positivos $R_x(0)$ y $R_y(0)$ no excede su media aritmética.

Note que la función de correlación cruzada de dos procesos aleatorios $x(t)$ y $y(t)$ es una generalización del concepto de la media conjunta de dos variables aleatorias definido por la ecuación (B-91). En este caso x_1 se reemplaza con $x(t)$ y x_2 con $y(t + \tau)$. Por lo tanto, dos procesos aleatorios $x(t)$ y $y(t)$ existen *sin correlación* si

$$R_{xy}(\tau) = [\overline{x(t)}][\overline{y(t + \tau)}] = m_x m_y \tag{6–27}$$

para todos los valores de τ. De la misma manera, dos procesos aleatorios $x(t)$ y $y(t)$ son *ortogonales* si

$$R_{xy}(\tau) = 0 \tag{6–28}$$

para todos los valores de τ.

Como se mencionó previamente, si $y(t) = x(t)$, la función de correlación cruzada se convierte en una de autocorrelación. En este sentido, la segunda es un caso especial de la primera. Por supuesto que cuando $y(t) \equiv x(t)$ todas las propiedades de la función de correlación cruzada se reducen a aquellas de la función de autocorrelación.

Si los procesos aleatorios $x(t)$ y $y(t)$ son conjuntamente ergódicos, el promedio de tiempo se puede utilizar para reemplazar el promedio conjunto. Para las funciones de correlación esto se convierte en

$$R_{xy}(\tau) \triangleq \overline{x(t)y(t + \tau)} \equiv \langle x(t)y(t + \tau)\rangle \tag{6–29}$$

donde

$$\langle[\cdot]\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [\cdot]\, dt \tag{6–30}$$

donde $x(t)$ y $y(t)$ son conjuntamente ergódicos. En este caso, las funciones de correlación cruzada y de autocorrelación de las formas de onda de voltaje o de corriente pueden medirse mediante un circuito electrónico que consiste en una línea de retraso, un multiplicador y un integrador. La técnica de medición se ilustra en la figura 6-3.

Procesos aleatorios complejos

En capítulos anteriores se encontró que la envolvente compleja $g(t)$ es de gran utilidad en la descripción de formas de onda pasabanda. Las señales pasabanda *aleatorias* y el ruido pueden también

[4] El parámetro K es una raíz de este valor cuadrático sólo cuando dicho valor es igual a cero. Cuando éste es positivo, las raíces deben ser complejas.

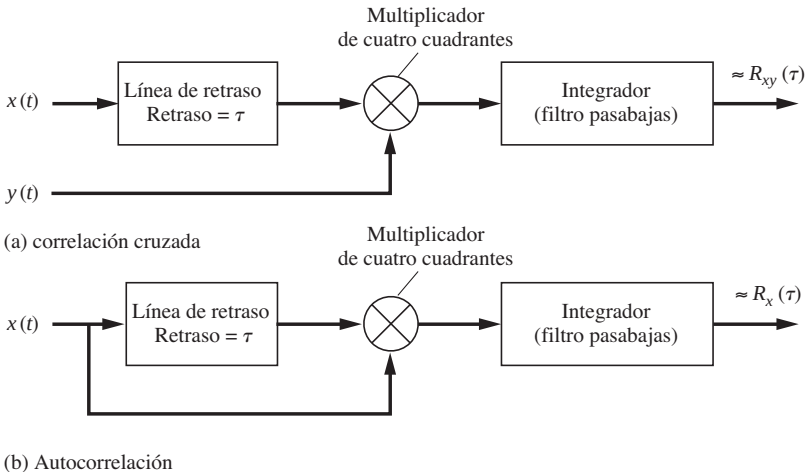


Figura 6–3 Medición de las funciones de correlación.

describirse en términos de la envolvente compleja, donde $g(t)$ es un *proceso aleatorio* de banda base *complejo*.

DEFINICIÓN. Un *proceso aleatorio complejo* es

$$g(t) \triangleq x(t) + jy(t) \tag{6–31}$$

donde $x(t)$ y $y(t)$ son procesos aleatorios reales y $j = \sqrt{-1}$.

Un proceso complejo es estacionario en sentido estricto si $x(t)$ y $y(t)$ son conjuntamente estacionarios en sentido estricto□es decir,

$$f_g(x(t_1), y(t_1'), x(t_2), y(t_2'), \ldots, x(t_N), y(t_N')) = f_g(x(t_1 + t_0), y(t_1' + t_0), \ldots, x(t_N + t_0), y(t_N' + t_0)) \tag{6–32}$$

para cualquier valor de t_0 y cualquier $N \to \infty$.

Las definiciones de las funciones de correlación pueden generalizarse para cubrir procesos aleatorios *complejos*.

DEFINICIÓN. La *función de autocorrelación* para un proceso aleatorio *complejo* es

$$R_g(t_1, t_2) = \overline{g^*(t_1) g(t_2)} \tag{6–33}$$

donde el asterisco denota al conjugado complejo.

Aún más, el proceso aleatorio complejo es estacionario en el sentido amplio si $\overline{g(t)}$ es una constante compleja y $R_g(t_1, t_2) = R_g(\tau)$, donde $\tau = t_2 - t_1$. La autocorrelación de un proceso complejo estacionario en sentido amplio posee la propiedad de simetría hermitiana

$$R_g(-\tau) = R_g^*(\tau) \tag{6–34}$$

DEFINICIÓN. La *función de correlación cruzada* para dos procesos aleatorios *complejos* $g_1(t)$ y $g_2(t)$ es

$$R_{g_1 g_2}(t_1, t_2) = \overline{g_1^*(t_1) g_2(t_2)} \tag{6–35}$$

Cuando los procesos aleatorios complejos son conjuntamente estacionarios en sentido amplio, la función de correlación cruzada se convierte en

$$R_{g_1g_2}(t_1, t_2) = R_{g_1g_2}(\tau)$$

donde $\tau = t_2 - t_1$.

En la sección 6–7 se utilizarán estas definiciones en la descripción estadística de las señales aleatorias pasabanda y del ruido.

6–2 DENSIDAD ESPECTRAL DE POTENCIA

Definición

En el capítulo 2 se definió la PSD $\mathcal{P}_x(f)$ para el caso de las formas de onda deterministas mediante la ecuación (2–66). En esta sección se desarrolla una definición más genérica aplicable al análisis espectral de procesos aleatorios.

Suponga que $x(t, E_i)$ representa una función muestral de un proceso aleatorio $x(t)$. Se puede definir una versión truncada de dicha función de acuerdo con la fórmula

$$x_T(t, E_i) = \begin{cases} x(t, E_i), & |t| < \frac{1}{2}T \\ 0, & t \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{6–36}$$

donde el subíndice T representa la versión truncada. La transformada de Fourier correspondiente es

$$\begin{aligned} X_T(f, E_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t, E_i)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} x(t, E_i)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \end{aligned} \tag{6–37}$$

la cual indica que X_T es un proceso aleatorio, ya que x_T también lo es. A continuación se simplifica la notación y se determinan estas funciones simplemente con $X_T(f)$, $x_T(t)$ y $x(t)$, ya que es obvio que todas ellas son procesos aleatorios.

La energía normalizada[5] en el intervalo de tiempo $(-T/2, T/2)$ es

$$E_T = \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2\, df \tag{6–38}$$

En este caso se utilizó el teorema de Parseval para obtener la segunda integral. E_T es una variable aleatoria debido a que $x(t)$ es un proceso aleatorio. Aún más, la media de la energía normalizada se obtiene tomando el promedio conjunto de la ecuación (6–38):

$$\bar{E}_T = \int_{-T/2}^{T/2} \overline{x^2(t)}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x_T^2(t)}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{|X_T(f)|^2}\, df \tag{6–39}$$

[5] Si $x(t)$ es una forma de onda de voltaje o de corriente, E_T es la energía en una base normalizada de ohm por ohm (es decir, $R = 1$).

La potencia promedio normalizada es la energía consumida por unidad de tiempo, de tal forma que la potencia promedio normalizada es

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \overline{x^2(t)}\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x_T^2(t)}\, dt$$

o

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \overline{|X_T(f)|^2} \right] df = \overline{x^2(t)} \tag{6–40}$$

En cuanto a la evaluación del límite en la ecuación (6–40) es importante calcular el promedio conjunto *antes* de llevar a cabo la operación de límite debido a que se desea asegurar que el valor de $X_T(f)$ sea finito. [El valor de $X(f) = \lim_{T\to\infty} X_T(f)$ puede no existir porque $x(t)$ es una señal de potencia.] Note que la ecuación (6–40) indica que, para un proceso aleatorio, la potencia promedio normalizada se obtiene a partir del promedio de tiempo del segundo momento. Por supuesto que si $x(t)$ es estacionario en sentido amplio resulta que $\langle \overline{x^2(t)} \rangle = \overline{x^2(t)}$ ya que $\overline{x^2(t)}$ es una constante.

A partir de la definición de la PSD en el capítulo 2 se sabe que

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(f)\, df \tag{6–41}$$

Por lo tanto, se puede observar que la siguiente definición de la PSD es consistente con aquella dada por la ecuación (2–66) en dicho capítulo.

DEFINICIÓN. La *densidad espectral de potencia* (PSD) para un proceso aleatorio $x(t)$ se obtiene de

$$\mathcal{P}_x(f) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{\overline{[|X_T(f)|^2]}}{T} \right) \tag{6–42}$$

donde

$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt \tag{6–43}$$

Teorema de Wiener-Khintchine

La PSD a menudo se evalúa a partir de la función de autocorrelación para el proceso aleatorio utilizando el siguiente teorema.

TEOREMA DE WIENER-KHINTCHINE[6] *Cuando $x(t)$ es un proceso estacionario en sentido amplio, la PSD puede obtenerse mediante la transformada de Fourier de la función de autocorrelación:*

$$\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau \tag{6–44}$$

[6] Así llamado en honor a dos matemáticos: el estadounidense Norbert Wiener (1894–1964), y el alemán A. I. Khintchine (1894–1959). El apellido alemán también puede escribirse como Khinchine o Khinchin.

De la misma manera,

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{P}_x(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, df \tag{6–45}$$

siempre y cuando $R(\tau)$ llegue a ser lo suficientemente pequeño para valores grandes de τ, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tau R(\tau)|\, d\tau < \infty \tag{6–46}$$

Este teorema también es válido para un proceso no estacionario, *siempre y cuando* se reemplace $R_x(\tau)$ con $\langle R_x(t, t+\tau)\rangle$.

Demostración. De la definición de la PSD,

$$\mathcal{P}_x(f) = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{\overline{|X_T(f)|^2}}{T} \right)$$

donde

$$\begin{aligned} \overline{|X_T(f)|^2} &= \overline{\left| \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega t}\, dt \right|^2} \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \overline{x(t_1)\, x(t_2)} e^{-j\omega t_1} e^{j\omega t_2}\, dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

y se asume que $x(t)$ es real. Pero $\overline{x(t_1)\, x(t_2)} = R_x(t_1, t_2)$. Aún más, sea $\tau = t_2 - t_1$, y haga un cambio de variable de t_2 a $\tau + t_1$. Entonces

$$\overline{|X_T(f)|^2} = \int_{t_1=-T/2}^{t_1=T/2} \underbrace{\left[\int_{\tau=-T/2-t_1}^{\tau=T/2-t_1} R_x(t_1,\ t_1+\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau \right]}_{①} dt_1 \tag{6–47}$$

El área de esta integración bidimensional se muestra en la figura 6–4, donde ① representa el área cubierta por el producto de la integral interior y la derivada del ancho dt_1. Para facilitar la evaluación de esta integral bidimensional se intercambia el orden de la integración. Como se muestra en la figura, esto se puede llevar a cabo al cubrir el área total empleando ② cuando $\tau < 0$ y ③ cuando $\tau \geq 0$. Por lo tanto la ecuación (6–47) se convierte en

$$\begin{aligned} \overline{|X_T(f)|^2} = &\int_{-T}^{0} \underbrace{\left[\int_{t_1=-T/2-\tau}^{t_1=T/2} R_x(t_1, t_1+\tau) e^{-j\omega\tau}\, dt_1 \right]}_{②} d\tau \\ &+ \int_{0}^{T} \underbrace{\left[\int_{t_1=-T/2}^{t_1=T/2-\tau} R_x(t_1, t_1+\tau) e^{-j\omega\tau}\, dt_1 \right]}_{③} d\tau \end{aligned} \tag{6–48}$$

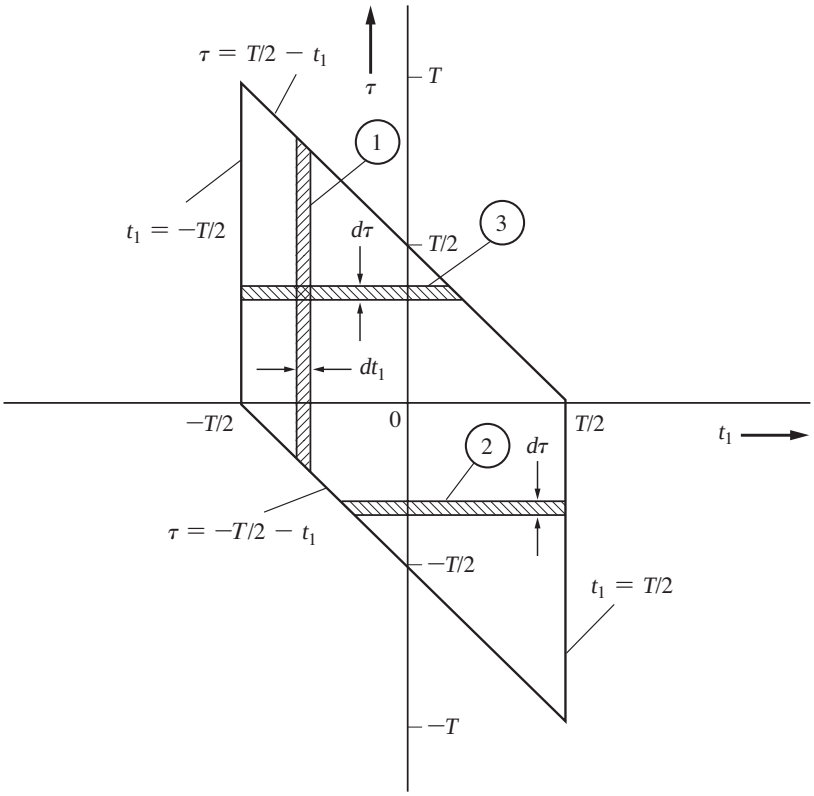


Figura 6–4 Región de integración para las ecuaciones (6–47) y (6–48).

Ahora suponga que $x(t)$ es estacionario, de tal forma que $R_x(t_1, t_1 + \tau) = R_x(\tau)$, y factorice $R_x(\tau)$ fuera de la integral interior. Entonces

$$\overline{|X_T(f)|^2} = \int_{-T}^{0} R_x(\tau)\, e^{-j\omega\tau} \left[t_1 \Big|_{-T/2-\tau}^{T/2} \right] d\tau + \int_{0}^{T} R(\tau)\, e^{-j\omega\tau} \left[t_1 \Big|_{-T/2}^{T/2-\tau} \right] d\tau$$

$$= \int_{-T}^{0} (T+\tau) R_x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau + \int_{0}^{T} (T-\tau) R_x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

Esta ecuación puede reescribirse de manera más compacta como

$$\overline{|X_T(f)|^2} = \int_{-T}^{T} (T - |\tau|) R_x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \tag{6–49}$$

Al sustituir la ecuación (6-49) dentro de la ecuación (6-42) se obtiene que

$$\mathcal{P}_x(f) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \left(\frac{T-|\tau|}{T}\right) R_x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \tag{6–50a}$$

o

$$\mathcal{P}_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\, e^{j\omega\tau}\, d\tau - \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{|\tau|}{T} R_x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \tag{6–50b}$$

Con la suposición planteada en la ecuación (6-46) se observa que la integral del lado derecho es igual a cero, y la ecuación (6-50b) se reduce a la (6-44), con lo que se demuestra el teorema. La relación inversa se obtiene directamente de las propiedades de la transformada de Fourier. Aún más, si $x(t)$ no es estacionario se puede todavía obtener la ecuación (6-44) si se sustituye $R_x(t_1, t_1 + \tau)$ en la ecuación (6-48) con $\langle R_x(t_1, t_1 + \tau)\rangle = R_x(\tau)$.

Si se compara la definición de la PSD con los resultados del teorema de Wiener–Khintchine se ve que existen dos métodos distintos para evaluar la PSD de un proceso aleatorio:

1. La PSD se obtiene con el *método directo* a través de la evaluación de la definición dada por la ecuación (6-42).
2. La PSD se obtiene empleando el *método indirecto* a través de la evaluación de la transformada de Fourier de $R_x(\tau)$, donde primero se debe obtener el $R_x(\tau)$.

Ambos métodos se demostrarán en el ejemplo 6-3.

Propiedades de la PSD

Algunas propiedades de la PSD son:

1. $\mathcal{P}_x(f)$ siempre es real. (6–51)
2. $\mathcal{P}_x(f) \geq 0$. (6–52)
3. Cuando $x(t)$ es real, $\mathcal{P}_x(-f) = \mathcal{P}_x(f)$. (6–53)
4. $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f)\, df = P =$ potencia normalizada total. (6–54a)
   Cuando $x(t)$ es estacionario en sentido amplio,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f)\, df = P = \overline{x^2} = R_x(0) \tag{6–54b}$$

5. $\mathcal{P}_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\, d\tau$. (6–55)

Estas propiedades se obtienen directamente de la definición de PSD y del teorema de Wiener–Khintchine.

Ejemplo 6–3 EVALUACIÓN DE LA PSD PARA UNA SEÑAL DE BANDA BASE POLAR

Sea $x(t)$ una señal polar con datos aleatorios binarios. Una función muestral para esta señal se ilustra en la figura 6–5a. Suponga que los datos son independientes de bit a bit y que la probabilidad de obtener un valor binario de 1 durante cualquier intervalo de bit es de $\frac{1}{2}$. Obtenga la PSD de $x(t)$.

La señal polar se puede modelar mediante

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f(t - nT_b) \tag{6–56}$$

donde $f(t)$ es la forma de pulso de señalización, como se muestra en la figura 6–5b, y T_b es la duración de un bit. $\{a_n\}$ es un conjunto de variables aleatorias que representan a los datos binarios. Suponga que las variables aleatorias son independientes. Es claro que cada una está distribuida en forma discreta con referencia a $a_n = \pm 1$ y $P(a_n = 1) = P(a_n = -1) = \frac{1}{2}$, como se indica en la descripción del problema.

La PSD para $x(t)$ se evaluará primero utilizando el método 1, el cual requiere que se obtenga $X_T(f)$. Se puede llegar a $x_T(t)$ truncando la ecuación (6-56). Esto es,

$$x_T(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} a_n f(t - nT_b)$$

donde $T/2 = (N + \frac{1}{2})T_b$. Entonces

$$X_T(f) = \mathcal{F}[x_T(t)] = \sum_{n=-N}^{N} a_n \mathcal{F}[f(t - nT_b)] = \sum_{n=-N}^{N} a_n F(f) e^{-j\omega n T_b}$$

o

$$X_T(f) = F(f) \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{-j\omega n T_b} \tag{6–57}$$

donde $F(f) = \mathcal{F}[f(t)]$. Cuando se sustituye la ecuación (6–57) dentro de la ecuación (6–42) se encuentra que la PSD es

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x(f) &= \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} |F(f)|^2 \overline{\left| \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{-j\omega n T_b} \right|^2} \right) \\ &= |F(f)|^2 \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} \overline{a_n a_m} e^{j(m-n)\omega T_b} \right) \end{aligned} \tag{6–58}$$

A continuación se requiere evaluar el promedio $\overline{a_n a_m}$ para el caso de señalización polar $(a_n = \pm 1)$. Se tiene que

$$\overline{a_n a_m} = \begin{cases} \overline{a_n^2}, & n = m \\ \overline{a_n}\,\overline{a_m}, & n \neq m \end{cases}$$

donde $\overline{a_n a_m} = \overline{a_n}\,\overline{a_m}$ para $n \neq m$, ya que a_n y a_m son independientes. Ocupando la distribución discreta para a_n se tiene que

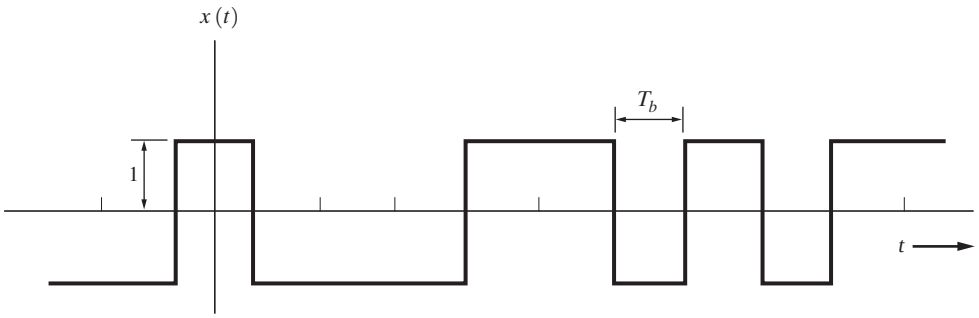
$$\overline{a_n} = (+1)\tfrac{1}{2} + (-1)\tfrac{1}{2} = 0$$

De manera similar, $\overline{a_m} = 0$. Además de que

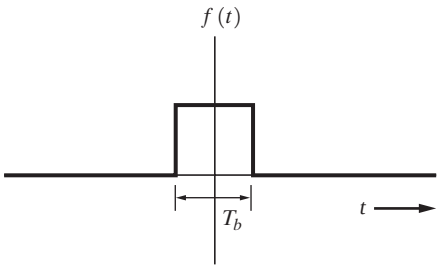
$$\overline{a_n^2} = (+1)^2(\tfrac{1}{2}) + (-1)^2(\tfrac{1}{2}) = 1$$

Por tanto,

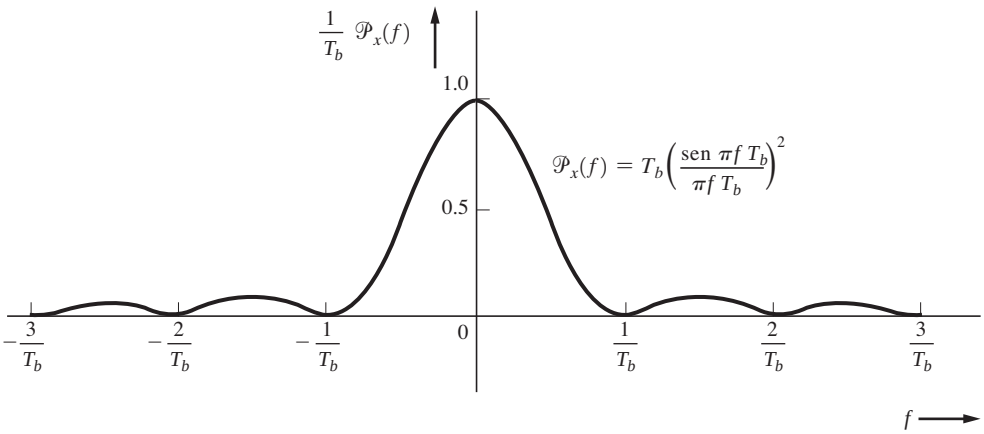
$$\overline{a_n a_m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \tag{6–59}$$



(a) Señal polar



(b) Forma de pulso de señalización



(c) Densidad espectral de potencia de una señal polar

Figura 6–5 Señal polar aleatoria y su PSD.

Con este resultado, la ecuación (6–58) se convierte en

$$\mathcal{P}_x(f) = |F(f)|^2 \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} 1\right)$$

y, con $T = 2(N + \frac{1}{2})T_b$,

$$\mathcal{P}_x(f) = |F(f)|^2 \lim_{N\to\infty}\left[\frac{2N+1}{(2N+1)T_b}\right]$$

o

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{1}{T_b}|F(f)|^2 \qquad \text{(señalización polar)} \tag{6–60}$$

Para la forma de pulso rectangular que se muestra en la figura 6–5b,

$$F(f) = T_b\left(\frac{\operatorname{sen}\pi f T_b}{\pi f T_b}\right) \tag{6–61}$$

Por lo tanto, la PSD para una señal polar con una forma de pulso rectangular es

$$\mathcal{P}_x(f) = T_b\left(\frac{\operatorname{sen}\pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2 \tag{6–62}$$

Esta PSD se grafica en la figura 6–5c.[7] El ancho de banda nulo es $B = 1/T_b = R$, donde R es la velocidad de bit. Note que la ecuación (6–62) satisface las propiedades para una función de PSD que se mencionaron previamente.

A continuación se empleará el método 2 para evaluar la PSD de la señal polar. Esto implica el cálculo de la función de autocorrelación y la evaluación posterior de la transformada de Fourier de $R_x(\tau)$ para obtener la PSD. Cuando se emplea la ecuación 6-56, la autocorrelación es

$$\begin{aligned} R_x(t, t+\tau) &= \overline{x(t)x(t+\tau)} \\ &= \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f(t - nT_b) \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m f(t+\tau - mT_b)} \\ &= \sum_n \sum_m \overline{a_n a_m} f(t-nT_b) f(t+\tau-mT_b) \end{aligned}$$

□ si se usa la ecuación (6-59), lo anterior se reduce a

$$R_x(t, t+\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT_b) f(t+\tau-nT_b) \tag{6–63}$$

Por supuesto que $x(t)$ *no* es un proceso estacionario en sentido amplio, ya que la función de autocorrelación depende del tiempo absoluto t. Para reducir la ecuación (6–63) se requiere designar un tipo en particular de forma de pulso. Suponga, una vez más, que se tiene una forma de pulso rectangular

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le T_b/2 \\ 0, & t \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Entonces el producto del pulso se convierte en

$$f(t-nT_b)f(t+\tau-nT_b) = \begin{cases} 1, & \text{si } |t - nT_b| \le T_b/2 \text{ y } |t+\tau-nT_b| \le T_b/2 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Si se trabaja con las desigualdades se obtiene un producto igual a la unidad sólo cuando

$$(n-\tfrac{1}{2})T_b \le t \le (n+\tfrac{1}{2})T_b$$

[7] La PSD de esta señal polar es puramente continua, pues se asume que los pulsos positivos y negativos poseen la misma amplitud.

y

$$(n-\tfrac{1}{2})T_b-\tau \le t \le (n+\tfrac{1}{2})T_b-\tau$$

Suponga que $\tau \ge 0$. Entonces se tendrá un producto igual a la unidad cuando

$$(n-\tfrac{1}{2})T_b \le t \le (n+\tfrac{1}{2})T_b-\tau$$

siempre y cuando sea $\tau \le T_b$. Por lo tanto, para $0 \le \tau \le T_b$,

$$R_x(t, t+\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{ll} 1, & (n-\frac{1}{2})T_b \le t \le (n+\frac{1}{2})T_b - \tau \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{array} \right\} \tag{6–64}$$

Se sabe que el teorema de Wiener–Khintchine es válido para procesos no estacionarios si $R_x(\tau) = \langle R_x(t, t+\tau)\rangle$. Utilizando la ecuación (6–64) se tiene que

$$R_x(\tau) = \langle R_x(t, t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{ll} 1, & (n-\frac{1}{2})T_b \le t \le (n+\frac{1}{2})T_b - \tau \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{array} \right\} dt$$

o

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} \left(\int_{(n+1/2)T_b}^{(n+1/2)T_b-\tau} 1 \; dt \right)$$

donde $T/2 = (N-\frac{1}{2})T_b$. Esto se reduce a

$$R_x(\tau) = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{1}{(2N+1)T_b} (2N+1) \left\{ \begin{array}{ll} (T_b-\tau), & 0 \le \tau \le T_b \\ 0, & \tau > T_b \end{array} \right\} \right]$$

o

$$R_x(\tau) = \begin{cases} \dfrac{T_b-\tau}{T_b}, & 0 \le \tau \le T_b \\ 0, & \tau > T_b \end{cases} \tag{6–65}$$

Se pueden obtener resultados similares para $\tau < 0$. Sin embargo, se sabe que $R_x(-\tau) = R_x(\tau)$, así que la ecuación (6–65) se generaliza para todos los valores de τ. Por lo tanto,

$$R_x(\tau) = \begin{cases} \dfrac{T_b-|\tau|}{T_b}, & |\tau| \le T_b \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{6–66}$$

lo cual muestra que $R_x(\tau)$ tiene una forma triangular. Si se evalúa la transformada de Fourier de la ecuación (6–66) se obtiene la PSD para la señal polar con una forma de bit rectangular:

$$\mathcal{P}_x(f) = T_b \left(\frac{\operatorname{sen} \pi f T_b}{\pi f T_b} \right)^2 \tag{6–67}$$

Este resultado, que se obtiene con el método 2, es idéntico a la ecuación (6–62) que se obtuvo mediante el método 1.

Fórmula general para la PSD de señales digitales

A continuación se derivará una fórmula general para la PSD de señales digitales. Las fórmulas para la PSD en el ejemplo 6–3 sólo son válidas para una señalización polar con $a_n = \pm 1$ y si no existe

correlación entre los bits. Se puede obtener un resultado más general en términos de la autocorrelación de los datos, a_n, si se inicia con la ecuación (6–56). Como se ilustra en las figuras 3–12 y 3–14, los datos pueden ser binarios o multinivel. La duración (ancho) del pulso de símbolo $f(t)$ es T_s. Para el caso de datos binarios, $T_s = T_b$, donde T_b es la duración de 1 bit. La autocorrelación de los datos se define mediante

$$R(k) = \overline{a_n a_{n+k}} \tag{6–68}$$

A continuación se cambia el índice en la ecuación (6–58) de tal forma que $m = n + k$. Entonces, empleando la ecuación (6-68) y suponiendo que $T = (2N + 1)T_s$, la ecuación (6–58) se convierte en

$$\mathcal{P}_x(f) = |F(f)|^2 \lim_{N\to\infty} \left[\frac{1}{(2N+1)T_s} \sum_{n=-N}^{n=N} \sum_{k=-N-n}^{k=N-n} R(k) e^{jk\omega T_s} \right]$$

Si se reemplaza la suma exterior sobre el índice n con el término $2N + 1$, se obtiene la siguiente expresión. [Este procedimiento no es estrictamente correcto, ya que la suma interna es también una función de n. El procedimiento correcto sería intercambiar el orden de las sumas, de manera similar a la que se usó en las ecuaciones (6-47) a (6-50), donde se intercambió el orden de la integración. El resultado sería el mismo que el obtenido a continuación, cuando el límite se evalúa como $N \to \infty$.]

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_x(f) &= \frac{|F(f)|^2}{T_s} \lim_{N\to\infty} \left[\frac{(2N+1)}{(2N+1)} \sum_{k=-N-n}^{k=N-n} R(k) e^{jk\omega T_s} \right] \\
&= \frac{|F(f)|^2}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} R(k) e^{jk\omega T_s} \\
&= \frac{|F(f)|^2}{T_s} \left[R(0) + \sum_{k=-\infty}^{-1} R(k) e^{jk\omega T_s} + \sum_{k=1}^{\infty} R(k) e^{jk\omega T_s} \right]
\end{aligned}$$

o

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s} \left[R(0) + \sum_{k=1}^{\infty} R(-k) e^{-jk\omega T_s} + \sum_{k=1}^{\infty} R(k) e^{jk\omega T_s} \right] \tag{6–69}$$

Sin embargo, debido a que $R(k)$ es una función de autocorrelación, resulta que $R(-k) = R(k)$, y la ecuación (6–69) se convierte en

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s} \left[R(0) + \sum_{k=1}^{\infty} R(k)(e^{jk\omega T_s} + e^{-jk\omega T_s}) \right]$$

Resumiendo, la expresión general para la PSD de una señal digital es

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s} \left[R(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} R(k) \cos(2\pi k f T_s) \right] \tag{6–70a}$$

Una expresión equivalente es

$$\boxed{\mathcal{P}_x(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} R(k) e^{jk\omega T_s} \right]} \tag{6–70b}$$

donde la autocorrelación de los datos es

$$R(k) = \overline{a_n a_{n+k}} = \sum_{i=1}^{I} (a_n a_{n+k})_i P_i \tag{6–70c}$$

donde P_i es la probabilidad de obtener el producto $(a_n a_{n+k})_i$, de los cuales existen I valores posibles. $F(f)$ es el espectro de la forma de pulso del símbolo digital.

Note que la cantidad dentro de los corchetes cerrados en la ecuación (6–70b) es parecida a la transformada de Fourier discreta (DFT) de la función de autocorrelación de los datos $R(k)$, excepto que la variable de frecuencia ω es continua. Por lo tanto, la PSD de la señal digital de banda base se ve influenciada *tanto por* el "espectro" de los datos como por el espectro de la forma de pulso empleada para el código de línea. Aún más, el espectro *puede* también contener funciones deltas si la media de los datos, $\bar{a}_n$, es diferente de cero. Para demostrar este resultado se asume primero que los símbolos de datos no están correlacionados, es decir,

$$R(k) = \begin{Bmatrix} \overline{a_n^2}, & k = 0 \\ \overline{a_n}\,\overline{a_{n+k}}, & k \neq 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_a^2 + m_a^2, & k = 0 \\ m_a^2, & k \neq 0 \end{Bmatrix}$$

donde, como se define en el apéndice B, la media y la varianza para los datos son $m_a = \bar{a}_n$ y $\sigma_a^2 = \overline{(a_n - m_a)^2} = \overline{a_n^2} - m_a^2$. Si se sustituye la ecuación anterior para $R(k)$ en la ecuación (6–70b) se tiene que

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s}\left[\sigma_a^2 + m_a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega T_s}\right]$$

A partir de la ecuación (2–115), la fórmula de la suma de Poisson, se obtiene

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\pm jk\omega T_s} = D \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nD)$$

donde $D = 1/T_s$ es la velocidad en bauds. Se puede observar que la PSD se convierte entonces en

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s}\left[\sigma_a^2 + m_a^2 D \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nD)\right]$$

Por lo tanto, para datos no correlacionados, la PSD de la señal digital es

$$\mathcal{P}_x(f) = \underbrace{\sigma_a^2\ D\,|F(f)|^2}_{\text{Espectro continuo}} + \underbrace{(m_a D)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(nD)|^2 \delta(f - nD)}_{\text{Espectro discreto}} \tag{6–70d}$$

Para el caso general en donde existe correlación entre los datos, sea la función de autocorrelación de los datos $R(k)$ expresada en términos de la función de autocorrelación de los *datos normalizados* $\rho(k)$. Es decir, sea un término $\tilde{a}_n$ que represente a los datos correspondientes que se han normalizado para que tengan una varianza igual a la unidad y una media igual a cero. Entonces,

$$a_n = \sigma_a \tilde{a}_n + m_a$$

y, por consecuencia,

$$R(k) = \sigma_a^2\ \rho(k) + m_a^2$$

donde

$$\rho(k) = \overline{[\tilde{a}_n \tilde{a}_{n+k}]}$$

Sustituyendo esta expresión para $R(k)$ en la ecuación (6–70b) y ocupando $R(-k) = R(k)$ se tiene que

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{|F(f)|^2}{T_s}\left[\sigma_a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k)e^{-jk\omega T_s} + m_a^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk\omega T_s}\right]$$

Por lo tanto, para el caso general de datos correlacionados, la PSD de la señal digital es

$$\mathcal{P}_x(f) = \underbrace{\sigma_a^2\ D|F(f)|^2\ \mathcal{W}_\rho(f)}_{\text{Espectro continuo}} + \underbrace{(m_a D)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(nD)|^2 \delta(f-nD)}_{\text{Espectro discreto}} \tag{6–70e}$$

donde

$$\mathcal{W}_\rho(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k)\, e^{-j2\pi kfT_s} \tag{6–70f}$$

es una función del peso espectral que se obtiene a partir de la transformada de Fourier del tren de impulsos de autocorrelación normalizado

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k)\delta(\tau - kT_s)$$

Esto demuestra que la PSD de la señal digital consiste en un espectro continuo que depende del espectro de la forma de pulso $F(f)$ y de la correlación de los datos. Aún más, si $m_a \neq 0$ y $F(nD) \neq 0$, la PSD también contendrá líneas espectrales (funciones delta) separadas en armónicos de la tasa en bauds D.

La sección 3-5 presenta ejemplos de la aplicación de estos resultados, donde se evalúa la PSD para los códigos de línea unipolar RZ, bipolar y de Manchester (consulte la figura 3-16 para un gráfico de las PSD para estos códigos). En las secciones 5-9 y 5-10 se presentan ejemplos de señalización digital pasabanda, como para OOK, BPSK, QPSK, MPSK y QAM.

Procesos de ruido blanco

DEFINICIÓN. Se dice que un proceso aleatorio $x(t)$ es un *proceso de ruido blanco* si la PSD es constante sobre todas las frecuencias□es decir,

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{N_0}{2} \tag{6–71}$$

donde N_0 es una constante positiva.

La función de autocorrelación para el proceso de ruido blanco se obtiene tomando la transformada de Fourier inversa de la ecuación (6-71). El resultado es

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2}\,\delta(\tau) \tag{6–72a}$$

Por ejemplo, el proceso de ruido térmico que se describe en la sección 8-6 puede considerarse como un proceso de ruido blanco sobre la banda operativa donde

$$N_0 = kT \tag{6–72b}$$

El ruido térmico también cuenta con una distribución gaussiana. Por supuesto que también es posible encontrar ruido blanco con otras distribuciones.

Medición de la PSD

La PSD puede medirse haciendo uso de técnicas analógicas o digitales. En cualquier caso, la medida sólo puede aproximarse a una verdadera PSD, debido a que la medición sólo puede llevarse a cabo sobre un intervalo de tiempo finito en lugar de un intervalo infinito, como lo especifica la ecuación (6-42).

Técnicas analógicas. Las técnicas analógicas de medición consisten en el uso de un banco de filtros pasabanda de banda angosta en paralelo con características pasabanda contiguas, o en el empleo de un solo filtro pasabanda con una frecuencia central que puede sintonizarse. En el caso del banco de filtros, la forma de onda se alimenta simultáneamente a las entradas de todos los filtros y se evalúa la potencia en la salida de cada filtro. Las potencias de salida se dividen (escalan) entre el ancho de banda efectivo del filtro correspondiente para obtener una aproximación de la PSD. Es decir, la PSD se evalúa para los puntos de frecuencia correspondientes a las frecuencias centrales de los filtros. Los analizadores espectrales con este tipo de procesamiento analógico en paralelo a menudo se diseñan para cubrir el rango de audio del espectro en donde la construcción de un banco de filtros pasabanda es económicamente factible.

Los analizadores espectrales de RF a menudo se construyen con un solo filtro pasabanda de IF de banda angosta que se alimenta desde la salida de un circuito mezclador (conversión elevadora o reductora). El oscilador local (LO) del mezclador barre a lo largo del rango espectral deseado. De nuevo, la PSD se obtiene mediante la evaluación de la salida de potencia graduada del filtro de banda angosta como una función de la frecuencia de barrido.

Cálculo numérico de la PSD. La PSD se evalúa numéricamente en los analizadores espectrales que utilizan procesamiento digital de señales. Una aproximación para la PSD es

$$\mathcal{P}_T(f) = \frac{|X_T(f)|^2}{T} \tag{6–73a}$$

donde el subíndice T indica que la aproximación se obtiene mediante la observación de $x(t)$ sobre un intervalo de T segundos. El término T se conoce como *intervalo de observación* o *duración de observación*. Por supuesto que la ecuación (6–73a) es una aproximación de la PSD verdadera, como se define en la ecuación (6–42), debido a que T es finita y sólo se emplea una muestra del conjunto. En analizadores espectrales más sofisticados, $\mathcal{P}_T(f)$ se evalúa para varias incidencias de $x(t)$ y se ocupa el valor promedio de $\mathcal{P}_T(f)$ a cada frecuencia para aproximar el promedio conjunto requerido para una verdadera $\mathcal{P}_x(f)$ de la ecuación (6-42). A menudo se usa la DFT en la evaluación de $\mathcal{P}_T(f)$ para aproximar el valor de $X_T(f)$. Esto trae como consecuencia las desventajas del análisis de la DFT, como se describe en la sección 2–8.

Se debe remarcar el hecho de que la ecuación (6-73a) es una aproximación o *estimación* de la PSD. Esta estimación puede llamarse también *periodograma* debido a que se ha utilizado históricamente para buscar incidencias periódicas en las instancias de los datos que aparecen como funciones delta en la PSD. [Las funciones delta son relativamente fáciles de encontrar en la PSD y, por lo tanto,

las incidencias periódicas en $x(t)$ son también fáciles de determinar.] Se desea que la estimación tenga un promedio conjunto que genere la PSD verdadera. Si este es el caso, se dice que el estimador es *insesgado*. Se puede verificar fácilmente si la ecuación (6–73a) es insesgado. Se tiene que

$$\overline{\mathcal{P}_T(f)} = \overline{\left[\frac{|X_T(f)|^2}{T}\right]}$$

y, empleando la ecuación (6–50a) para una T finita, se obtiene

$$\overline{\mathcal{P}_T(f)} = \mathcal{F}\left[R_x(\tau)\ \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)\right]$$

y con referencia a la tabla 2-2,

$$\overline{\mathcal{P}_T(f)} = T\mathcal{P}_x(f) * \left(\frac{\operatorname{sen} \pi f T}{\pi f T}\right)^2 \tag{6–73b}$$

Debido a que $\overline{\mathcal{P}_T(f)} \neq \mathcal{P}_x(f)$, el periodograma es una estimación *parcial*. Esta parcialidad es causa de la función de ventana triangular $\Lambda(\tau/\mathrm{T})$ que resulta de truncar $x(t)$ a un intervalo de T segundos. Si se ocupa la ecuación en la sección A–8, donde $a = \pi T$, se observa que $\lim_{T\to\infty}[\overline{\mathcal{P}_T(f)}] = \mathcal{P}_x(f)$, de tal forma que el periodograma se vuelve insesgado conforme $T \to \infty$. En consecuencia, se dice que el periodograma es *asintóticamente insesgado*.

Además de ser insesgado, se desea que un estimador sea *consistente*, lo cual significa que su variancia deberá hacerse pequeña conforme $T \to \infty$. Como ejemplo de esto se puede mostrar que la ecuación (6–73a) genera una estimación *inconsistente* de la PSD cuando $x(t)$ es gaussiana [Bendat y Piersol, 1971].

Por supuesto que se pueden emplear funciones de ventana distintas a la triangular para obtener diferentes estimadores de la PSD [Blackman y Tukey, 1958; Jenkins y Watts, 1968]. Algunas técnicas más modernas suponen un modelo matemático (o forma) para la función de autocorrelación y los parámetros de estimación para dicho modelo. Subsecuentemente, se verifica el modelo para asegurarse que es consistente con los datos. Algunos ejemplos son los modelos de *promedio en movimiento* (MA), *autorregresivo* (AR) y *promedio en movimiento autorregresivo* (ARMA) [Kay, 1986; Kay y Marple, 1981; Marple, 1986; Scharf, 1991; Shanmugan y Breipohl, 1998].

Los analizadores espectrales que usan circuitos basados en microprocesadores a menudo emplean técnicas numéricas para la evaluación de la PSD. Estos dispositivos pueden evaluar la PSD sólo para formas de onda con frecuencias relativamente pequeñas—por ejemplo, sobre el rango de frecuencias de audio o de ultrasonido, debido a que no se pueden construir circuitos para el procesamiento digital de señales en tiempo real a velocidades de RF.

6–3 VALORES DE DC Y RMS PARA PROCESOS ERGÓDICOS ALEATORIOS

En el capítulo 2 se definieron el valor de DC, el RMS y la potencia promedio en términos de operaciones de promedio de tiempo. Para los procesos ergódicos los promedios de tiempo son equivalentes a los promedios conjuntos. Por lo tanto, el valor de DC, el RMS y la potencia promedio, todos conceptos fundamentales en la ingeniería eléctrica, pueden relacionarse a los momentos de un proceso ergódico aleatorio. En el siguiente resumen de estas relaciones se considera que $x(t)$ es un proceso ergódico aleatorio que puede corresponder a una forma de onda ya sea de voltaje o de corriente:

1. Valor de DC:

$$X_{\text{dc}} \triangleq \langle x(t) \rangle \equiv \bar{x} = m_x \tag{6–74}$$

2. Potencia de DC normalizada:

$$P_{\text{dc}} \triangleq [\langle x(t) \rangle]^2 \equiv (\bar{x})^2 \tag{6–75}$$

3. Valor de RMS:

$$X_{\text{rms}} \triangleq \sqrt{\langle x^2(t) \rangle} \equiv \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{R_x(0)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f)\, df} \tag{6–76}$$

4. Valor de RMS de la parte de AC:

$$\begin{aligned}(X_{\text{rms}})_{\text{ac}} &\triangleq \sqrt{\langle (x(t) - X_{\text{dc}})^2 \rangle} \equiv \sqrt{\overline{(x - \bar{x})^2}} \\ &= \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{R_x(0) - (\bar{x})^2} \\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f)\, df - (\bar{x})^2} = \sigma_x = \text{desviación estándar}\end{aligned} \tag{6–77}$$

5. Potencia promedio total normalizada:

$$P \triangleq \langle x^2(t) \rangle \equiv \overline{x^2} = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f)\, df \tag{6–78}$$

6. Potencia promedio normalizada de la parte de AC:

$$\begin{aligned}P_{\text{ac}} &\triangleq \langle (x(t) - X_{\text{dc}})^2 \rangle \equiv \overline{(x - \bar{x})^2} \\ &= \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = R_x(0) - (\bar{x})^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f)\, df - (\bar{x})^2 = \sigma_x^2 = \text{varianza}\end{aligned} \tag{6–79}$$

Aún más, se puede ocupar equipo de laboratorio comúnmente disponible para evaluar la media, el segundo momento y la varianza de un proceso ergódico. Por ejemplo, si $x(t)$ es una forma de onda de voltaje, $\bar{x}$ puede medirse con un voltímetro de DC, y σ_x con un voltímetro de "RMS verdadero" (acoplado a AC).[8] El segundo momento puede hallarse fácilmente a partir de $\overline{x^2} = \sigma_x^2 + (\bar{x})^2$ si se emplean estas mediciones. A frecuencias más altas (por ejemplo, de radio, microondas y ópticas), $\overline{x^2}$ y σ_x^2 pueden obtenerse con un medidor de potencia calibrado. Es decir, $\sigma_x^2 = \overline{x^2} = RP$, donde R es la resistencia de carga del medidor de potencia (generalmente de 50 Ω) y P la lectura en el mismo.

[8] La mayoría de los medidores de "RMS verdadero" no poseen una respuesta de frecuencia de hasta DC. Por lo tanto, no miden el RMS verdadero $\sqrt{\langle x^2(t) \rangle} = \sqrt{\overline{x^2}}$, sino σ.

6–4 SISTEMAS LINEALES

Relaciones de entrada a salida

Como se desarrolló en el capítulo 2, un sistema lineal invariante con el tiempo puede describirse mediante su respuesta al impulso $h(t)$ o, de forma equivalente, por su función de transferencia $H(f)$. Esto se ilustra en la figura 6-6, donde $x(t)$ es la entrada y $y(t)$ la salida. La relación de entrada a salida es

$$y(t) = h(t) * x(t) \tag{6–80}$$

La relación correspondiente de la transformada de Fourier es

$$Y(f) = H(f)X(f) \tag{6–81}$$

Si $x(t)$ y $y(t)$ son procesos aleatorios, estas relaciones seguirán siendo válidas, igual que para funciones deterministas. En los sistemas de comunicaciones, $x(t)$ puede ser una señal aleatoria con ruido (aleatorio), o sólo ruido, cuando la señal está ausente. En el caso de procesos aleatorios se pueden usar funciones de autocorrelación y de PSD para describir las frecuencias involucradas. Como consecuencia, hay que plantear la siguiente cuestión: ¿cuál es la función de autocorrelación y la PSD para el proceso de salida $y(t)$ cuando se conocen la autocorrelación y la PSD para la entrada $x(t)$?

TEOREMA. *Si se aplica un proceso aleatorio estacionario en el sentido amplio $x(t)$ a la entrada de una red lineal invariante con el tiempo con respuesta al impulso $h(t)$, entonces la autocorrelación de la salida es*

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)h(\lambda_2)R_x(\tau - \lambda_2 + \lambda_1)\, d\lambda_1 d\lambda_2 \tag{6–82a}$$

o

$$R_y(\tau) = h(-\tau) * h(\tau) * R_x(\tau) \tag{6–82b}$$

Y la PSD de la salida es

$$\mathcal{P}_y(f) = |H(f)|^2\, \mathcal{P}_x(f) \tag{6–83}$$

donde $H(f) = \mathcal{F}[h(t)]$.

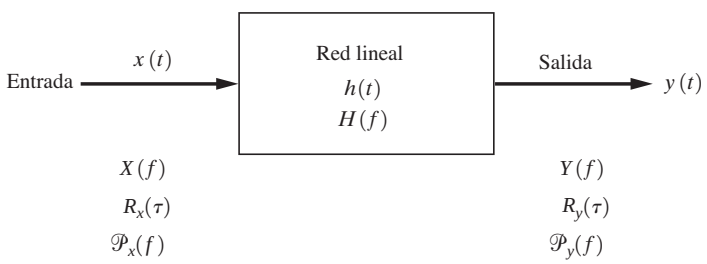


Figura 6–6 Sistema lineal.

La ecuación (6-83) muestra que la función de transferencia de potencia en la red es

$$G_h(f) = \frac{\mathcal{P}_y(f)}{\mathcal{P}_x(f)} = |H(f)|^2 \tag{6–84}$$

como se establece en la ecuación (2–143).

Demostración. A partir de la ecuación (6-80) se tiene que,

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &\triangleq \overline{y(t)y(t+\tau)} \\ &= \overline{\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)x(t-\lambda_1)\,d\lambda_1\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_2)x(t+\tau-\lambda_2)\,d\lambda_2\right]} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)h(\lambda_2)\overline{x(t-\lambda_1)x(t+\tau-\lambda_2)}\,d\lambda_1 d\lambda_2 \end{aligned} \tag{6–85}$$

Sin embargo

$$\overline{x(t-\lambda_1)x(t+\tau-\lambda_2)} = R_x(t+\tau-\lambda_2-t+\lambda_1) = R_x(\tau-\lambda_2+\lambda_1)$$

así que la ecuación (6-85) es equivalente a la ecuación (6–82a). Aún más, ésta puede escribirse en términos de operaciones de convolución como

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_2)R_x[(\tau+\lambda_1)-\lambda_2]\,d\lambda_2\right\}d\lambda_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)\{h(\tau+\lambda_1) * R_x(\tau+\lambda_1)\}\,d\lambda_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda_1)\{h[-((-\tau)-\lambda_1)] * R_x[-((-\tau)-\lambda_1)]\}\,d\lambda_1 \\ &= h(-\tau) * h[-(-\tau)] * R_x[-(-\tau)] \end{aligned}$$

lo cual es equivalente a la nomenclatura de convolución de la ecuación (6–82b).

La PSD de la salida se obtiene tomando la transformada de Fourier de la ecuación (6–82b). Se obtiene que

$$\mathcal{F}[R_y(\tau)] = \mathcal{F}[h(-\tau)]\mathcal{F}[h(\tau) * R_x(\tau)]$$

o

$$\mathcal{P}_y(f) = H^*(f)H(f)\mathcal{P}_x(f)$$

donde se asume que $h(t)$ es real. Esta ecuación es equivalente a la (6-83).

Este teorema puede aplicarse a sistemas lineales en cascada. Por ejemplo, en la figura 6–7 se muestran dos redes en cascada.

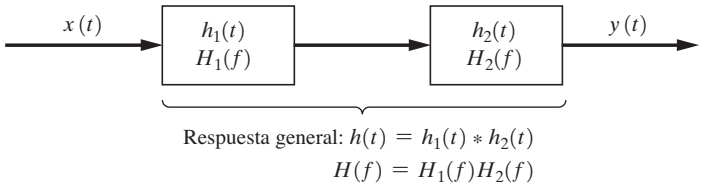


Figura 6–7 Dos redes lineales en cascada.

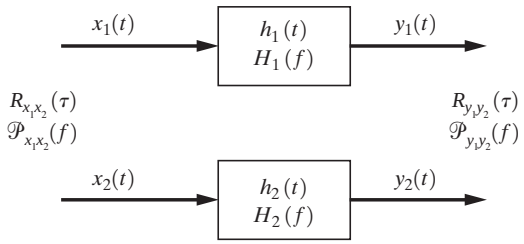


Figura 6–8 Dos sistemas lineales.

El teorema puede también generalizarse para obtener la correlación cruzada o el espectro cruzado de dos sistemas lineales, como se ilustra en la figura 6–8□$x_1(t)$ y $y_1(t)$ son los proceso de entrada y salida del primer sistema, el cual cuenta con una respuesta al impulso $h_1(t)$. De manera similar, $x_2(t)$ y $y_2(t)$ son los procesos de entrada y salida para el segundo sistema.

TEOREMA. *Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ entradas estacionarias en sentido amplio para dos sistemas lineales invariantes en el tiempo, como se muestran en la figura 6–8; entonces la función de correlación cruzada de la salida es*

$$R_{y_1y_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\lambda_1) h_2(\lambda_2) R_{x_1x_2}(\tau - \lambda_2 + \lambda_1)\, d\lambda_1 d\lambda_2 \tag{6–86a}$$

o

$$R_{y_1y_2}(\tau) = h_1(-\tau) * h_2(\tau) * R_{x_1x_2}(\tau) \tag{6–86b}$$

Además, por definición, la densidad espectral de potencia cruzada de salida es la transformada de Fourier de la función de correlación cruzada; por lo tanto,

$$\mathcal{P}_{y_1y_2}(f) = H_1^*(f) H_2(f) \mathcal{P}_{x_1x_2}(f) \tag{6–87}$$

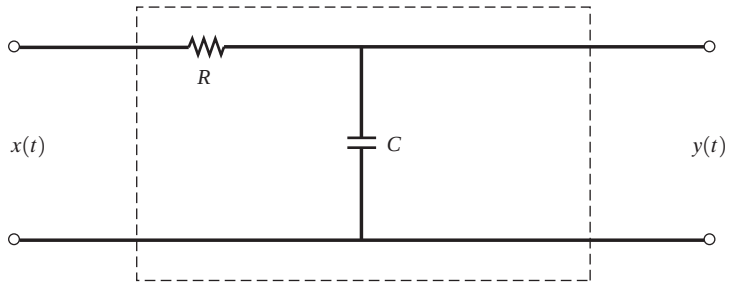
donde $\mathcal{P}_{y_1y_2}(f) = \mathcal{F}[R_{y_1y_2}(\tau)]$, $\mathcal{P}_{x_1x_2}(f) = \mathcal{F}[R_{x_1x_2}(\tau)]$, $H_1(f) = \mathcal{F}[h_1(t)]$, *y* $H_2(f) = \mathcal{F}[h_2(t)]$.

La demostración de este teorema es parecida a la del teorema anterior y se dejará como ejercicio para el lector.

Ejemplo 6–4 AUTOCORRELACIÓN DE SALIDA Y PSD PARA UN FILTRO PASABAJAS RC

En la figura 6-9 se muestra un filtro pasabajas *RC* (LPF). Suponga que la entrada es un proceso ergódico aleatorio con una PSD uniforme:

$$\mathcal{P}_x(f) = \tfrac{1}{2}N_0$$



$$H(f) = \frac{1}{1 + j\left(\dfrac{f}{B_{3\text{dB}}}\right)} \quad \text{donde } B_{3\text{dB}} = \frac{1}{2\pi RC}$$

Figura 6–9 Filtro pasabajas *RC*.

Entonces la PSD de la salida es

$$\mathcal{P}_y(f) = |H(f)|^2 \mathcal{P}_x(f)$$

la cual se convierte en

$$\mathcal{P}_y(f) = \frac{\frac{1}{2}N_0}{1 + (f/B_{3\text{dB}})^2} \tag{6–88}$$

donde $B_{3\text{db}} = 1/(2\pi RC)$. Note que $\mathcal{P}_y(B_{3\text{dB}})/\mathcal{P}_y(0)$ es $\frac{1}{2}$, así que $B_{3\text{dB}} = 1/(2\pi RC)$ es, de hecho, el ancho de banda a 3 dB. Si se toma la transformada de Fourier inversa de $\mathcal{P}_y(f)$, como se describe en la ecuación (6–88), se obtiene la función de autocorrelación de salida para el filtro RC.

$$R_y(\tau) = \frac{N_0}{4RC} e^{-|\tau|/(RC)} \tag{6–89}$$

La potencia de salida normalizada, la cual es el segundo momento de la salida, es

$$P_y = \overline{y^2} = R_y(0) = \frac{N_0}{4RC} \tag{6–90}$$

Aún más, el valor de DC de la salida, el cual es el valor de la media, es igual a cero, debido a que [9]

$$Y_{\text{DC}} = m_y = \overline{\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathcal{P}_y(f)\, df} = 0 \tag{6–91}$$

La ecuación (6–90) también proporciona la varianza de la salida ya que $\sigma_y^2 = \overline{y^2} - m_y^2$, donde $m_y = 0$.

Ejemplo 6–5 RELACIÓN SEÑAL A RUIDO A LA SALIDA DE UN FILTRO PASABAJAS *RC*

Remítase de nuevo a la figura 6-9 y suponga que $x(t)$ consiste en una señal de onda seno (determinista) con ruido ergódico blanco. Por lo tanto,

$$x(t) = s_i(t) + n_i(t)$$

[9] Cuando la integral es distinta de cero, el valor que se obtiene es igual o mayor que el cuadrado de la media.

y

$$s_i(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

donde A_0, ω_0, y θ_0 son constantes conocidas y $\mathcal{P}_{n_i}(f) = N_0/2$. La potencia de la señal de entrada es

$$\langle s_i^2(t) \rangle = \frac{A_0^2}{2}$$

y la potencia del ruido de entrada es

$$\langle n_i^2 \rangle = \overline{n_i^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{n_i}(f)\, df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2}\, df = \infty$$

Por tanto, la relación señal a ruido (SNR) de entrada es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{entrada}} = \frac{\langle s_i^2(t) \rangle}{\langle n_i^2(t) \rangle} = 0 \tag{6–92}$$

Debido a que el sistema es lineal, la salida consiste en la suma de la señal de entrada filtrada más el ruido de entrada filtrado:

$$y(t) = s_0(t) + n_0(t)$$

La señal de salida es

$$\begin{aligned} s_0(t) &= s_i(t) * h(t) \\ &= A_0 |H(f_0)| \cos[\omega_0 t + \theta_0 + \underline{/H(f_0)}] \end{aligned}$$

y la potencia de la señal de salida es

$$\langle s_0^2(t) \rangle = \frac{A_0^2}{2} |H(f_0)|^2 \tag{6–93}$$

A partir de la ecuación (6-90) del ejemplo 6-4 se tiene que la potencia del ruido de salida es

$$\overline{n_0^2} = \frac{N_0}{4RC} \tag{6–94}$$

La SNR de salida es entonces

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \frac{\langle s_0^2(t) \rangle}{\langle n_0^2(t) \rangle} = \frac{\langle s_0^2(t) \rangle}{\overline{n_0^2(t)}} = \frac{2A_0^2 |H(f_0)|^2 RC}{N_0} \tag{6–95}$$

o

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \frac{2A_0^2 RC}{N_0[1 + (2\pi f_0 RC)^2]}$$

Se invita al lector a calcular matemáticamente el valor de RC que minimice la SNR. Éste es de $RC = 1/(2\pi f_0)$. Por lo tanto, para una máxima SNR, el filtro se diseña para que tenga un ancho de banda a 3 dB igual a f_0.

6–5 MEDICIONES PARA EL ANCHO DE BANDA

En la sección 2–9 se definieron varias mediciones para el ancho de banda, entre las cuales se tiene el ancho de banda absoluto, el ancho de banda a 3 dB, el equivalente, de nulo a nulo (cruces con cero), limitado, de potencia y el parámetro de ancho de banda de la FCC. Estas definiciones pueden aplicarse para evaluar el ancho de banda de un proceso estacionario en el sentido amplio $x(t)$, donde $\mathcal{P}_x(f)$ reemplaza a $|H(f)|^2$. En esta sección se hará un repaso del ancho de banda equivalente y se definirá una nueva medición: el ancho de banda de RMS.

Ancho de banda equivalente

Para un proceso estacionario en el sentido amplio $x(t)$, el ancho de banda equivalente, como se define en la ecuación (2–192), se convierte en

$$B_{\text{eq}} = \frac{1}{\mathcal{P}_x(f_0)} \int_0^\infty \mathcal{P}_x(f)\ df = \frac{R_x(0)}{2\mathcal{P}_x(f_0)} \tag{6–96}$$

donde f_0 es la frecuencia en la cual $\mathcal{P}_x(f)$ llega a su máximo. Esta ecuación es válida tanto para los procesos pasabanda como para los de banda base (se utiliza $f_0 = 0$ para procesos de banda base).

Ancho de banda de RMS

El ancho de banda de RMS es la raíz cuadrada del segundo momento de la frecuencia con respecto a una PSD normalizada adecuadamente. En este caso f, aunque no es aleatoria, puede *considerarse* como una variable aleatoria que tiene la "función de densidad" $\mathcal{P}_x(f)/\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(\lambda)\ d\lambda$. Esta es una función no negativa en la cual el denominador suministra la normalización correcta de tal forma que el valor integrado de la razón es igual a la unidad. Por lo tanto, la función satisface las propiedades de una PDF.

DEFINICIÓN. Si $x(t)$ es un proceso estacionario en el sentido amplio *pasabajas*, entonces el *ancho de banda de RMS* es

$$B_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{f^2}} \tag{6–97}$$

donde

$$\overline{f^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2 \left[\frac{\mathcal{P}_x(f)}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(\lambda)\ d\lambda} \right] df = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2\ \mathcal{P}_x(f)\ df}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(\lambda)\ d\lambda} \tag{6–98}$$

La medida RMS del ancho de banda se emplea en comparaciones teóricas de sistemas de comunicaciones debido a que las matemáticas involucradas en el cálculo del RMS generalmente son más fáciles de llevar a cabo que en otras mediciones para el ancho de banda. Sin embargo, el ancho de banda de RMS no puede medirse fácilmente con instrumentos de laboratorio.

TEOREMA. *Para un proceso estacionario en el sentido amplio $x(t)$, la frecuencia media al cuadrado* es

$$\overline{f^2} = \left[-\frac{1}{(2\pi)^2 R(0)} \right] \frac{d^2 R_x(\tau)}{d\tau^2} \Bigg|_{\tau=0} \tag{6–99}$$

Demostración. Se sabe que

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f)\, e^{j2\pi f\tau}\, dt$$

Si se toma la segunda derivada con respecto a τ de esta ecuación, se obtiene

$$\frac{d^2 R_x(\tau)}{d\tau^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f)\, e^{j2\pi f\tau} (j2\pi f)^2\, df$$

Si se evalúan ambos lados de esta ecuación cuando $\tau = 0$ resulta en

$$\frac{d^2 R_x(\tau)}{d\tau^2}\Bigg|_{\tau=0} = (j2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f^2 \mathcal{P}_x(f)\, df$$

Sustituyendo esto por la integral en la ecuación (6-998), dicha ecuación se convierte en

$$\overline{f^2} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f^2 \mathcal{P}_x(f)\, df}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(\lambda)\, d\lambda} = \frac{-\dfrac{1}{(2\pi)^2}\left[\dfrac{d^2 R_x(\tau)}{d\tau^2}\right]_{\tau=0}}{R_x(0)}$$

la cual es idéntica a la ecuación (6-99).

También puede definirse el ancho de banda de RMS para un proceso pasabanda. En este caso el interés está en la raíz cuadrada del segundo momento alrededor de la frecuencia media de la porción de frecuencias *positivas* del espectro.

DEFINICIÓN. Si $x(t)$ es un proceso estacionario en el sentido amplio pasabanda, el *ancho de banda de RMS* es

$$B_{\text{rms}} = 2\sqrt{\overline{(f - f_0)^2}} \tag{6–100}$$

donde

$$\overline{(f - f_0)^2} = \int_0^{\infty} (f - f_0)^2 \left(\frac{\mathcal{P}_x(f)}{\displaystyle\int_0^{\infty} \mathcal{P}_x(\lambda)\, d\lambda} \right) df \tag{6–101}$$

y

$$f_0 \triangleq \bar{f} = \int_0^{\infty} f \left(\frac{\mathcal{P}_x(f)}{\displaystyle\int_0^{\infty} \mathcal{P}_x(\lambda)\, d\lambda} \right) df \tag{6–102}$$

Como se puede verificar mediante un diagrama de una PSD pasabanda típica, la cantidad dada por la raíz en la ecuación (6−100) es análoga a σ_f. En consecuencia, se requiere del factor de 2 para obtener una definición razonable para el ancho de banda pasabanda.

Ejemplo 6–6 ANCHO DE BANDA EQUIVALENTE Y ANCHO DE BANDA DE RMS PARA UN LPF *RC*

Se puede aplicar ruido blanco a la entrada para evaluar el ancho de banda equivalente y el de RMS para un filtro. El ancho de banda de la PSD de salida es el del filtro, ya que la PSD de entrada es constante.

Para el LPF *RC* (figura 6-9), la PSD de salida, cuando existe ruido blanco a la entrada, se obtiene a partir de la ecuación (6-88). A la función de autocorrelación de salida correspondiente se llega mediante la ecuación (6-89). Cuando estas ecuaciones se sustituyen en la ecuación (6-69), el ancho de banda equivalente para el LPF *RC* es

$$B_{\text{eq}} = \frac{R_y(0)}{2\mathcal{P}_y(0)} = \frac{N_0/4RC}{2(\frac{1}{2}N_0)} = \frac{1}{4RC} \text{ hertz} \tag{6–103}$$

Por lo tanto, para un LPF *RC*,

$$B_{\text{eq}} = \frac{\pi}{2} B_{3\text{dB}} \tag{6–104}$$

El ancho de banda de RMS resulta de sustituir las ecuaciones (6-88) y (6-90) dentro de la ecuación (6-98). Se llega a

$$B_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 \mathcal{P}_y(f)\,df}{R_y(0)}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi^2 RC} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2}{(B_{3\text{dB}})^2 + f^2}\,df} \tag{6–105}$$

Al examinar la integral se nota que el término dentro de la misma se vuelve igual a la *unidad* conforme $f \to \pm\infty$□por lo tanto, su valor es infinito. En consecuencia, $B_{\text{rms}} = \infty$ para un LPF *RC*. Para que el ancho de banda de RMS sea finito la PSD requiere decaer más rápido que $1/|f|^2$ conforme la frecuencia se vuelve grande. En consecuencia, para el LPF *RC*, la definición de RMS no es de gran utilidad.

6–6 EL PROCESO ALEATORIO GAUSSIANO

DEFINICIÓN. Un proceso aleatorio $x(t)$ es gaussiano si las variables aleatorias

$$x_1 = x(t_1),\ x_2 = x(t_2),\ \ldots,\ x_N = x(t_N) \tag{6–106}$$

cuentan con una PDF gaussiana N-dimensional para cualquier N y cualquier $t_1, t_2, \ldots, t_N$.

La PDF gaussiana N-dimensional puede escribirse en forma compacta con la nomenclatura matricial. Sea $\mathbf{x}$ el vector *columna* que denota las N variables aleatorias:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ \vdots \\ x(t_N) \end{bmatrix} \tag{6–107}$$

La PDF gaussiana N-dimensional es

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\text{Det } \mathbf{C}|^{1/2}}\ e^{-(1/2)[(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})]} \tag{6–108}$$

donde el vector de la media es

$$\mathbf{m} = \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \vdots \\ \overline{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix} \tag{6–109}$$

y donde $(\mathbf{x} - \mathbf{m})^T$ representa la transpuesta del vector columna $(\mathbf{x} - \mathbf{m})$.

Det $\mathbf{C}$ es el determinante de la matriz $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}^{-1}$ es la inversa de la matriz $\mathbf{C}$. La matriz de covarianza se define mediante

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{NN} \end{bmatrix} \tag{6–110}$$

donde los elementos de la matriz son

$$c_{ij} = \overline{(x_i - m_i)(x_j - m_j)} = \overline{[x(t_i) - m_i][x(t_j) - m_j]} \tag{6–111}$$

Para un proceso estacionario en el sentido amplio, $m_i = \overline{x(t_i)} = m_j = \overline{x(t_j)} = m$. Los elementos de la matriz de covarianza se convierten en

$$c_{ij} = R_x(t_j - t_i) - m^2 \tag{6–112}$$

Si, además, la x_i resulta no estar correlacionada, entonces $\overline{x_i x_j} = \overline{x}_i \overline{x}_j$ para $i \neq j$, y la matriz de covarianza se convierte en

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} \tag{6–113}$$

donde $\sigma^2 = \overline{x^2} - m^2 = R_x(0) - m^2$. Es decir, la matriz de covarianza se convierte en una matriz diagonal si las variables aleatorias no están correlacionadas. Utilizando las ecuaciones (6-113) y (6-108) se puede concluir que las variables gaussianas aleatorias son independientes cuando no están correlacionadas.

Propiedades de los procesos gaussianos

Algunas propiedades de los procesos gaussianos son:

1. $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ depende sólo de $\mathbf{C}$ y de $\mathbf{m}$, lo cual es otra forma de decir que la PDF gaussiana N-dimensional está completamente especificada por los momentos de primer y segundo órdenes (es decir, medias, varianzas y covarianzas).

2. Dado que $\{x_i = x(t_i)\}$ son conjuntamente gaussianos, los términos $x_i = x(t_i)$ son individualmente gaussianos.
3. Cuando **C** es una matriz diagonal las variables aleatorias no están correlacionadas. Además, las variables gaussianas aleatorias son independientes cuando no existe correlación.
4. Una transformación lineal de un conjunto de variables aleatorias gaussianas produce otro conjunto de las mismas.
5. Un proceso gaussiano estacionario en el sentido amplio también es estacionario en el sentido estricto[10] [Papoulis, 1984, p. 222; Shanmugan y Breipohl, 1988, p. 141].

La cuarta propiedad es de gran utilidad en el análisis de sistemas lineales. Dicha propiedad, así como el siguiente teorema, se demostrarán consecutivamente.

TEOREMA. *Si la entrada a un sistema lineal es un proceso gaussiano aleatorio, la salida del sistema también será un proceso gaussiano.*

Demostración. La salida de una red lineal que posee una respuesta al impulso $h(t)$ es

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\lambda)x(\lambda)\, d\lambda$$

Esto puede aproximarse mediante

$$y(t) = \sum_{j=1}^{N} h(t-\lambda_j)x(\lambda_j)\, \Delta\lambda \tag{6–114}$$

la cual se vuelve exacta conforme N crece y $\Delta\lambda \to 0$.

Las variables aleatorias de salida para el proceso aleatorio de salida son

$$y(t_1) = \sum_{j=1}^{N} [h(t_1-\lambda_j)\, \Delta\lambda]x(\lambda_j)$$

$$y(t_2) = \sum_{j=1}^{N} [h(t_2-\lambda_j)\, \Delta\lambda]x(\lambda_j)$$

$$\vdots$$

$$y(t_N) = \sum_{j=1}^{N} [h(t_N-\lambda_j)\, \Delta\lambda]x(\lambda_j)$$

En nomenclatura matricial, estas ecuaciones se vuelven

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1N} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & h_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

[10] Esto resulta directamente de la ecuación (6–112), ya que la PDF gaussiana N-dimensional es una función sólo de τ y no de los tiempos absolutos.

o

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} \tag{6–115}$$

donde los elementos de la matriz $\mathbf{H}$ de $N \times N$ se relacionan con la respuesta al impulso de la red lineal mediante

$$h_{ij} = [\,h(t_i - \lambda_j)\,]\ \Delta\lambda \tag{6–116}$$

A continuación se demostrará que y se describe por una PDF gaussiana N–dimensional cuando $\mathbf{x}$ se describe por esa misma PDF. Esto puede llevarse a cabo con la teoría para una transformación de función multivariante, como se presenta en el apéndice B. A partir de la ecuación (B–99), la PDF de $\mathbf{y}$ es

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = \left.\frac{f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})}{|J(\mathbf{y}/\mathbf{x})|}\right|_{\mathbf{x}=H^{-1}\mathbf{y}} \tag{6–117}$$

El jacobiano es

$$J\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}\right) = \text{Det}\begin{bmatrix} \dfrac{dy_1}{dx_1} & \dfrac{dy_1}{dx_2} & \cdots & \dfrac{dy_1}{dx_N} \\ \dfrac{dy_2}{dx_1} & \dfrac{dy_2}{dx_2} & \cdots & \dfrac{dy_2}{dx_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{dy_N}{dx_1} & \dfrac{dy_N}{dx_2} & \cdots & \dfrac{dy_N}{dx_N} \end{bmatrix} = \text{Det}[\,\mathbf{H}\,] \triangleq K \tag{6–118}$$

donde K es una constante. En este problema, $J(\mathbf{y}/\mathbf{x})$ es una *constante*, y no una función de $\mathbf{x}$, ya que $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}$ es una transformación *lineal*. Por lo tanto,

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{K}|}\, f_{\mathbf{x}}(\mathbf{H}^{-1}\mathbf{y})$$

o

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\,|K|\,|\text{Det}\ \mathbf{C}_x|^{1/2}}\ e^{-(1/2)[(\mathbf{H}^{-1}\mathbf{y}-\mathbf{m}_{\mathbf{x}})^T\mathbf{C}_x^{-1}\ (\mathbf{H}^{-1}\mathbf{y}-\mathbf{m}_{\mathbf{x}})]} \tag{6–119}$$

donde el subíndice x se ha añadido a las cantidades asociadas con $x(t)$. Pero se sabe que $\mathbf{m}_y = \mathbf{H}\mathbf{m}_x$ y, de la teoría matricial, se tiene la propiedad de $[\mathbf{AB}]^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$, así que el exponente de la ecuación (6–119) se convierte en

$$-\tfrac{1}{2}[(\mathbf{y}-\mathbf{m}_y)^T(\mathbf{H}^{-1})^T]\mathbf{C}_x^{-1}[\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{m}_y)] = -\tfrac{1}{2}[(\mathbf{y}-\mathbf{m}_y)^T\mathbf{C}_y^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{m}_y)] \tag{6–120}$$

donde

$$\mathbf{C}_y^{-1} = (\mathbf{H}^{-1})^T \mathbf{C}_x^{-1} \mathbf{H}^{-1} \tag{6–121}$$

o

$$\mathbf{C}_y = \mathbf{H}\mathbf{C}_x\mathbf{H}^T \tag{6–122}$$

Por lo tanto, la PDF para $\mathbf{y}$ es

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|K|\,|Det\ \mathbf{C_x}|^{1/2}}\ e^{-(1/2)(\mathbf{y}-\mathbf{m}_y)^T\,\mathbf{C}_y^{-1}\,(\mathbf{y}-\mathbf{m_y})} \tag{6–123}$$

la cual es una PDF gaussiana N-dimensional. Esto completa la demostración del teorema.

Si un sistema lineal actúa como integrador o LPF, las variables aleatorias de salida (de los procesos aleatorios de salida) tienden a ser proporcionales a la suma de las variables aleatorias de entrada. En consecuencia, si se aplica el teorema del límite central (consulte el apéndice B), la salida del integrador o del LPF tenderá a ser un proceso gaussiano aleatorio cuando las variables aleatorias de entrada son independientes y si cuentan con PDF no gaussianas.

Ejemplo 6–7 PROCESO DE RUIDO BLANCO GAUSSIANO

Suponga que se tiene un proceso gaussiano aleatorio $n(t)$ que tiene una PSD de

$$\mathcal{P}_n(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ N_0, & |f| \le B \\ 0, & f \quad \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{6–124}$$

donde B es una constante positiva. Esto describe un proceso *blanco gaussiano limitado por banda* siempre y cuando B sea finita, pero se vuelve completamente un *proceso blanco gaussiano* (todas las frecuencias están presentes) conforme $B \to \infty$.

La función de autocorrelación para un proceso blanco limitado por banda es

$$R_n(\tau) = BN_0 \left(\frac{\text{sen}\ 2\pi B\tau}{2\pi B\tau} \right) \tag{6–125}$$

La potencia promedio total es $P = R_n(0) = BN_0$. La media de $n(t)$ es igual a cero, ya que no existe una función δ en la PSD cuando $f = 0$. Además, la función de autocorrelación es también igual a cero para $\tau = k/(2B)$ cuando k es un entero diferente de cero. Por lo tanto, las variables aleatorias $n_1 = n(t_1)$ y $n_2 = n(t_2)$ no están correlacionadas cuando $t_2 - t_1 = \tau = k/(2B)$, $k \neq 0$. Para otros valores de τ, las variables aleatorias sí están correlacionadas. Como se asume que $n(t)$ es gaussiano, n_1 y n_2 son variables aleatorias conjuntamente gaussianas. En consecuencia, debido a la tercera propiedad, las variables aleatorias son independientes cuando $t_2 - t_1 = k/(2B)$, pero son dependientes para otros valores de t_2 y t_1. Conforme $\to \infty$, $R_n(\tau) \to \frac{1}{2}N_0\delta(\tau)$, y las variables aleatorias n_1 y n_2 se vuelven independientes para todos los valores de t_1 y t_2, siempre y cuando $t_1 \neq t_2$. Aún más, conforme $B \to \infty$, la potencia promedio se vuelve infinita. Por lo tanto, un proceso de ruido blanco no es físicamente realizable. Sin embargo, es una idealización matemática de gran utilidad para el análisis de sistemas, al igual que un impulso determinista sirve para obtener la respuesta al impulso de un sistema lineal, a pesar de que el impulso mismo no es físicamente realizable.

6–7 PROCESOS PASABANDA[11]

Representaciones pasabanda

En la sección 4-1 se demostró que cualquier forma de onda pasabanda puede representarse mediante

$$v(t) = \text{Re}\{g(t)\, e^{j\omega_c t}\} \tag{6–126a}$$

o, de forma equivalente, a través de

$$v(t) = x(t)\, \cos\omega_c t - y(t)\, \text{sen}\,\omega_c t \tag{6–126b}$$

y

$$v(t) = R(t)\, \cos[\omega_c t + \theta(t)] \tag{6–126c}$$

donde $g(t)$ es la envolvente compleja, $R(t)$ la envolvente real, $\theta(t)$ la fase y $x(t)$ y $y(t)$ los componentes en cuadratura. Por lo tanto, la envolvente compleja es

$$g(t) = |g(t)|\, \text{e}^{j\underline{/\, g(t)}} = R(t)\, e^{j\theta(t)} = x(t) + jy(t) \tag{6–127a}$$

con las relaciones de

$$R(t) = |g(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \tag{6–127b}$$

$$\theta(t) = \underline{/\, g(t)} = \tan^{-1}\left[\frac{y(t)}{x(t)}\right] \tag{6–127c}$$

$$x(t) = R(t)\, \cos\theta(t) \tag{6–127d}$$

y

$$y(t) = R(t)\, \text{sen}\,\theta(t) \tag{6–127e}$$

Aún más, el espectro de $v(t)$ se relaciona con el de $g(t)$ a través de la ecuación (4–12), lo cual es

$$V(f) = \tfrac{1}{2}[G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)] \tag{6–128}$$

En los capítulos 4 y 5 se utilizó la representación pasabanda para analizar los sistemas de comunicaciones desde un punto de vista *determinista*. En este caso se extiende dicha representación para cubrir a los procesos aleatorios, los cuales pueden ser señales aleatorias, ruido o señales distorsionadas por ruido.

Si $v(t)$ es un proceso aleatorio pasabanda que contiene frecuencias alrededor de $\pm f_c$, entonces $g(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $R(t)$ y $\theta(t)$ serán procesos pasabanda. En general, $g(t)$ es un proceso complejo, como se describe en la sección 6-1, y $x(t)$, $y(t)$, $R(t)$ y $\theta(t)$ siempre son procesos reales. Esto es aparente a partir de una expansión de la serie de Fourier de $v(t)$, como se demuestra en las ecuaciones (4-5) a (4–8), donde los coeficientes de la serie de Fourier forman un conjunto de variables aleatorias debido a que $v(t)$ es un proceso aleatorio. Además, si $v(t)$ es un proceso gaussiano aleatorio, los coeficientes de la serie de Fourier consisten en un conjunto de variables aleatorias *gaussianas*, ya que se obtienen mediante operaciones lineales sobre $v(t)$. De manera similar, cuando $v(t)$ es un proceso gaussiano, $g(t)$, $x(t)$ y $y(t)$ son también procesos gaussianos, ya que son funciones lineales de $v(t)$. Sin embargo, $R(t)$ y $\theta(t)$ no son gaussianos porque son funciones no lineales de $v(t)$. La PDF de primer orden para estos procesos se evaluará en el ejemplo 6-10.

[11] El término que se emplea en otros textos es *procesos de ruido de banda estrecha*, lo cual es erróneo porque éstos pueden ser de banda ancha *o* de banda estrecha.

A continuación se tratará el tema de la estacionalidad como se aplica a la representación pasabanda.

TEOREMA. *Si $x(t)$ y $y(t)$ son procesos conjuntamente estacionarios en el sentido amplio (WSS, por sus siglas en inglés), el proceso pasabanda real*

$$v(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\} = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\,\text{sen}\,\omega_c t \tag{6–129a}$$

será WSS si y sólo si

$$\textbf{1.}\quad \overline{x(t)} = \overline{y(t)} = 0 \tag{6–129b}$$

$$\textbf{2.}\quad R_x(\tau) = R_y(\tau) \tag{6–129c}$$

y

$$\textbf{3.}\quad R_{xy}(\tau) = -R_{yx}(\tau) \tag{6–129d}$$

Demostración. Los requisitos para WSS son que $\overline{v(t)}$ sea constante y $R_v(t, t+\tau)$ una función sólo de τ. Se observa que $\overline{v(t)} = \overline{x(t)}\cos\omega_c t - \overline{y(t)}\,\text{sen}\,\omega_c t$ es una constante para cualquier valor de t sólo si $\overline{x(t)} = \overline{y(t)} = 0$. Por lo tanto, se requiere de la primera condición.

Las condiciones necesarias para que $R_v(t, t+\tau)$ sea una función sólo de τ se encuentran como sigue:

$$\begin{aligned}
&R_v(t, t+\tau)\\
&= \overline{v(t)v(t+\tau)}\\
&= \overline{[x(t)\cos\omega_c t - y(t)\,\text{sen}\,\omega_c t][x(t+\tau)\cos\omega_c(t+\tau) - y(t+\tau)\,\text{sen}\,\omega_c(t+\tau)]}\\
&= \overline{x(t)x(t+\tau)}\cos\omega_c t\cos\omega_c(t+\tau) - \overline{x(t)y(t+\tau)}\cos\omega_c t\,\text{sen}\,\omega_c(t+\tau)\\
&\quad - \overline{y(t)x(t+\tau)}\,\text{sen}\,\omega_c t\cos\omega_c(t+\tau) + \overline{y(t)y(t+\tau)}\,\text{sen}\,\omega_c t\,\text{sen}\,\omega_c(t+\tau)
\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}
R_v(t, t+\tau) &= R_x(\tau)\cos\omega_c t\cos\omega_c(t+\tau) - R_{xy}(\tau)\cos\omega_c t\,\text{sen}\,\omega_c(t+\tau)\\
&\quad - R_{yx}(\tau)\,\text{sen}\,\omega_c t\cos\omega_c(t+\tau) + R_y(\tau)\,\text{sen}\,\omega_c t\,\text{sen}\,\omega_c(t+\tau)
\end{aligned}$$

Cuando se emplean identidades trigonométricas para los productos de senos y cosenos, esta ecuación se reduce a

$$\begin{aligned}
R_v(t, t+\tau) &= \tfrac{1}{2}[R_x(\tau) + R_y(\tau)]\cos\omega_c\tau + \tfrac{1}{2}[R_x(\tau) - R_y(\tau)]\cos\omega_c(2t+\tau)\\
&\quad - \tfrac{1}{2}[R_{xy}(\tau) - R_{yx}(\tau)]\,\text{sen}\,\omega_c\tau - \tfrac{1}{2}[R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)]\,\text{sen}\,\omega_c(2t+\tau)
\end{aligned}$$

La autocorrelación para $v(t)$ puede hacerse una función de τ sólo si los términos que involucran a t se igualan a cero. Es decir, si $[R_x(\tau) - R_y(\tau)] = 0$ y $[R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)] = 0$. Por lo tanto, se requieren la segunda y tercera condiciones.

Si se satisfacen de la primera a la tercera condiciones de la ecuación (6–129) de tal manera que $v(t)$ sea WSS, entonces desde la primera hasta la quinta propiedades de las ecuaciones (6–133a) a (6-133e) son válidas. Aún más, los componentes $x(t)$ y $y(t)$ de $v(t) = x(t)\cos\omega_c t - y(t)\,\text{sen}\,\omega_c t$ satisfacen desde la sexta hasta la decimocuarta propiedades, como se describe mediante las ecuaciones (6-133f) a (6-133n), cuando se satisfacen desde la primera hasta la tercera condiciones. Estas

propiedades son de gran utilidad en el análisis de los procesos aleatorios en varios puntos en los sistemas de comunicaciones.

Para una forma de onda pasabanda dada, la descripción de la envolvente compleja $g(t)$ no es única. Esto puede verse fácilmente en la ecuación (6-126), donde la opción del valor para el parámetro f_c se deja a su discreción. En consecuencia, en la representación de una forma de onda pasabanda $v(t)$ dada, los componentes de frecuencia presentes en la envolvente compleja $g(t)$ correspondiente dependen del valor de f_c que se seleccione para el modelo. Aún más, en la representación de procesos aleatorios el interés a menudo consiste en tener una representación para un proceso WSS pasabanda con ciertas características de la PSD. En este caso se puede mostrar que $\text{Re}\{g(t)e^{j\omega_c t}\}$ cuando $v(t)$ es un proceso WSS [Papoulis, 1984, pp. 314–322]. Por lo tanto, $g(t)$ no es único y se puede seleccionar de tal manera que satisfaga algunas condiciones adicionales deseadas. Sin embargo, aún se satisfarán desde la primera hasta la decimocuarta propiedades cuando se satisfacen también las condiciones de la ecuación (6-129).

En algunas aplicaciones *no* se satisfacen desde la primera hasta la tercera condiciones de la ecuación (6–129). Este será el caso, por ejemplo, cuando los componentes $x(t)$ y $y(t)$ en cuadratura no tengan la misma potencia, como ocurre en un problema de modulación en cuadratura desbalanceada. Otro ejemplo es cuando $x(t)$ o $y(t)$ tienen un valor de DC. En estos casos, el modelo para el proceso aleatorio pasabanda que se describe en la ecuación (6-126) será no estacionario. En consecuencia, surge la siguiente cuestión: ¿puede encontrarse otro modelo pasabanda que modele a $v(t)$ WSS, pero que aun así no requiera desde la primera hasta la tercera condiciones de la ecuación (6-129)? La respuesta es afirmativa. Suponga que el modelo de la ecuación (6-126) se generaliza para incluir una constante de fase θ_c que es una variable aleatoria. Entonces se tiene el siguiente teorema.

Teorema. *Si $x(t)$ y $y(t)$ son procesos conjuntamente WSS, el proceso pasabanda real*

$$v(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j(\omega_c t + \theta_c)}\} = x(t)\cos(\omega_c t + \theta_c) - y(t)\,\text{sen}(\omega_c t + \theta_c) \tag{6–130}$$

será WSS cuando θ_c sea una variable aleatoria independiente uniformemente distribuida sobre $(0, 2\pi)$.

Esta modificación del modelo pasabanda no debe preocuparle, ya que puede decirse que realmente es un mejor modelo para procesos pasabanda físicamente realizables. Es decir, a la constante θ_c a menudo se le llama *fase aleatoria de inicialización*, ya que depende de las "condiciones iniciales" del proceso físico. Cualquier fuente de ruido o de señal inicia con un ángulo de fase aleatoria cuando se enciende, a menos que se sincronice mediante la inyección de alguna señal externa.

Demostración. Ocupando la ecuación (6–130) para modelar al proceso pasabanda, se demostrará a continuación que este $v(t)$ es estacionario en el sentido amplio cuando $g(t)$ es también estacionario en el sentido amplio, aun cuando no se cumpla la ecuación (6-129). Para mostrar que la ecuación (6–130) es WSS, el primer requisito es que $\overline{v(t)}$ sea una constante:

$$\overline{v(t)} = \overline{\text{Re}\{g(t)e^{j(\omega_c t + \theta_c)}\}} = \text{Re}\{\overline{g(t)}e^{j\omega_c t}\,\overline{e^{j\theta_c}}\}$$

Pero $\overline{e^{j\theta_c}} = 0$, así que se tiene que $\overline{v(t)} = 0$, lo cual es una constante. El segundo requisito es que $R_v(t, t+\tau)$ sea una función sólo de τ:

$$\begin{aligned} R_v(t, t+\tau) &= \overline{v(t)v(t+\tau)} \\ &= \overline{\text{Re}\{g(t)e^{j(\omega_c t + \theta_c)}\}\ \text{Re}\{g(t+\tau)e^{j(\omega_c t + \omega_c \tau + \theta_c)}\}} \end{aligned}$$

Empleando la identidad $\text{Re}(c_1)\,\text{Re}(c_2) = \frac{1}{2}\text{Re}(c_1 c_2) + \frac{1}{2}\text{Re}(c_1^* c_2)$ y recordando que θ_c es una variable aleatoria independiente, se obtiene que

$$R_v(t, t+\tau) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\{\overline{g(t)g(t+\tau)}e^{j(2\omega_c t+\omega_c\tau)}\overline{e^{j2\theta_c}}\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\{\overline{g^*(t)g(t+\tau)}e^{j\omega_c\tau}\}$$

Pero $\overline{e^{j2\theta_c}} = 0$ y $R_g(\tau) = \overline{g^*(t)g(t+\tau)}$, pues se asume que $g(t)$ es estacionario en el sentido amplio. Por lo tanto,

$$R_v(t, t+\tau) = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\{R_g(\tau)\, e^{j\omega_c\tau}\} \tag{6–131}$$

El lado derecho de la ecuación (6-131) no es una función de t, así que $R_v(t, t+\tau) = R_v(\tau)$. Como consecuencia, la ecuación (6-130) proporciona un modelo para un proceso pasabanda estacionario en el sentido amplio.

Además, para este modelo, como se describe en la ecuación (6−130), las propiedades desde la primera hasta la quinta de las ecuaciones (6−133a) a (6−133e) son válidas, pero todas las propiedades desde la sexta hasta la decimocuarta [ecuaciones (6−133f) a (6−133h)] no son válidas para los componentes $x(t)$ y $y(t)$ de $v(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \theta_c) - y(t)\,\mathrm{sen}\,(\omega_c t + \theta_c)$, a menos que todas las condiciones de la ecuación (6-129) se satisfagan. Sin embargo, como se demostrará más tarde, los componentes $x(t)$ y $y(t)$ *encontrados* a la salida de los detectores de producto en cuadratura (vea la figura 6-11) satisfacen las propiedades desde la sexta hasta la decimocuarta, siempre y cuando las fases de inicialización de los detectores, θ_0, sean independientes de $v(t)$. [Note que los componentes $x(t)$ y $y(t)$ asociados con $v(t)$ a la entrada del detector no son idénticos a las formas de onda en cuadratura de salida $x(t)$ y $y(t)$ a menos que $\theta_c = \theta_0$□sin embargo, las PSD pueden ser idénticas.]

La representación de la envolvente compleja de la ecuación (6−130) es de gran utilidad para evaluar la salida de los circuitos detectores. Por ejemplo, si $v(t)$ es un proceso de señal con ruido que se aplica al detector de producto, entonces $x(t)$ es el proceso de salida si la referencia es $2\cos(\omega_c t + \theta_c)$ y $y(t)$ es el proceso de salida si la referencia es $-2\,\mathrm{sen}(\omega_c t + \theta_c)$ (consulte el capítulo 4). De manera similar, $R(t)$ es el proceso de salida para un detector de envolvente y $\theta(t)$ es el proceso de salida para un detector de fase.

Propiedades de procesos WSS pasabanda

Se pueden obtener los teoremas que establecen la relación entre las funciones de autocorrelación y la PSD de $v(t)$, $g(t)$, $x(t)$ y $y(t)$. A continuación se presenta un listado de éstos y otros teoremas como propiedades de procesos aleatorios pasabanda. Las relaciones asumen que el proceso pasabanda $v(t)$ es real y WSS.[12] La naturaleza de pasabanda de $v(t)$ se describe matemáticamente con la ayuda de la figura 6-10a, donde

$$\mathcal{P}_v(f) = 0 \qquad \text{para } f_2 < |f| < f_1 \tag{6–132}$$

donde $0 < f_1 \leq f_c \leq f_2$. Además se define una constante positiva B_0 que sea el intervalo de frecuencia mayor entre f_c y cualquier límite de banda, como se ilustra en la figura 6−10a, y $B_0 < f_c$.

Las propiedades son las siguientes:

1. $g(t)$ es un proceso complejo de banda base estacionario en el sentido amplio. (6–133a)

2. $x(t)$ y $y(t)$ son procesos de banda base reales conjuntamente estacionarios en el sentido amplio. (6–133b)

3. $R_v(\tau) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{R_g(\tau)\, e^{j\omega_c\tau}\}$. (6–133c)

[12] $v(t)$ también tiene una media igual a cero, ya que es un proceso pasabanda.

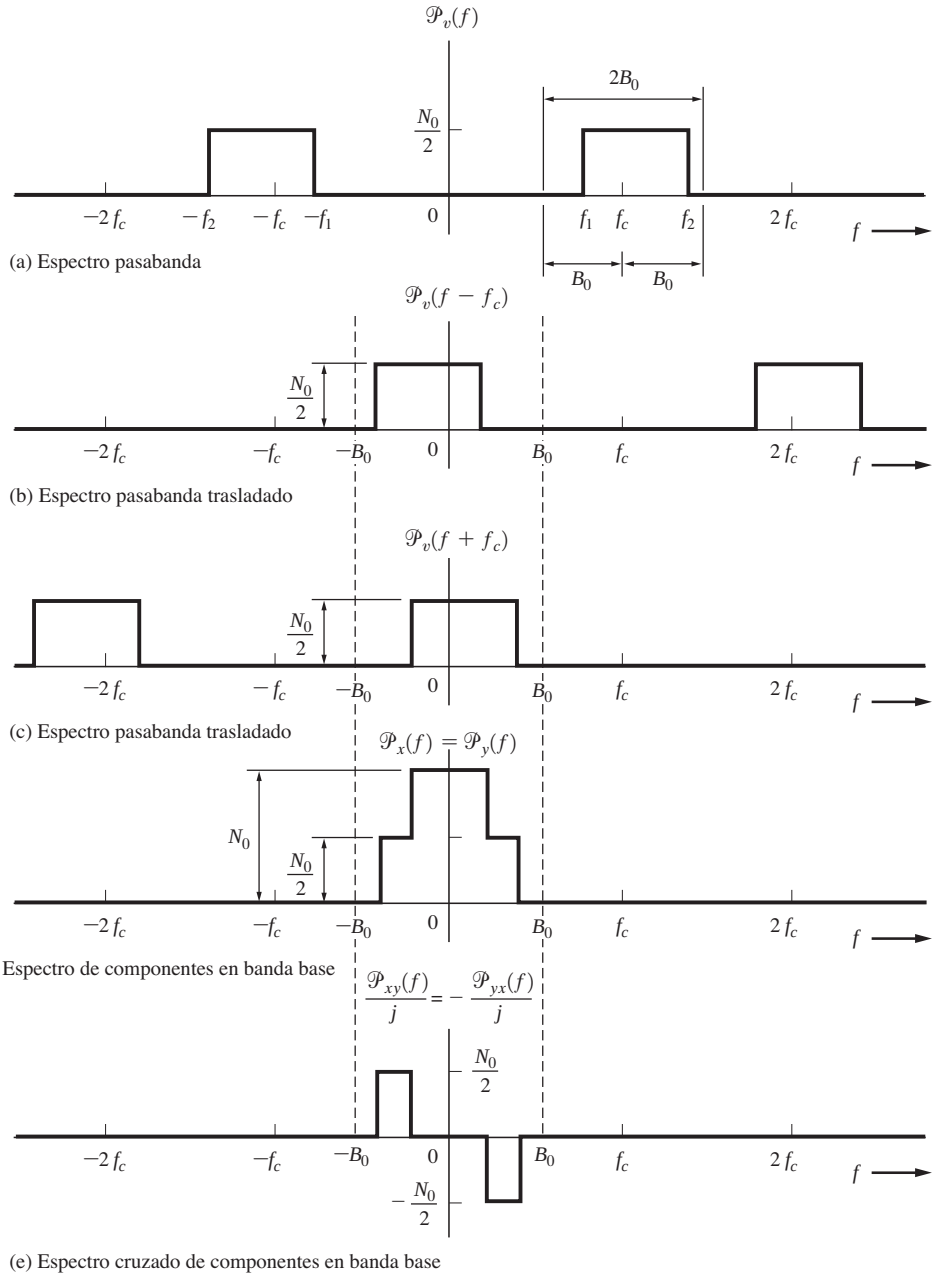


Figura 6–10 Espectros de procesos aleatorios para el ejemplo 6-8.

4. $\mathcal{P}_v(f) = \frac{1}{4}[\mathcal{P}_g(f - f_c) + \mathcal{P}_g(-f - f_c)]$. (6–133d)

5. $\overline{v^2} = \frac{1}{2}\overline{|g(t)|^2} = R_v(0) = \frac{1}{2}R_g(0)$. (6–133e)

Si el proceso pasabanda $v(t)$ es WSS y se satisfacen de la primera a la tercera condiciones de la ecuación (6-129), $v(t)$ puede representarse por la ecuación (6-129a), donde los componentes $x(t)$ y $y(t)$ satisfacen desde la sexta hasta la decimocuarta propiedades que se listan a continuación. Por otra parte, si $v(t)$ es WSS, pero no satisface las tres condiciones de la ecuación (6-129), la representación de la ecuación (6-129a) no es aplicable, ya que ésta no será un modelo WSS y, por lo tanto, las propiedades desde la sexta hasta la decimocuarta no son aplicables. Sin embargo, para $v(t)$ WSS, la representación de la ecuación (6-130) siempre es aplicable, independientemente de si ninguna, alguna o todas las condiciones de la primera a la tercera de la ecuación (6-129) se satisfacen y, como consecuencia, ninguna, alguna o todas las propiedades desde la sexta hasta la decimocuarta se satisfacen por los componentes $x(t)$ y $y(t)$ de la ecuación (6-130). Aún más, si los componentes en cuadratura de $v(t)$ se recuperan mediante circuitos detectores de producto, como se muestra en la figura 6-11, donde θ_0 es una variable aleatoria uniformemente distribuida que es *independiente* de $v(t)$, los componentes en cuadratura $x(t)$ y $y(t)$ *detectados* satisfacen las propiedades desde la sexta hasta la decimocuarta. Estas propiedades son:[13]

6. $\overline{x(t)} = \overline{y(t)} = 0$. (6–133f)

7. $\overline{v^2(t)} = \overline{x^2(t)} = \overline{y^2(t)} = \frac{1}{2}\overline{|g(t)|^2}$
$= R_v(0) = R_x(0) = R_y(0) = \frac{1}{2}R_g(0)$. (6–133g)

8. $R_x(\tau) = R_y(\tau) = 2\int_0^\infty \mathcal{P}_v(f)\ \cos[2\pi(f - f_c)\tau]\ df$. (6–133h)

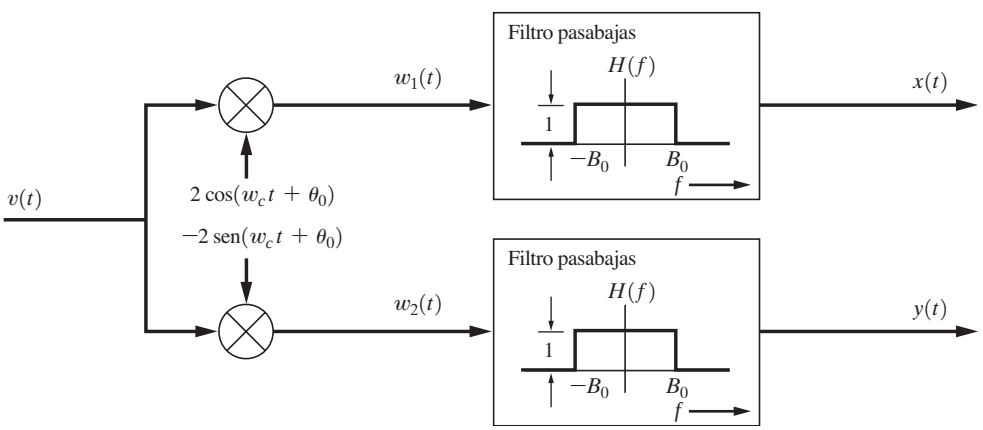


Figura 6–11 Recuperación de $x(t)$ y $y(t)$ a partir de $v(t)$.

[13] Las demostraciones para estas propiedades se darán en los ejemplos 6-8 y 6-9. Las propiedades desde la sexta hasta la decimocuarta también son válidas para los componentes $x(t)$ y $y(t)$ de la ecuación (6-129a), siempre y cuando se satisfagan las condiciones de las ecuaciones (6-129b, c y d).

9. $R_{xy}(\tau) = 2\int_0^\infty \mathcal{P}_v(f)\ \text{sen}[2\pi(f-f_c)\tau]\ df.$ (6–133i)

10. $R_{xy}(\tau) = -R_{xy}(-\tau) = -R_{yx}(\tau).$ (6–133j)

11. $R_{xy}(0) = 0.$ (6–133k)

12. $$\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{P}_y(f) = \begin{cases} [\mathcal{P}_v(f-f_c) + \mathcal{P}_v(f+f_c)], & |f| < B_0 \\ 0, & f \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}.$$ (6–133l)

13. $$\mathcal{P}_{xy}(f) = \begin{cases} j[\mathcal{P}_v(f-f_c) - \mathcal{P}_v(f+f_c)], & |f| < B_0 \\ 0, & f \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}.$$ (6–133m)

14. $\mathcal{P}_{xy}(f) = -\mathcal{P}_{xy}(-f) = -\mathcal{P}_{yx}(f).$ (6–133n)

Pueden obtenerse propiedades adicionales cuando $v(t)$ es un *proceso aleatorio de banda lateral única (SSB)* estacionario en el sentido amplio. Si $v(t)$ es de SSB alrededor de $f = \pm f_c$, entonces, del capítulo 5, se tiene que

$$g(t) = x(t) \pm j\hat{x}(t) \tag{6–134}$$

donde el signo superior se emplea para USSB y el inferior para LSSB. $\hat{x}(t)$ es la transformada de Hilbert de $x(t)$. Usando la ecuación (6–134) se obtienen algunas propiedades adicionales:

15. Cuando $v(t)$ es un proceso de SSB alrededor de $f = \pm f_c$,

$$R_g(\tau) = 2[R_x(\tau) \pm j\hat{R}_x(\tau)] \tag{6–135a}$$

donde $\hat{R}_x(\tau) = [1/(\pi\tau)] * R_x(\tau)$.

16. Para procesos de USSB,

$$\mathcal{P}_g(f) = \begin{cases} 4\mathcal{P}_x(f), & f > 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \tag{6–135b}$$

17. Para procesos de LSSB,

$$\mathcal{P}_g(f) = \begin{cases} 0, & f > 0 \\ 4\mathcal{P}_x(f), & f < 0 \end{cases} \tag{6–135c}$$

A partir de la novena propiedad se observa que si la PSD de $v(t)$ es par alrededor de $f = f_c$, $f > 0$, entonces $R_{xy}(\tau) \equiv 0$ para toda τ. En consecuencia, $x(t)$ y $y(t)$ serán procesos *ortogonales* cuando $\mathcal{P}_v(f)$ es par alrededor de $f = f_c$, $f > 0$. Aún más, si $v(t)$ es gaussiano, $x(t)$ y $y(t)$ serán procesos gaussianos aleatorios independientes.

Ejemplo 6–8 ESPECTROS PARA LOS COMPONENTES EN CUADRATURA DEL RUIDO BLANCO PASABANDA

Suponga que $v(t)$ es un proceso de ruido blanco limitado en banda independiente. Sea la PSD de $v(t)$ igual a $N_0/2$ sobre la banda de frecuencias $f_1 \le |f| \le f_2$, como se ilustra en la figura 6-10a. Con la decimosegunda propiedad se puede evaluar la PSD para $x(t)$ y $y(t)$, que se obtiene al sumar los espectros trasladados $\mathcal{P}_v(f-f_c)$ y $\mathcal{P}_v(f+f_c)$, como se ilustra en las figuras 6–10b y c, para obtener $\mathcal{P}_x(f)$, la cual se muestra en la figura 6–10d. Note que el espectro $\mathcal{P}_x(f)$ es igual a cero para $|f| > B_0$. De manera

similar, el espectro cruzado, $\mathcal{P}_v(f)$, puede obtenerse con la decimotercera propiedad. Esto se muestra en la figura 6–10e. Es interesante notar que, sobre el rango de frecuencias donde el espectro cruzado es diferente de cero, éste es completamente imaginario, ya que $\mathcal{P}_v(f)$ es una función real. Además, el espectro cruzado siempre es una función impar.

La potencia normalizada total es

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_v(f)\, df = N_0(f_2 - f_1)$$

Se puede obtener el mismo resultado si la potencia se calcula a partir de $\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{P}_y(f)$ utilizando la séptima propiedad:

$$P = R_x(0) = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f)\, df = N_0(f_2 - f_1)$$

Ejemplo 6–9 PSD PARA UNA SEÑAL BPSK

A continuación se evaluará la PSD para una señal BPSK que se modula mediante datos aleatorios. En los capítulos 2 y 5 se demostró que la señal BPSK puede representarse mediante

$$v(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \theta_c) \tag{6–136}$$

donde $x(t)$ representa los datos binarios polares (consulte el ejemplo 2-18) y θ_c la fase aleatoria de inicialización.

La PSD de $v(t)$ se obtiene con la cuarta propiedad, donde $g(t) = x(t) + j0$. Por lo tanto,

$$\mathcal{P}_v(f) = \tfrac{1}{4}[\mathcal{P}_x(f - f_c) + \mathcal{P}_x(-f - f_c)] \tag{6–137}$$

Ahora se requiere encontrar la PSD para la modulación binaria polar $x(t)$, que se calculó en el ejemplo 6-3, donde se evaluó la PSD de una señal de banda base polar con datos binarios igualmente probables. Si se sustituye la ecuación (6-62) o, equivalentemente, la ecuación (6-67) dentro de la ecuación (6-137), se obtiene la PSD para la señal BPSK:

$$\mathcal{P}_v(f) = \frac{T_b}{4}\left\{\left[\frac{\operatorname{sen}\pi(f - f_c)T_b}{\pi(f - f_c)T_b}\right]^2 + \left[\frac{\operatorname{sen}\pi(f + f)T_b}{\pi(f + f_c)T_b}\right]^2\right\} \tag{6–138}$$

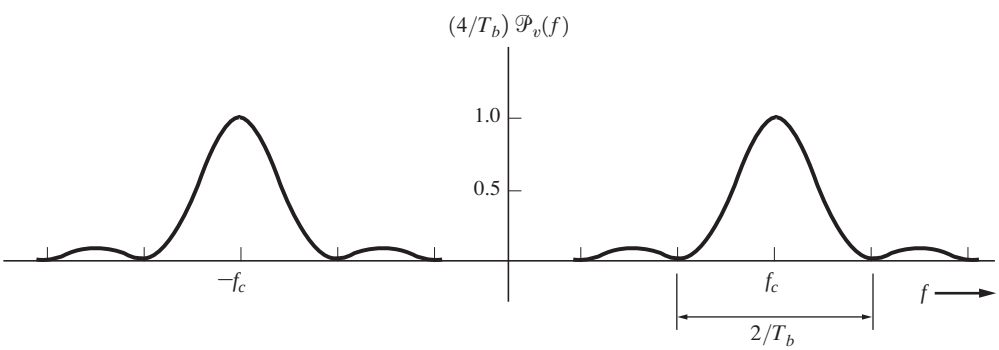


Figura 6–12 Espectro de potencia para una señal BPSK.

En la figura 6-12 se muestra un diagrama de este resultado, mismo que se dio anteriormente, en la ecuación (2-200), donde también se evaluaron los anchos de banda.

Demostraciones de algunas propiedades

Demostrar las 17 propiedades mencionadas previamente sería una tarea ardua, por lo que se harán demostraciones detalladas sólo de algunas. Las que involucren cálculos matemáticos similares se dejarán como ejercicio para el lector.

Ya se han demostrado las propiedades desde la primera hasta la tercera en la discusión antes de la ecuación (6-131). La cuarta propiedad se obtiene fácilmente a partir de la tercera si se toma la transformada de Fourier de la ecuación (6-133c). Los cálculos matemáticos son idénticos a los empleados para llegar a la ecuación (4-25). La quinta propiedad también resulta directamente de la tercera. La sexta se mostrará a continuación. La séptima propiedad resulta de la tercera y la octava. Como se verá más adelante, las propiedades desde la octava hasta la decimoprimera resultan de la decimosegunda y decimotercera.

Las propiedades desde la sexta hasta la decimosegunda se obtienen con la ayuda de la figura 6-11. Es decir, como se muestra en la ecuación (4-77) de la sección 5-13, $x(t)$ y $y(t)$ pueden recuperarse con detectores de producto. Por lo tanto,

$$x(t) = [2v(t)\cos(\omega_c t + \theta_0)] * h(t) \tag{6–139}$$

y

$$y(t) = -[2v(t)\,\text{sen}(\omega_c t + \theta_0)] * h(t) \tag{6–140}$$

donde $h(t)$ es la respuesta al impulso de un LPF ideal que está limitado por banda a B_0 hertz, y θ_0 es una variable aleatoria independiente que está uniformemente distribuida sobre $(0, 2\pi)$ y corresponde a la fase aleatoria de inicialización de un oscilador receptor de incoherencia en fase. La sexta propiedad resulta de la ecuación (6-139) si se toma el promedio conjunto, ya que $\overline{\cos(\omega_c t + \theta_0)} = 0$ y $\overline{\text{sen}(\omega_c t + \theta_0)} = 0$. La decimosegunda propiedad, la cual es la PSD para $x(t)$, puede evaluarse si primero se evalúa la autocorrelación para $w_1(t)$ de la figura 6-11:

$$\begin{aligned} w_1(t) &= 2v(t)\cos(\omega_c t + \theta_0) \\ R_{w_1}(\tau) &= \overline{w_1(t)w_1(t+\tau)} \\ &= 4\overline{v(t)v(t+\tau)\cos(\omega_c t + \theta_0)\cos(\omega_c(t+\tau) + \theta_0)} \end{aligned}$$

Pero θ_0 es una variable aleatoria independiente; por lo tanto, empleando una identidad trigonométrica, se tiene que

$$R_{w_1}(\tau) = 4\overline{v(t)v(t+\tau)}\left[\tfrac{1}{2}\cos\omega_c\tau + \tfrac{1}{2}\overline{\cos(2\omega_c t + \omega_c\tau + 2\theta_0)}\right]$$

Sin embargo, $\overline{\cos(2\omega_c t + \omega_c\tau + 2\theta_0)} = 0$, así que

$$R_{w_1}(\tau) = 2R_v(\tau)\cos\omega_c\tau \tag{6–141}$$

La PSD de $w_1(t)$ se obtiene tomando la transformada de Fourier de la ecuación (6-141).

$$\mathcal{P}_{w_1}(f) = 2\mathcal{P}_v(f) * [\tfrac{1}{2}\delta(f - f_c) + \tfrac{1}{2}\delta(f + f_c)]$$

o

$$\mathcal{P}_{w_1}(f) = \mathcal{P}_v(f - f_c) + \mathcal{P}_v(f + f_c)$$

Finalmente, la PSD de $x(t)$ es

$$\mathcal{P}_x(f) = |H(f)|^2 \mathcal{P}_{w_1}(f)$$

o

$$\mathcal{P}_x(f) = \begin{cases} [\mathcal{P}_v(f - f_c) + \mathcal{P}_v(f + f_c)], & |f| < B_0 \\ 0, \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

la cual es la decimosegunda propiedad.

La octava propiedad resulta directamente de la decimosegunda si se toma la transformada de Fourier inversa:

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{P}_x(f)]$$

$$= \int_{-B_0}^{B_0} \mathcal{P}_v(f - f_c) e^{j2\pi f\tau}\, df + \int_{-B_0}^{B_0} \mathcal{P}_v(f + f_c) e^{j2\pi f\tau}\, df$$

Cambiando variables, sea $f_1 = -f + f_c$ en la primera integral y $f_1 = f + f_c$ en la segunda. Entonces se tiene que

$$R_x(\tau) = \int_{f_c - B_0}^{f_c + B_0} \mathcal{P}_v(-f_1)\ e^{j2\pi(f_c - f_1)\tau}\, df_1 + \int_{f_c - B_0}^{f_c + B_0} \mathcal{P}_v(f_1) e^{j2\pi(f_1 - f_c)\tau}\, df_1$$

Pero $\mathcal{P}_v(-f) = \mathcal{P}_v(f)$, ya que $v(t)$ es un proceso real. Aún más, debido a que $v(t)$ está limitado por banda, los límites en las integrales pueden cambiarse para integrar sobre el intervalo de $(0, \infty)$. Por tanto,

$$R_x(\tau) = 2\int_0^{\infty} \mathcal{P}_v(f_1) \left[\frac{e^{j2\pi(f_1 - f_c)\tau} + e^{-j2\pi(f_1 - f_c)\tau}}{2} \right] df_1$$

la cual es idéntica a la octava propiedad.

De manera similar, puede mostrarse que la decimotercera y novena propiedades son válidas. La décima y decimocuarta propiedades resultan directamente de la novena.

Para procesos de SSB, $y(t) = \pm\hat{x}(t)$. La decimoquinta propiedad se obtiene entonces como sigue:

$$\begin{aligned} R_{gg}(\tau) &= \overline{g^*(t)g(t + \tau)} \\ &= \overline{[x(t) \mp j\hat{x}(t)][x(t + \tau) \pm j\hat{x}(t + \tau)]} \\ &= \overline{[x(t)x(t + \tau)] + \overline{\hat{x}(t)\hat{x}(t + \tau)]} \\ &\quad \pm j\overline{[-\hat{x}(t)x(t + \tau)} + \overline{[x(t)\hat{x}(t + \tau)]} \end{aligned} \tag{6–142}$$

Si se emplea la definición de una función de correlación cruzada y usando la décima propiedad, se tiene que

$$R_{x\hat{x}}(\tau) = \overline{x(t)\hat{x}(t + \tau)} = -R_{\hat{x}x}(\tau) = -\overline{\hat{x}(t)x(t + \tau)} \tag{6–143}$$

Aún más, como se sabe que $\hat{x}(t)$ es la convolución de $x(t)$ con $1/(\pi t)$, se puede demostrar (consulte el problema 6-40) que

$$R_{\hat{x}}(\tau) = R_x(\tau) \tag{6–144}$$

y

$$R_{x\hat{x}}(\tau) = \hat{R}_{xx}(\tau) \tag{6–145}$$

Por ende, la ecuación (6-142) se reduce a la decimoquinta propiedad. Si se toma la transformada de Fourier de la ecuación (6-135a) se obtienen la decimosexta y decimoséptima propiedades.

Como se demuestra mediante la sexta propiedad, las medias detectadas $\overline{x(t)}$ y $\overline{y(t)}$ son cero cuando $v(t)$ es independiente de θ_0. Sin embargo, a partir de las ecuaciones (6-139) y (6-140) se observa que se requiere de una condición con menor restricción. Es decir, $\overline{x(t)}$ o $\overline{y(t)}$ serán cero si $v(t)$ es ortogonal a $\cos(\omega_c t + \theta_0)$ o $\text{sen}(\omega_c t + \theta_0)$, respectivamente; de otra manera serán distintas de cero. Por ejemplo, suponga que $v(t)$ es

$$v(t) = 5\cos(\omega_c t + \theta_c) \tag{6–146}$$

donde θ_c es una variable aleatoria uniformemente distribuida sobre $(0, 2\pi)$. Si la referencia $2\cos(\omega_c t + \theta_0)$ de la figura 6–11 es coherente en fase con $\cos(\omega_c T + \theta_c)$ (es decir, $\theta_0 \equiv \theta_c$), la salida del LPF superior tendría una media de 5. Por otra parte, si las variables aleatorias θ_0 y θ_c son independientes, $v(t)$ será ortogonal a $\cos(\omega_c t + \theta_0)$, y $\bar{x}$ de la salida del LPF superior de la figura 6–11 será igual a cero. El valor de DC de salida (es decir, el promedio de tiempo) será de $5\cos(\theta_0 - \theta_c)$ en cualquier caso.

No se han presentado propiedades de la autocorrelación o la PSD de $R(t)$ y $\theta(t)$ referentes a la autocorrelación y PSD de $v(t)$. En general, este es un problema de gran dificultad, ya que $R(t)$ y $\theta(t)$ son funciones no lineales de $v(t)$. Este tema se discute con mayor detalle después del ejemplo 6-10.

Como se indicó previamente, $x(t)$, $y(t)$ y $g(t)$ son procesos gaussianos cuando $v(t)$ es también gaussiano. Sin embargo, como se demostrará, $R(t)$ y $\theta(t)$ no son procesos gaussianos aun cuando $v(t)$ lo sea.

Ejemplo 6–10 PDF PARA LA ENVOLVENTE Y FUNCIONES DE FASE DE UN PROCESO GAUSSIANO PASABANDA

Suponga que $v(t)$ es un proceso *gaussiano* estacionario en el sentido amplio con una PSD finita que es simétrica alrededor de $f = \pm f_c$. Se desea encontrar la PDF unidimensional para el proceso de envolvente

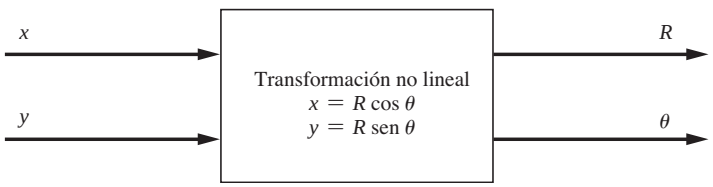


Figura 6–13 Transformación no lineal (polar) de dos variables aleatorias gaussianas.

$R(t)$. Por supuesto que esto es idéntico al proceso que aparece a la salida de un detector de envolvente cuando la entrada es un proceso gaussiano, como el ruido gaussiano. También se obtendrá, de manera similar, la PDF para la fase $\theta(t)$ (la salida de un detector de fase).

El problema se resuelve si se evalúa la transformación bidimensional de variables aleatorias de $x = x(t)$ y $y = y(t)$ a las variables $R = R(t)$ y $\theta = \theta(t)$, lo cual se ilustra en la figura 6–13. Debido a que $v(t)$ es gaussiano, se sabe que x y y son conjuntamente *gaussianas*. Para un $v(t)$ que cuenta con una PSD finita que es simétrica alrededor de $f = \pm f_c$, la media para x y para y son iguales a cero en ambos casos, y las varianzas de éstas son

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = R_v(0) \tag{6–147}$$

Además, x y y son independientes, pues son variables aleatorias gaussianas no correlacionadas [debido a que la PSD de $v(t)$ es simétrica alrededor de $f = \pm f_c$]. Por lo tanto, la PDF conjunta de x y y es

$$f_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\ e^{-(x^2+y^2)/(2\sigma^2)} \tag{6–148}$$

La PDF conjunta para R y θ se obtiene mediante la transformación bidimensional de x y y a R y θ.

$$f_{R\theta}(R,\theta) = \frac{f_{xy}(x, y)}{|J[(R, \theta)/(x, y)]|}\bigg|_{\substack{x=R\ \cos\theta \\ y=R\ \text{sen}\theta}}$$

$$= f_{xy}(x, y)\left|J\left(\frac{(x, y)}{(R, \theta)}\right)\right|\bigg|_{\substack{x=R\ \cos\theta \\ y=R\ \text{sen}\theta}} \tag{6–149}$$

Se trabajará con $J[(x, y)/(R, \theta)]$ en lugar de $J[(R, \theta)/(x, y)]$ debido a que en este problema las derivadas parciales en el primer término son más fáciles de evaluar que en el segundo. Se tiene que

$$J\left(\frac{(x,\ y)}{(R,\ \theta)}\right) = \text{Det}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial R} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial R} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

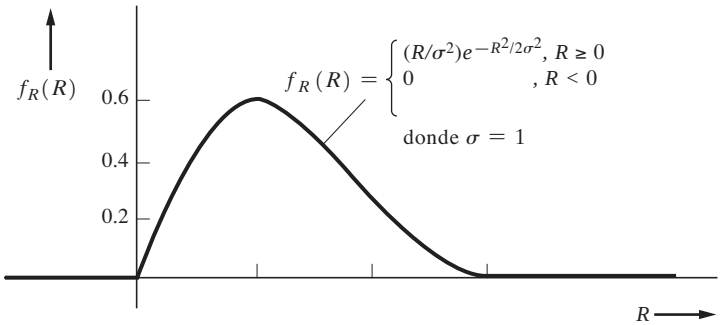
donde x y y se relacionan con R y θ, como se muestra en la figura 6–13. Por supuesto que $R \geq 0$ y θ cae dentro del intervalo $(0, 2\pi)$, de tal manera que

$$J\left(\frac{(x,\ y)}{(R,\ \theta)}\right) = \text{Det}\begin{bmatrix} \cos\theta & -R\ \text{sen}\ \theta \\ \text{sen}\ \theta & R\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

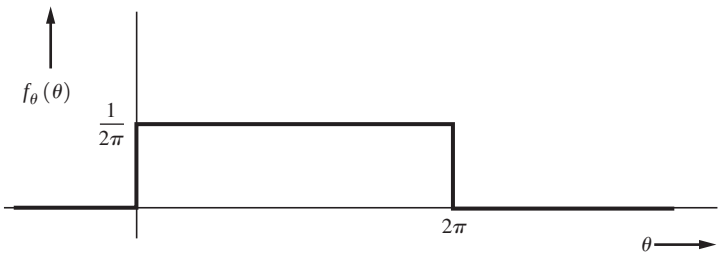
$$= R[\cos^2\theta + \text{sen}^2\ \theta] = R \tag{6–150}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (6–148) y (6–150) dentro de la ecuación (6–149) se tiene que la PDF conjunta de R y θ es

$$f_{R\theta}(R,\theta) = \begin{cases} \dfrac{R}{2\pi\sigma^2}\ e^{-R^2/2\sigma^2}, & R \geq 0\ \text{ y }\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0, & R\ \text{ y }\ \theta\ \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{6–151}$$



(a) PDF para la envolvente



(b) PDF para la fase

Figura 6–14 PDF para la envolvente y la fase de un proceso gaussiano.

La PDF para la envolvente se obtiene calculando la PDF marginal:

$$f_R(R) = \int_{-\infty}^{\infty} f_R(R, \theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R}{2\pi\sigma^2} e^{-R/(2\sigma^2)}\, d\theta, \quad R \geq 0$$

o

$$f_R(R) = \begin{cases} \dfrac{R}{\sigma^2}\, e^{-R^2/(2\sigma^2)}, & R \geq 0 \\ 0, & R \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{6–152}$$

Esto se conoce como la PDF de *Rayleigh*. De manera similar, la PDF de θ se obtiene mediante la integración de R en la PDF conjunta:

$$f_\theta(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{6–153}$$

Esto se conoce como PDF *uniforme*. La figura 6-14 muestra diagramas de estas PDF.

Las variables aleatorias $R = R(t_1)$ y $\theta = \theta(t_1)$ son independientes, ya que $f_R(R, \theta) = f_R(R)\, f(\theta)$. Sin embargo, $R(t)$ y $\theta(t)$ *no son* procesos aleatorios independientes debido a que las variables aleatorias $R = R(t_1)$ y $\theta = \theta(t_1 + \tau)$ no son independientes para todos los valores de τ. Para verificar este enunciado

se debe resolver un problema de transformación de cuatro dimensiones que consiste en el cambio de las variables aleatorias $(x(t_1), x(t_2), y(t_1), y(t_2))$ a $(R(t_1), R(t_2), \theta(t_1), \theta(t_2))$, donde $t_2 - t_1 = \tau$ (Davenport y Root, 1958).

La evaluación de la función de autocorrelación para la envolvente $R(t)$ generalmente requiere que se conozca la función de densidad bidimensional de $R(t)$, ya que $R_R(\tau) = \overline{R(t)R(t+\tau)}$. Sin embargo, para llegar a esta función de densidad conjunta para $R(t)$ primero debe obtenerse la función de densidad de cuatro dimensiones de $(R(t_1), R(t_2), \theta(t_1), \theta(t_2))$ mediante una transformación de cuatro dimensiones, como se discutió en el párrafo anterior. Un problema similar se resuelve para evaluar la función de autocorrelación para la fase $\theta(t)$. Estas dificultades en la evaluación de la función de autocorrelación para $R(t)$ y $\theta(t)$ surgen porque son funciones no lineales de $v(t)$. Las PSD para $R(t)$ y $\theta(t)$ se obtienen tomando la transformada de Fourier de la función de autocorrelación.

6–8 FILTROS ACOPLADOS

Resultados generales

En las secciones anteriores a este capítulo se desarrollaron técnicas para describir procesos aleatorios y *analizar* el efecto de sistemas lineales sobre estos procesos. En esta sección se estudiará una técnica para *diseñar* un filtro lineal para minimizar el efecto del ruido y al mismo tiempo maximizar la señal.

La figura 6–15 ilustra una representación general para un filtro acoplado. La señal de entrada se denota con $s(t)$ y la de salida con $s_0(t)$. Se utiliza una nomenclatura similar para el ruido. Este filtro se emplea en aplicaciones donde la señal puede o no estar presente, pero cuando lo está, *se conoce su forma de onda*. (En los ejemplos 6–11 y 6–12 se aclarará cómo es que el filtro puede aplicarse a los problemas de señalización digital y radares.) Se asume que esta señal está limitada (absolutamente) por el tiempo al intervalo $(0, T)$ y que es igual a cero en cualquier otro caso. La PSD, $\mathcal{P}_n(f)$, de ruido aditivo de entrada $n(t)$ también se conoce. Se desea determinar la característica del filtro de tal manera que la potencia instantánea de la señal de salida se maximice a un tiempo de muestreo t_0, en comparación con la potencia promedio del ruido de salida. Es decir, se desea encontrar $h(t)$ o, equivalentemente, $H(f)$, tal que

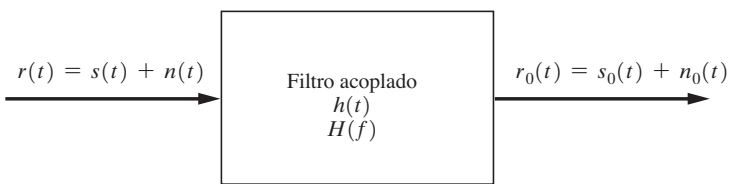


Figura 6–15 Filtro acoplado.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \frac{s_0^2(t)}{n_0^2(t)} \tag{6–154}$$

tiene su máximo cuando $t = t_0$. Este es el criterio del diseño de filtros acoplados.

El filtro acoplado *no* preserva la forma de onda de la señal de entrada, ya que ése no es su objetivo. Al contrario, su objetivo es distorsionar la forma de onda de la señal de entrada y filtrar el ruido de tal forma que al tiempo de muestreo t_0 el nivel de la señal de salida sea lo más grande posible con respecto al nivel de RMS del ruido (salida). En el capítulo 7 se demostrará que, bajo ciertas condiciones, el filtro minimiza la probabilidad de error cuando recibe señales digitales.

TEOREMA. *El **filtro acoplado** es el filtro lineal que maximiza* $(S/N)_{\text{salida}} = s_0^2(t_0)/\overline{n_0^2(t)}$ *de la figura 6–15 y que tiene una función de transferencia dada por*[14]

$$H(f) = K\frac{S^*(f)}{\mathcal{P}_n(f)}\, e^{-j\omega t_0} \tag{6–155}$$

donde $S(f) = \mathcal{F}[s(t)]$ *es la transformada de Fourier de la señal de entrada conocida* $s(t)$ *con duración de T segundos,* $\mathcal{P}_n(f)$ *es la PSD del ruido de entrada,* t_0 *el tiempo de muestreo cuando se evalúa* $(S/N)_{\text{salida}}$ *y K una constante arbitraria real diferente de cero.*

Demostración. La señal de salida al tiempo t_0 es

$$s_0(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j\omega t_0}\, df$$

La potencia promedio del ruido de salida es

$$\overline{n_0^2(t)} = R_{n_0}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\mathcal{P}_n(f)\, df$$

Sustituyendo estas ecuaciones dentro de la ecuación (6-154) se tiene que

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)e^{j\omega t_0}\, df\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\mathcal{P}_n(f)\, df} \tag{6–156}$$

Se desea encontrar la $H(f)$ en particular que maximiza la $(S/N)_{\text{salida}}$. Esto puede obtenerse con la ayuda de la desigualdad de Schwarz,[15] la cual es

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} A(f)B(f)\, df\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |A(f)|^2\, df \int_{-\infty}^{\infty} |B(f)|^2\, df \tag{6–157}$$

[14] Parece que, en 1950, B. M. Dwork y T. S. George descubrieron primero en forma independiente esta formulación del filtro acoplado□D. O. North fue el primero en demostrar el resultado para el caso de ruido blanco, en 1943 [Root, 1987].

[15] En el apéndice (sección 6–10) al final de este capítulo se demuestra la desigualdad de Schwarz.

donde $A(f)$ y $B(f)$ pueden ser funciones complejas de la variable real f. Aún más, sólo se obtiene la igualdad cuando

$$A(f) = KB^*(f) \tag{6–158}$$

donde K es cualquier constante real arbitraria. La desigualdad de Schwarz puede emplearse para reemplazar el numerador al lado derecho de la ecuación (6−156) si

$$A(f) = H(f)\ \sqrt{\mathcal{P}_n(f)}$$

y

$$B(f) = \frac{S(f)\, e^{j\omega t_0}}{\sqrt{\mathcal{P}_n(f)}}$$

Entonces la ecuación (6-156) se convierte en

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} \leq \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \mathcal{P}_n(f)\, df \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(f)|^2}{\mathcal{P}_n(f)}\, df}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \mathcal{P}_n(f)\, df}$$

donde se observa que $\mathcal{P}_n(f)$ es una función real no negativa. Por lo tanto,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(f)|^2}{\mathcal{P}_n(f)}\, df \tag{6–159}$$

La máxima $(S/N)_{\text{salida}}$ se obtiene cuando se escoge $H(f)$ de tal forma que se llegue a la igualdad. Esto ocurre cuando $A(f) = KB^*(f)$, o

$$H(f)\ \sqrt{\mathcal{P}_n(f)} = \frac{KS^*(f)\, e^{-j\omega t_0}}{\sqrt{\mathcal{P}_n(f)}}$$

la cual se reduce a la ecuación (6−155) del teorema.

Desde un punto de vista práctico, se observa que la constante K es arbitraria, ya que tanto la señal como el ruido de entrada se multiplicarían por K, y ésta se cancela al evaluarse $(S/N)_{\text{salida}}$. Sin embargo, los niveles tanto de la señal como el ruido de salida dependen del valor de la constante.

En esta demostración no se aplicó ninguna restricción para asegurar que $h(t)$ fuera causal. Por lo tanto, el filtro que se especifica mediante la ecuación (6−155) puede no ser realizable (es decir, causal). Sin embargo, la función de transferencia dada por dicha ecuación a menudo puede aproximarse por un filtro realizable (causal). Si se incluye la restricción de causalidad (en la solución para el filtro acoplado), el problema se vuelve más difícil y se deberá resolver una ecuación integral lineal para obtener la función $h(t)$ desconocida [Thomas, 1969].

Resultados para el ruido blanco

Para el caso del ruido blanco, la descripción del filtro acoplado se simplifica como sigue: para el ruido blanco, $\mathcal{P}_n(f) = N_0/2$. Por lo tanto, la ecuación (6-155) se convierte en

$$H(f) = \frac{2K}{N_0}\ S^*(f)e^{-j\omega t_0}$$

El siguiente teorema se obtiene a partir de esta ecuación.

TEOREMA. *Cuando el ruido de entrada es blanco, la respuesta al impulso del filtro acoplado se convierte en*

$$h(t) = Cs(t_0 - t) \tag{6–160}$$

donde C es una constante positiva real arbitrara, t_0 el tiempo de la señal pico de salida y $s(t)$ la forma de onda de la señal de entrada conocida.

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned} h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(f)] &= \frac{2K}{N_0}\ \int_{-\infty}^{\infty} S^*(f)\ e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}\ df \\ &= \frac{2K}{N_0}\ \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{j2\pi f(t_0-t)}\ df\right]^* \\ &= \frac{2K}{N_0}\ [s(t_0 - t)]^* \end{aligned}$$

Pero $s(t)$ es una señal real□por ende, sea $C = 2K/N_0$, de tal manera que la respuesta al impulso sea equivalente a la ecuación (6-160).

La ecuación (6-160) muestra que la respuesta al impulso del filtro acoplado (para el caso de ruido blanco) es simplemente la forma de onda de la señal conocida que se "reproduce en reversa" y se traslada por una cantidad t_0 (como se ilustra en el ejemplo 6–11). Por tanto, se dice que el filtro se "acopla" a la señal.

Una propiedad importante es el valor actual de $(S/N)_{\text{salida}}$ que se obtiene a partir del filtro acoplado. De la ecuación (6-159) y utilizando el teorema de Parseval como se presenta en la ecuación (2–41) se obtiene que

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(f)|^2}{N_0/2}\ df = \frac{2}{N_0}\ \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\ dt$$

Pero $\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\ dt = E_s$ es la energía en la señal de entrada (de finita duración). Por ende,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \frac{2E_s}{N_0} \tag{6–161}$$

Este es un resultado bastante interesante, pues establece que $(S/N)_{\text{salida}}$ depende de la *energía* de la señal y del nivel de la PSD del ruido, y no de la forma de onda en particular de la señal que se emplea. Por supuesto que la energía de la señal puede aumentarse para mejorar la $(S/N)_{\text{salida}}$ si se aumenta la amplitud de la señal, la duración de la señal o ambas.

La ecuación (6-161) también puede escribirse en términos de un producto de tiempo por el ancho de banda y la razón de la potencia promedio de la señal de entrada (sobre T segundos) sobre la potencia promedio del ruido. Suponga que la potencia del ruido de entrada se mide en una banda que tiene un ancho de W hertz. Se sabe además que la señal tiene una duración de T segundos. Entonces, a partir de la ecuación (6-161),

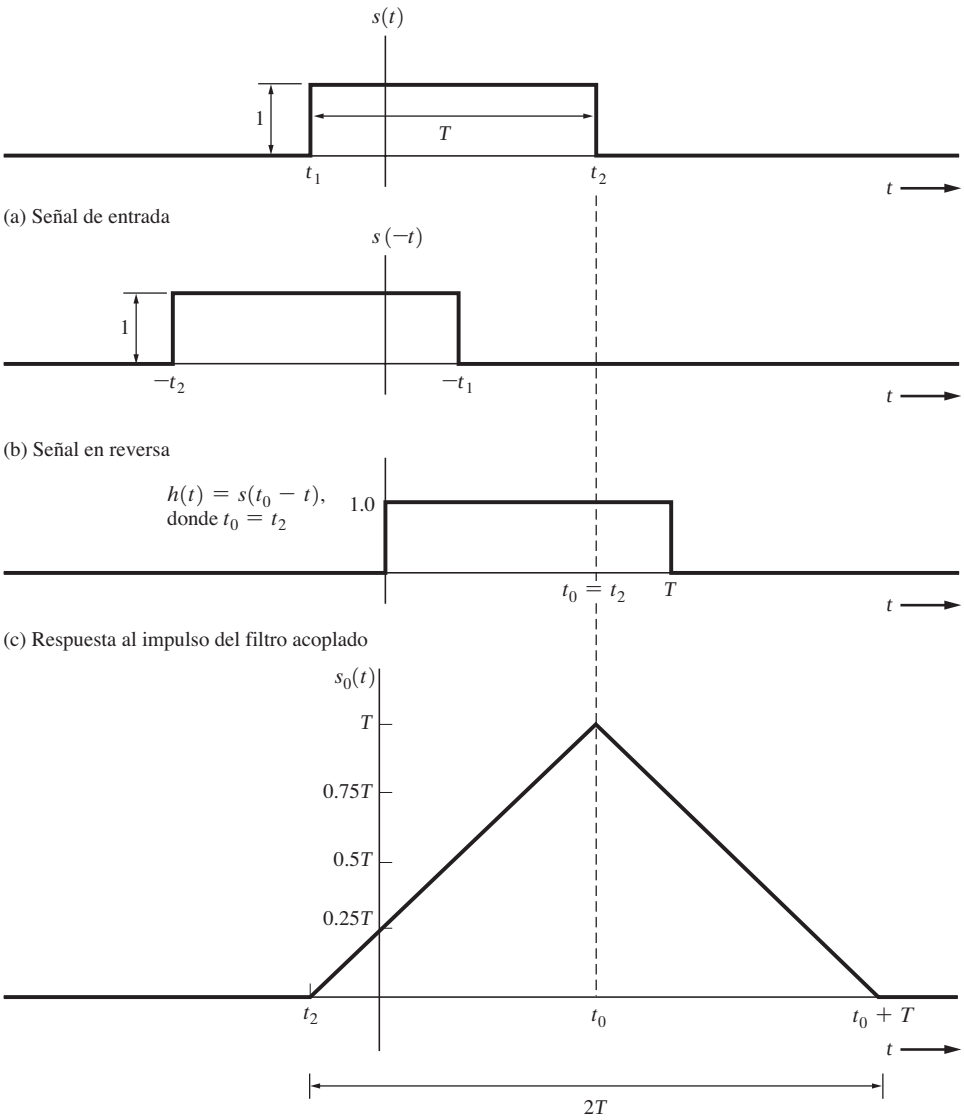


Figura 6–16 Formas de onda asociadas con el filtro acoplado del ejemplo 6−11.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = 2TW\ \frac{(E_s/T)}{(N_0W)} = 2(TW)\ \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{entrada}} \tag{6–162}$$

donde $(S/N)_{\text{entrada}} = (E_s/T)/(N_0W)$. A partir de la ecuación (6−162) se observa que un aumento en el producto del tiempo por el ancho de banda (TW) no cambia la SNR de salida, ya que la SNR de entrada disminuye correspondientemente. En aplicaciones de radares, un aumento en el TW propor-

ciona un incremento en la habilidad para resolver (distinguir) blancos, en lugar de presentar blancos combinados. La ecuación (6−161) muestra claramente que es la energía de la señal de entrada con respecto a N_0 lo que realmente determina la $(S/N)_{\text{salida}}$ que se obtiene [Turin, 1976].

Ejemplo 6–11 FILTRO DE INTEGRACIÓN Y DESCARGA (ACOPLADO)

Suponga que la señal conocida es el pulso rectangular que se muestra en la figura 6-16a:

$$s(t) = \begin{cases} 1, & t_1 \le t \le t_2 \\ 0, & t \quad \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{6–163}$$

La duración de la señal es $T = t_2 - t_1$. Entonces, para el caso de ruido blanco, la respuesta al impulso requerida para el filtro acoplado es

$$h(t) = s(t_0 - t) = s(-(t - t_0)) \tag{6–164}$$

Se escogió una C igual a la unidad por conveniencia, y $s(-t)$ se muestra en la figura 6-16b. A partir de esta figura resulta obvio que, para que la respuesta al impulso sea causal, se requiere que

$$t_0 \ge t_2 \tag{6–165}$$

Se usará $t_0 = t_2$ debido a que este es el valor más pequeño permitido que satisface la condición de causalidad y se desea minimizar el tiempo que se debe esperar antes de que ocurra el máximo nivel de la señal a la salida del filtro (es decir, $t = t_0$). En la figura 6-16c se muestra un diagrama de $h(t)$ para $t_0 = t_2$. La señal de salida resultante se muestra en la figura 6-16d. Note que el nivel pico de la señal de salida ocurre de hecho cuando $t = t_0$ y que la forma de onda de la señal de entrada se ha distorsionado por causa del filtro para llevar a que la señal de salida llegue a su pico cuando $t = t_0$.

En las aplicaciones de señalización digital con una forma de bit rectangular, este filtro acoplado es equivalente a un *filtro de integración y descarga*, como se ilustrará a continuación. Suponga que se envía una señal con un pulso rectangular y que se desea muestrear la salida del filtro cuando el nivel de la señal es de su máximo. Entonces la salida del filtro en $t = t_0$ es

$$r_0(t_0) = r(t_0) * h(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda)\, h(t_0 - \lambda)\, d\lambda$$

Cuando se sustituye para la respuesta al impulso del filtro acoplado que se muestra en la figura 6−16c, esta ecuación se convierte en

$$r_0(t_0) = \int_{t_0 - T}^{t_0} r(\lambda)\, d\lambda \tag{6–166}$$

Por lo tanto, se requiere integrar la señal digital de entrada además del ruido sobre un periodo de símbolo T (el cual es el periodo de bit para la señalización binaria) y "descargar" la salida del integrador al final del periodo de símbolo. Esto se ilustra en la figura 6-17 para la señalización binaria. Note que para la operación adecuada de este filtro óptimo se requiere de una señal de sincronización externa llamada *sincronización de bit* (consulte el capítulo 3 para una discusión acerca de los sincronizadores de bit). Además, la señal de salida no es binaria, ya que el ruido continúa distorsionando las muestras de salida (aunque dicho ruido se ha minimizado gracias al filtro acoplado). La salida puede convertirse en una señal binaria si ésta se alimenta de un comparador, lo cual es exactamente lo que se lleva a cabo en los receptores digitales, como se describirá en el capítulo 7.

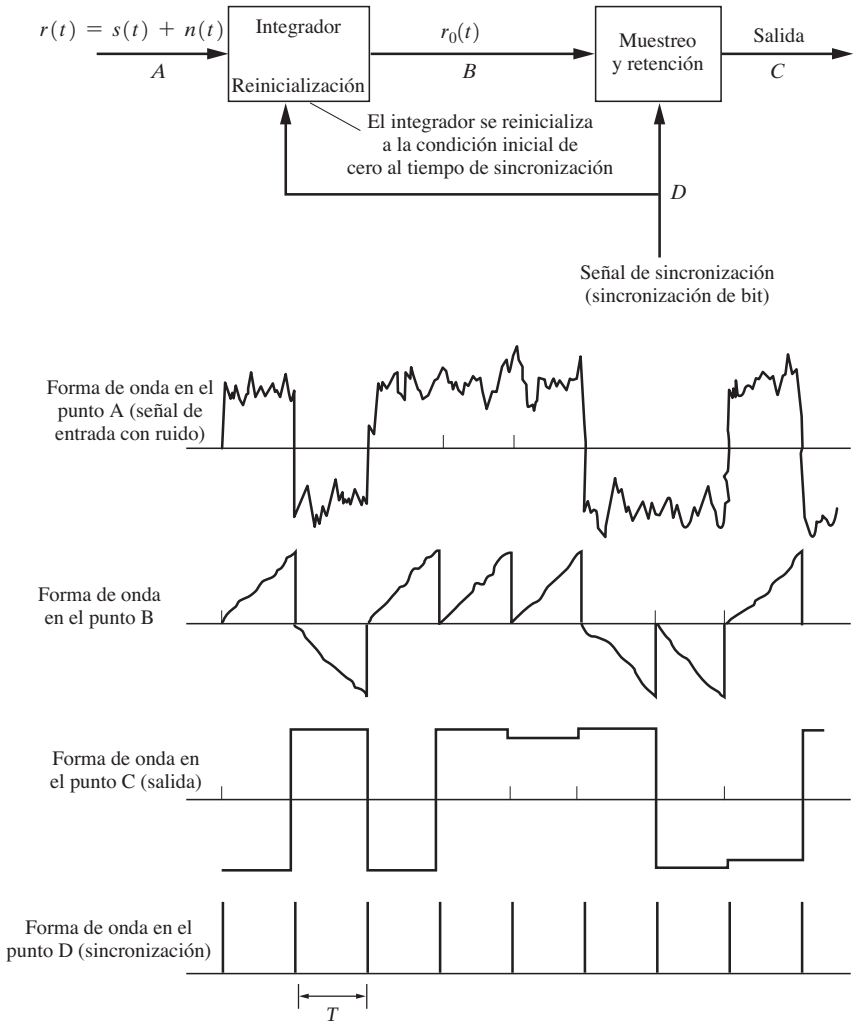


Figura 6–17 Integración y descarga de un filtro acoplado.

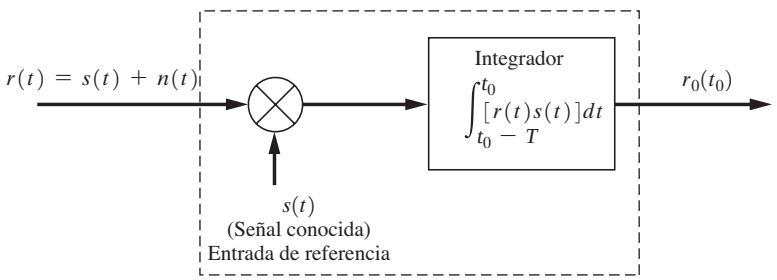


Figura 6–18 Realización del filtro acoplado mediante el procesamiento de correlación.

Procesamiento de correlación

TEOREMA. *Para el caso de ruido blanco, el filtro acoplado puede realizarse si se correlaciona la entrada con $s(t)$; es decir,*

$$r_0(t_0) = \int_{t_0-T}^{t_0} r(t)\,s(t)\,dt \tag{6–167}$$

donde $s(t)$ es la forma de onda de la señal conocida y $r(t)$ la entrada al procesador, como se ilustra en la figura 6-18.

Demostración. La salida del filtro acoplado en el tiempo t_0 es

$$r_0(t_0) = r(t_0) * h(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} r(\lambda)\,h(t_0-\lambda)\,d\lambda$$

Pero de la ecuación (6-160) se tiene que

$$h(t) = \begin{cases} s(t_0 - t), & 0 \le t \le T \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

así que

$$r_0(t_0) = \int_{t_0-T}^{t_0} r(\lambda)\,s[t_0-(t_0-\lambda)]\,d\lambda$$

lo cual es idéntico a la ecuación (6-167).

El procesador de correlación a menudo se utiliza como filtro acoplado para señales pasabanda, como se ilustra en el ejemplo 6-12.

Ejemplo 6–12 FILTRO ACOPLADO PARA LA DETECCIÓN DE UNA SEÑAL BPSK

Considerando la figura 6-18, suponga que la entrada del filtro es una señal BPSK con ruido. Por ejemplo, esto puede ser la salida de IF de un receptor de BPSK. La señal BPSK puede escribirse como

$$s(t) = \begin{cases} +A\ \cos\ \omega_c t, & nT < t \le (n+1)T \quad \text{para un 1 binario} \\ -A\ \cos\ \omega_c t, & nT < t \le (n+1)T \quad \text{para un 0 binario} \end{cases}$$

donde f_c es la frecuencia central de IF, T la duración de un bit de datos y n un entero. La entrada de referencia al procesador de correlación debe ser de $+A\cos\omega_c t$ o de $-A\cos\omega_c t$, dependiendo de si se intenta detectar un 1 binario o un 0 binario. Debido a que estas formas de onda son idénticas excepto por las constantes de ± 1, se puede usar el $\cos\omega_c t$ para la referencia y reconocer que cuando exista una señal BPSK de un 1 binario presente a la entrada (sin ruido) entonces se producirá un voltaje positivo de $\frac{1}{2}AT$ a la salida. De manera similar, una señal BPSK de un 0 binario producirá un voltaje negativo de $-\frac{1}{2}AT$ a la salida. Por lo tanto, para una señalización BPSK con ruido blanco se obtiene el filtro acoplado que se muestra en la figura 6-19. Note que esto se asemeja al detector de producto que ya le es familiar, excepto que el LPF se ha reemplazado por un integrador de compuerta que se controla mediante el reloj de sincronización de bit. Con este tipo de procesamiento después de la detección, el detector de producto se vuelve un filtro acoplado. Sin embargo, para implementar tal detector óptimo, se requiere tanto un sincronizador de bit como un sincronizador de portadora. La técnica que se muestra en la figura 6-19 puede

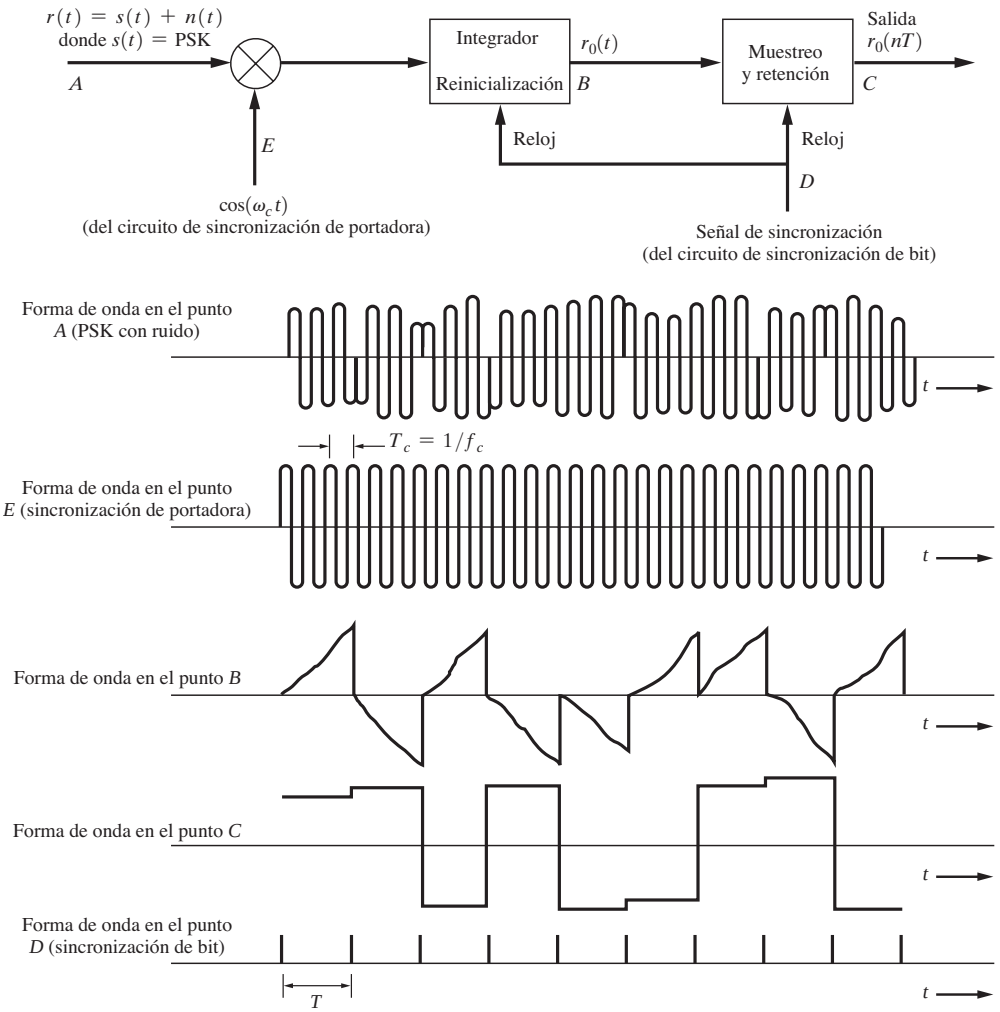


Figura 6–19 Detección de correlación (filtro acoplado) para BPSK.

clasificarse como una forma más general de un filtro integración y descarga (que se muestra primero en la figura 6-17).

Filtro transversal acoplado

También se puede diseñar un filtro transversal para satisfacer el criterio de filtros acoplados. Considerando la figura 6–20, se desea encontrar el conjunto de coeficientes para el filtro transversal $\{a_i \square i = 1, 2, \ldots, N\}$ de tal forma que se maximice $s_0^2(t_0)/\overline{n_0^2(t)}$. La señal de salida al tiempo $t = t_0$ es

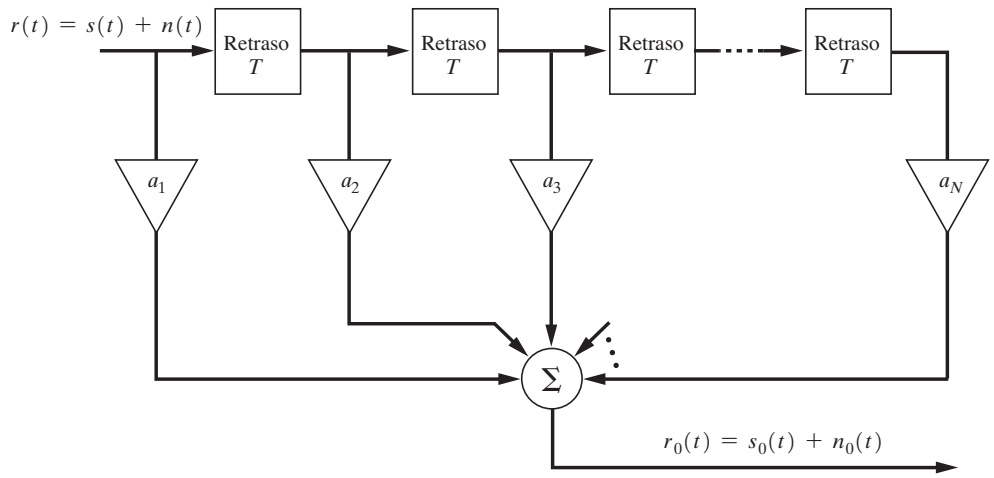


Figura 6–20 Filtro transversal acoplado.

$$s_0(t_0) = a_1 s(t_0) + a_2 s(t_0 - T) + a_3 s(t_0 - 2T) + \ldots + a_N s(t_0 - (N-1)T)$$

o

$$s_0(t_0) = \sum_{k=1}^{N} a_k s(t_0 - (k-1)T) \tag{6–168}$$

De manera similar, para el ruido de salida,

$$n_0(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k n(t - (k-1)T) \tag{6–169}$$

La potencia promedio de ruido es

$$\overline{n_0^2(t)} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} a_k a_l \overline{n(t-(k-1)T)n(t-(l-1)T)}$$

o

$$\overline{n_0^2(t)} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} a_k a_l R_n(kT - lT) \tag{6–170}$$

donde $R_n(\tau)$ es la autocorrelación del ruido de entrada. Por tanto, la relación señal pico de salida a potencia promedio de ruido es

$$\frac{s_0^2(t_0)}{\overline{n_0^2(t)}} = \frac{\left[\sum_{k=1}^{N} a_k s(t_0 - (k-1)T)\right]^2}{\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} a_k a_l R_n(kT - lT)} \tag{6–171}$$

Se pueden encontrar los términos a_k que maximicen esta relación empleando el método de Lagrange para maximizar el numerador y al mismo tiempo restringir que el denominador sea una constante [Olmsted, 1961, p. 518.] En consecuencia, se requiere maximizar la función

$$M(a_1, a_2, \ldots, a_N) = \left[\sum_{k=1}^{N} a_k s(t_0 - (k-1)T)\right]^2 - \lambda \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} a_k a_l R_n(kT - lT) \tag{6–172}$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange. El máximo ocurre cuando $\partial M/\partial a_i = 0$ para toda $i = 1, 2, \ldots, N$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial M}{\partial a_i} = 0 = 2\left[\sum_{k=1}^{N} a_k s(t_0 - (k-1)T)\right] s(t_0 - (i-1)T) - 2\lambda \sum_{k=1}^{N} a_k R_n(kT - iT) \tag{6–173}$$

para $i = 1, 2, \ldots, N$. Pero $\sum_{k=1}^{N} a_k s(t_0 - (k-1)T) = s_0(t_0)$, lo cual es una constante. Aún más, sea $\lambda = s_0(t_0)$. Entonces se obtiene la condición requerida,

$$s(t_0 - (i-1)T) = \sum_{k=1}^{N} a_k R_n(kT - iT) \tag{6–174}$$

para $i = 1, 2, \ldots, N$. Éste es un conjunto de N ecuaciones lineales simultáneas que deben resolverse para obtener las a. Estos coeficientes se obtienen convenientemente si se escribe la ecuación (6-174) en forma matricial. Se definen los elementos

$$s_i \triangleq s[t_0 - (i-1)T], \qquad i = 1, 2, \ldots, N \tag{6–175}$$

y

$$r_{ik} = R_n(kT - iT), \qquad i = 1, \ldots, N \tag{6–176}$$

En nomenclatura matricial, la ecuación (6-174) se convierte en

$$\mathbf{s} = \mathbf{Ra} \tag{6–177}$$

donde el vector de la señal conocida es

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix} \tag{6–178}$$

la matriz de autocorrelación conocida para el ruido de entrada es

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1N} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{N1} & r_{N2} & \cdots & r_{NN} \end{bmatrix} \tag{6–179}$$

y el vector de coeficientes del filtro transversal conocido es

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \tag{6–180}$$

Los coeficientes para el filtro transversal acoplado se obtienen a partir de

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{s} \tag{6–181}$$

donde $\mathbf{R}^{-1}$ es la inversa de la matriz de autocorrelación para el ruido y $\mathbf{s}$ es el vector de señal (conocido).

6–9 RESUMEN

Un *proceso aleatorio* es la extensión del concepto de una variable aleatoria a formas de onda aleatorias. Un proceso aleatorio $x(t)$ se describe por una PDF N–dimensional, donde las variables aleatorias son $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x_2(t_2)$, . . ., $x_N = x(t_N)$. Si esta PDF es invariante para un desplazamiento en el origen del tiempo, conforme $N \to \infty$, entonces el proceso es *estacionario en el sentido estricto*.

La *función de autocorrelación* de un proceso aleatorio $x(t)$ es

$$R_x(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)x(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_x(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

En general, se requiere de una PDF bidimensional de $x(t)$ para evaluar $R_x(t_1, t_2)$. Si el proceso es estacionario,

$$R_x(t_1, t_2) = \overline{x(t_1)x(t_1 + \tau)} = R_x(\tau)$$

donde $\tau = t_2 - t_1$.

Si $\overline{x(t)}$ es una constante y si $R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau)$, el proceso es *estacionario en el sentido amplio*. Si un proceso es estacionario en el sentido estricto, entonces es también estacionario en el sentido amplio, pero no a la inversa.

Un proceso es *ergódico* cuando los promedios de tiempo son iguales a los promedios conjuntos correspondientes. Si un proceso es ergódico éste es también estacionario, pero no al revés. Para

procesos ergódicos, el valor de DC (un promedio de tiempo) es también de $X_{dc} = \overline{x(t)}$ y el RMS (un promedio de tiempo) es también de $X_{rms} = \sqrt{\overline{x^2(t)}}$.

La *densidad espectral de potencia* (PSD), $\mathcal{P}_x(f)$, es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación $R_x(\tau)$ (el teorema de Wiener–Khintchine):

$$\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)]$$

La PSD es una función real no negativa y es par alrededor de $f = 0$ para procesos reales. La PSD también puede evaluarse mediante el promedio conjunto de una función de las transformadas de Fourier de las funciones muestrales truncadas.

La función de autocorrelación de un proceso aleatorio real estacionario en el sentido amplio es una función real, y es par alrededor de $\tau = 0$. Aún más, $R_x(0)$ proporciona la potencia promedio normalizada total, y ésta es el máximo valor de $R_x(\tau)$.

Para *ruido blanco*, la PSD es una constante, y la función de autocorrelación es una función delta de Dirac ubicada en $\tau = 0$. El ruido blanco no es físicamente realizable porque posee potencia infinita, pero ésta es una aproximación de gran utilidad para muchos problemas.

La función de correlación cruzada de dos procesos reales conjuntamente estacionarios $x(t)$ y $y(t)$ es

$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t)y(t + \tau)}$$

y la PSD cruzada es

$$\mathcal{P}_{xy}(f) = \mathcal{F}[R_{xy}(\tau)]$$

Se dice que los dos procesos *no están correlacionados* si

$$R_{xy}(\tau) = [\overline{x(t)}][\overline{y(t)}]$$

para toda τ. Se dice que son ortogonales si

$$R_{xy}(\tau) = 0$$

para toda τ.

Sea $y(t)$ el proceso de salida de un *sistema lineal* y $x(t)$ el proceso de entrada, donde $y(t) = x(t) * h(t)$. Entonces

$$R_y(\tau) = h(-\tau) * h(t) * R_x(\tau)$$

y

$$\mathcal{P}_y(f) = |H(f)^2 \mathcal{P}_x(f)$$

donde $H(f) = \mathcal{F}[h(t)]$.

El *ancho de banda equivalente* de un sistema lineal se define mediante

$$B = \frac{1}{|H(f_0)|^2} \int_0^\infty |H(f)|^2 \, df$$

donde $H(f)$ es la función de transferencia del sistema y f_0 generalmente se considera la frecuencia donde $|H(f)|$ llega a su máximo. De manera similar, el ancho de banda equivalente de un proceso aleatorio $x(t)$ es

$$B = \frac{1}{\mathcal{P}_x(f_0)} \int_0^\infty \mathcal{P}_x(f) \, df = \frac{R_x(0)}{2\mathcal{P}_x(f_0)}$$

Si la entrada a un sistema lineal es un proceso gaussiano, la salida es otro proceso *gaussiano*.

Un *proceso aleatorio pasabanda* real estacionario puede representarse por

$$v(t) = \text{Re}\{g(t)e^{j(\omega_c t + \theta_c)}\}$$

donde la envolvente compleja $g(t)$ se relaciona con los procesos en cuadratura $x(t)$ y $y(t)$. Pueden obtenerse numerosas propiedades de estos procesos aleatorios, y se listan en la sección 6–7. Por ejemplo, $x(t)$ y $y(t)$ son procesos gaussianos independientes cuando la PSD de $v(t)$ es simétrica alrededor de $f = f_c$, $f > 0$, y $v(t)$ es gaussiano. También se obtienen propiedades para los procesos de SSB pasabanda.

El *filtro acoplado* es un filtro lineal que maximiza la potencia instantánea de la señal de salida a la potencia promedio del ruido de salida para una forma de onda de señal de entrada dada. Para el caso de ruido blanco, la respuesta al impulso del filtro acoplado es

$$h(t) = Cs(t_0 - t)$$

donde $s(t)$ es la forma de onda de la señal conocida, C una constante real y t_0 el tiempo en el cual la potencia de la señal de salida es un máximo. El filtro acoplado puede llevarse a cabo de muchas maneras, como las configuraciones de integración y descarga, de correlacionador y de filtro transversal.

6–10 APÉNDICE: DEMOSTRACIÓN DE LA DESIGUALDAD DE SCHWARZ

La desigualdad de Schwarz es

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\ dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\ dt \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\ dt \tag{6–182}$$

y se convierte en una *igualdad* si y sólo si

$$f(t) = Kg^*(t) \tag{6–183}$$

donde K es una constante real arbitraria. $f(t)$ y $g(t)$ pueden tener valores complejos. Se asume que tanto $f(t)$ como $g(t)$ poseen energía finita. Es decir,

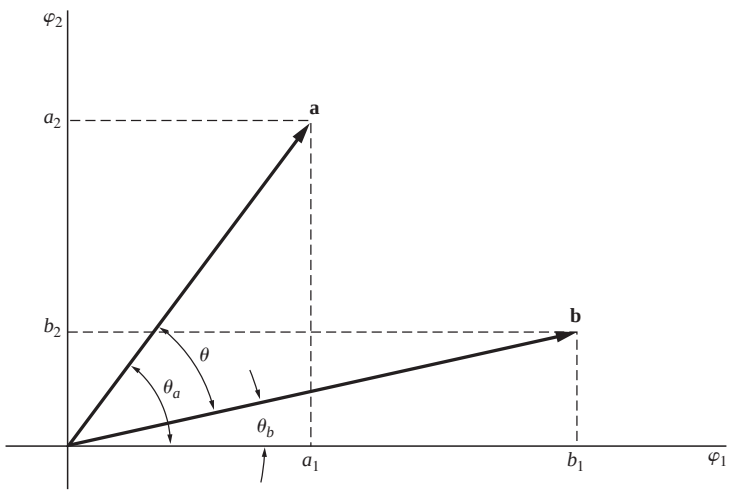


Figura 6–21 Representaciones vectoriales de $a(t)$ y $b(t)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt < \infty \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\, dt < \infty \tag{6–184}$$

Demostración. La desigualdad de Schwarz es equivalente a la desigualdad

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\, dt \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt}\ \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\, dt} \tag{6–185}$$

Además de esto,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\ dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)g(t)|\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)||g(t)|\ dt \tag{6–186}$$

y la desigualdad se mantiene si se satisface la ecuación (6–183). Por lo tanto, si se puede demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)||g(t)|\ dt \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left|f(t)\right|^2\ dt}\ \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\ dt} \tag{6–187}$$

entonces se ha demostrado también la desigualdad de Schwarz. Para simplificar la nomenclatura se reemplazan $|f(t)|$ y $|g(t)|$ con las funciones de valores reales $a(t)$ y $b(t)$, donde

$$a(t) = |f(t)| \tag{6–188a}$$

y

$$b(t) = |g(t)| \tag{6–188b}$$

Entonces se requiere mostrar que

$$\int_{a}^{b} a(t)b(t)\ dt < \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} a^2(t)\, dt}\ \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} b^2(t)\, dt} \tag{6–189}$$

Esto puede mostrarse fácilmente ocupando una serie funcional ortonormal para representar a $a(t)$ y $b(t)$. Sea

$$a(t) = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) \tag{6–190a}$$

y

$$b(t) = b_1\varphi_1(t) + b_2\varphi_2(t) \tag{6–190b}$$

donde, como se describe en el capítulo 2, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ representan a $a(t)$ y $b(t)$, respectivamente. Estas relaciones se ilustran en la figura 6-21.

Entonces, empleando la figura, se obtiene que

$$\cos\theta = \cos(\theta_a - \theta_b) = \cos\theta_a\ \cos\theta_b + \text{sen}\ \theta_a\ \text{sen}\ \theta_b = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}\ \frac{b_1}{|\mathbf{b}|} + \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}\ \frac{b_2}{|\mathbf{b}|}$$

o

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|} \tag{6–191}$$

Aún más, el producto escalar es equivalente al producto interno:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\, b(t)\, dt \tag{6–192a}$$

[Esto puede demostrarse si se sustituyen $a(t) = \Sigma a_j \varphi_j(t)$ y $b(t) = \Sigma b_k \varphi_k(t)$ dentro de la integral, donde $\varphi_j(t)$ y $\varphi_k(t)$ son funciones reales ortonormales.]

A partir del teorema de Pitágoras, las longitudes (o normas) de los vectores **a** y **b** son

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} a^2(t)\, dt} \tag{6–192b}$$

y

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} b^2(t)\, dt} \tag{6–192c}$$

□a que $|\cos\theta| \leq 1$, se tiene que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} a(t) b(t)\, dt \right| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} a^2(t)\, dt} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} b^2(t)\, dt} \tag{6–193}$$

donde la igualdad se obtiene cuando se sustituye

$$\mathbf{a} = K\mathbf{b} \tag{6–194}$$

Utilizando la ecuación (6-188), cuando $f(t) = Kg^*(t)$, se encuentra que la ecuación (6-194) también se satisface, de tal forma que se obtiene la igualdad. Por lo tanto, la demostración de la ecuación (6-193) demuestra la desigualdad de Schwarz.

6–11 EJEMPLOS DE ESTUDIO

SA6–1 PDF para una variable aleatoria gaussiana linealmente transformada Sea $y(t) = A\cos(10\pi t)$ un proceso aleatorio, donde A es un proceso de variable aleatoria gaussiana con media de cero y varianza σ_A^2. Encuentre la PDF para $y(t)$. □Es $y(t)$ WSS?

Solución $y(t)$ es una función lineal de A. Por lo tanto, es gaussiana debido a que A es gaussiana (consulte la sección 6–6). □a que $\bar{A} = 0$,

$$m_y = \overline{y(t)} = \bar{A}\cos(10\pi t) = 0 \tag{6–195a}$$

y

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \overline{m_y^2} = \overline{A^2}\cos^2(10\pi t) = \sigma_A^2 \cos^2(10\pi t) \tag{6–195b}$$

Por lo tanto, la PDF para $y(t)$ es

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y^2}\, e^{-y^2/2\sigma_y^2} \tag{6–195c}$$

donde σ_y^2 se obtiene de la ecuación (6–195b). Además, $y(t)$ no es WSS, ya que

$$R_y(0) = \sigma_y^2 + m_x^2 = \sigma_A^2 \cos^2(10\pi t)$$

es una función de t.

SA6–2 Media a la salida de un filtro lineal Derive una expresión para la media de la salida de un filtro lineal invariante en el tiempo si la entrada $x(t)$ es un proceso WSS aleatorio.

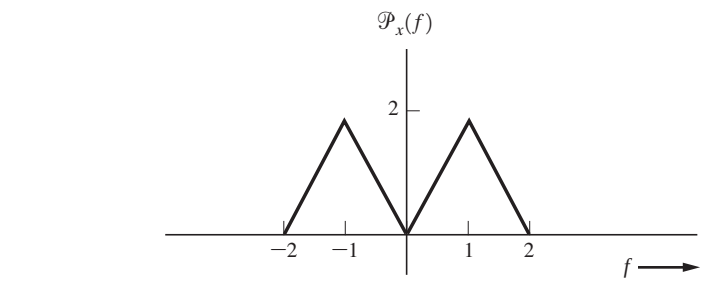
Solución La salida del filtro es

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

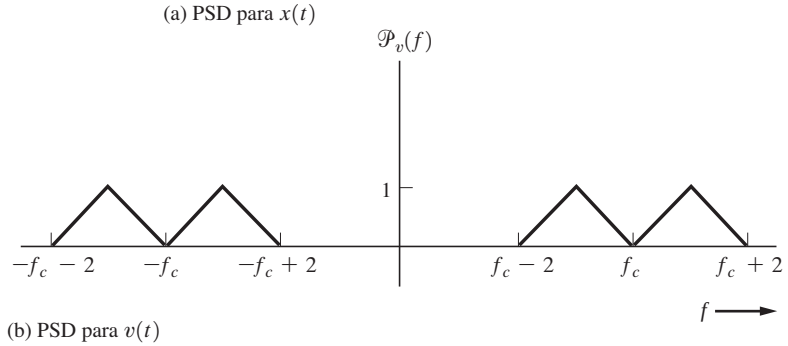
donde $h(t)$ es la respuesta al impulso del filtro. Tomando el valor esperado se tiene que

$$m_y = \overline{y(t)} = \overline{h(t) * x(t)} = h(t) * \overline{x(t)} = h(t) * m_x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, m_x d\lambda = m_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, d\lambda \tag{6–196}$$



(a) PSD para $x(t)$



(b) PSD para $v(t)$

Figura 6–22 PSD para SA6-4.

Sin embargo, la función de transferencia del filtro es

$$H(f) = \mathcal{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\ e^{-j2\pi ft}\ dt$$

de tal forma que $H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\ dt$. Por lo tanto, la ecuación (6–196) se reduce a

$$m_y = m_x H(0) \tag{6–197}$$

SA6–3 Potencia promedio a la salida de un diferenciador Sea $y(t) = dn(t)/dt$, donde $n(t)$ es un proceso de ruido aleatorio que tiene una PSD de $\mathcal{P}_n(f) = N_0/2 = 10^{-6}$ W/Hz. Evalúe la potencia normalizada de $y(t)$ sobre una banda de frecuencias pasabanda de $B = 10$ Hz.

Solución $\mathcal{P}_y(f) = |H(f)|^2\ \mathcal{P}_n(f)$, donde, de la tabla 2-1, se tiene que $H(f) = j2\pi f$ para un diferenciador.

Por lo tanto,

$$P_y = \int_{-B}^{B} \mathcal{P}_y(f)\ df = \int_{-B}^{B} (2\pi f)^2\ \frac{N_0}{2}\ df = \frac{8\pi^2}{3}\ \left(\frac{N_0}{2}\right) B^3$$

o

$$P_y = \frac{8\pi^2}{3}\ (10^{-6})\ (10^3) = 0.0263\ \text{W} \tag{6–198}$$

SA6–4 PSD para un proceso pasabanda Un proceso pasabanda se describe mediante

$$v(t) = x(t)\ \cos(\omega_c t + \theta_c) - y(t)\ \text{sen}\,(\omega_c t + \theta_c)$$

donde $y(t) = x(t)$ es un proceso WSS con una PSD, como se muestra en la figura 6–22a, θ_c es una variable aleatoria independiente uniformemente distribuida sobre $(0, 2\pi)$. Encuentre la PSD para $v(t)$.

Solución A partir de la ecuación (6-130) se sabe que $v(t)$ es un proceso WSS pasabanda, donde $\mathcal{P}_v(f)$ se obtiene de la ecuación (6-133d). Por lo tanto, se requiere evaluar $\mathcal{P}_g(f)$. También,

$$v(t) = \text{Re}\{g(t)\, e^{j(\omega_c t + \theta_c)}\}$$

donde $g(t) = x(t) + jy(t) = x(t) + jx(t) = (1 + j)x(t)$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} R_g(\tau) &= \overline{g^*(t)\, g(t+\tau)} = \overline{(1 - j)\,(1 + j)\, x(t)\, x(t+\tau)} \\ &= (1+1)\, R_x(\tau) = 2R_x(\tau) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{P}_g(f) = 2\mathcal{P}_x(f) \tag{6–199}$$

Sustituyendo la ecuación (6-199) dentro de la ecuación (6–133d) se tiene que

$$\mathcal{P}_v(f) = \frac{1}{2}\,[\mathcal{P}_x(f - f_c) + \mathcal{P}_x(-f - f_c)] \tag{6–200}$$

En la figura 6–22b se grafica $\mathcal{P}_v(f)$ para la $\mathcal{P}_x(f)$ de la figura 6-22a.

PROBLEMAS

6–1 Sea un proceso aleatorio $x(t)$ que se define mediante

$$x(t) = At + B$$

(a) Si B es una constante y A está uniformemente distribuida entre −1 y +1, haga un diagrama de algunas funciones muestrales.

(b) Si A es una constante y B está uniformemente distribuida entre 0 y 2, haga un diagrama de algunas funciones muestrales.

★ **6–2** Sea un proceso aleatorio dado por

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$$

donde A y ω_0 son constantes y θ una variable aleatoria. Sea que

$$f(\theta) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}, & 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

(a) Evalúe $\overline{x(t)}$.

(b) A partir del resultado de la parte (a), ¿qué puede decirse acerca de la estacionalidad del proceso?

6–3 Empleando el proceso aleatorio que se describe en el problema 6–2.

(a) Evalúe $\langle x^2(t)\rangle$.

(b) Calcule $\overline{x^2(t)}$.

(c) Con los resultados de las partes (a) y (b), determine si el proceso es ergódico para estos promedios.

★ **6–4** Un voltímetro de lectura de promedios de AC convencional (multímetro de volt–ohm) tiene un diagrama esquemático como el que se muestra en la figura P6-4. La aguja del movimiento del voltímetro se desvía proporcionalmente a la corriente promedio que fluye a través del voltímetro. La escala del mismo se marca para generar el RMS de un voltaje de ruido. Se sabe que el voltaje de ruido es un proceso ergódico gaussiano que tiene una media igual a cero. ¿Cuál es el valor de la constante que se multiplica por la lectura del voltímetro para obtener el RMS verdadero del ruido gaussiano? (*Sugerencia:* el diodo es un corto circuito cuando el voltaje de entrada es positivo y un circuito abierto cuando el voltaje de salida es negativo.)

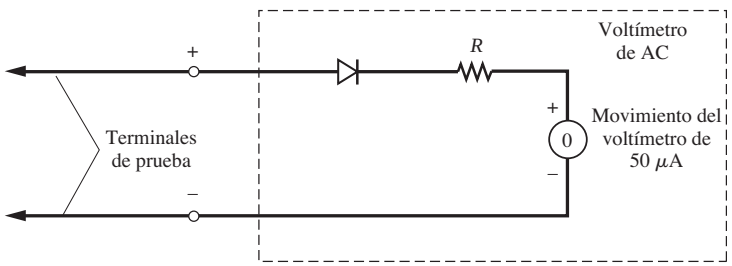


Figura P6–4

6–5 Sea $x(t) = A_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \theta)$ un proceso aleatorio, donde θ es una variable aleatoria que está uniformemente distribuida entre 0 y 2π y A_0 y ω_0 son constantes.
(a) Encuentre $R_x(\tau)$.
(b) Muestre que $x(t)$ es estacionario en el sentido amplio.
(c) Verifique que $R_x(\tau)$ satisface las propiedades apropiadas.

6–6 Sea $r(t) = A_0 \cos \omega_0 t + n(t)$, donde A_0 y ω_0 son constantes. Suponga que $n(t)$ es un proceso de ruido aleatorio estacionario en el sentido amplio con una media igual a cero y una autocorrelación de $R_n(\tau)$.
(a) Encuentre $\overline{r(t)}$ y determine si $r(t)$ es estacionario en el sentido amplio.
(b) Halle $R_r(t_1, t_2)$.
(c) Evalúe $\langle R_r(t, t+\tau)\rangle$, donde $t_1 = t$ y $t_2 = t + \tau$.

6–7 Sea un proceso aditivo de señal con ruido que se describe mediante la ecuación $r(t) = s(t) + n(t)$.
(a) Muestre que $R_r(\tau) = R_s(\tau) + R_n(\tau) + R_{sn}(\tau) + R_{ns}(\tau)$.
(b) Simplifique el resultado para la parte (a) para cuando $s(t)$ y $n(t)$ son independientes y el ruido tiene una media de cero.

★ **6–8** Considere la suma de dos voltajes de ruido ergódicos:

$$n(t) = n_1(t) + n_2(t)$$

La potencia de $n_1(t)$ es de 5 W y la de $n_2(t)$ es 10 W. El valor de DC de $n_1(t)$ es −2 V y el de DC n_2 es +1 V. Encuentre la potencia de $n(t)$ si
(a) n_1 y n_2 son ortogonales.
(b) n_1 y n_2 no están correlacionados.
(c) La correlación cruzada de n_1 y n_2 es 2 para $\tau = 0$.

6–9 Suponga que $x(t)$ es ergódico y sea $x(t) = m_x + y(t)$, donde $m_x = \overline{x(t)}$ es el valor de DC de $x(t)$, y $y(t)$ el componente de AC de $x(t)$. Muestre que
(a) $R_x(\tau) = m_x^2 + R_y(\tau)$.
(b) $\lim_{\tau \to \infty} R_x(\tau) = m_x^2$.
(c) ¿Se puede determinar el valor de DC de $x(t)$ a partir de $R_x(\tau)$?

★ **6–10** Determine si las siguientes funciones satisfacen las propiedades de las funciones de autocorrelación:
(a) $\operatorname{sen} \omega_0 \tau$.
(b) $(\operatorname{sen} \omega_0 \tau)/(\omega_0 \tau)$.
(c) $\cos \omega_0 \tau + \delta(\tau)$.
(d) $e^{-a|\tau|}$, donde $a < 0$.
(*Nota*: $\mathcal{F}[R(\tau)]$ debe también ser una función no negativa.)

6–11 Un proceso aleatorio $x(t)$ tiene una función de autocorrelación dada por $R_x(\tau) = 5 + 8e^{-3|\tau|}$. Encuentre:
(a) El RMS para $x(t)$.
(b) La PSD para $x(t)$.

★ **6–12** La autocorrelación para un proceso aleatorio es $R_x(\tau) = 4e^{-\tau^2} + 3$. Grafique la PSD para $x(t)$ y evalúe el ancho de banda de RMS para $x(t)$.

6–13 Muestre que dos procesos aleatorios $x(t)$ y $y(t)$ no están correlacionados (es decir, $R_{xy}(\tau) = m_x m_y$) si los procesos son independientes.

6–14 Si $x(t)$ contiene componentes periódicos, muestre que:
(a) $R_x(\tau)$ contiene componentes periódicos.
(b) $\mathcal{P}_x(f)$ contiene funciones delta.

6–15 Encuentre la PSD para el proceso aleatorio que se describe en el problema 6-2.

6–16 Determine si las siguientes pueden ser funciones PSD válidas para un proceso real:
(a) $2e^{-2\pi|f-45|}$.
(b) $4e^{-2\pi[f^2-16]}$.
(c) $25+\delta(f-16)$.
(d) $10+\delta(f)$.

★ **6–17** La PSD de un proceso ergódico aleatorio $x(t)$ es

$$\mathcal{P}_x(f)=\begin{cases}\dfrac{1}{B}\ (B-|f|), & |f|\le B\\ 0, & f \text{ En cualquier otro caso}\end{cases}$$

donde $B>0$. Encuentre
(a) El RMS de $x(t)$.
(b) $R_x(\tau)$.

6–18 Remitiéndose a las técnicas que se describen en el ejemplo 6-3, evalúe la PSD para una señal PCM que utiliza codificación de Manchester NRZ (consulte la figura 3-15). Suponga que los datos tienen valores de $a_n=\pm 1$, los cuales son igualmente probables, y que aquéllos son independientes de bit a bit.

6–19 La respuesta de frecuencia de *magnitud* de una red lineal invariante en el tiempo se determinará a partir de una configuración de laboratorio, como se muestra en la figura P6–19. Discuta cómo $|H(f)|$ se evalúa a partir de las mediciones.

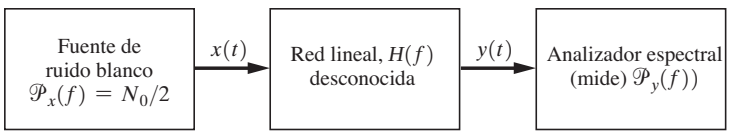


Figura P6–19

★ **6–20** Una red lineal invariante con el tiempo con una $H(f)$ desconocida se muestra en la figura 6-20.
(a) Encuentre una fórmula para evaluar $h(t)$ en términos de $R_{xy}(\tau)$ y N_0.
(b) Halle una fórmula para evaluar $H(f)$ en términos de $\mathcal{P}_{xy}(f)$ y N_0.

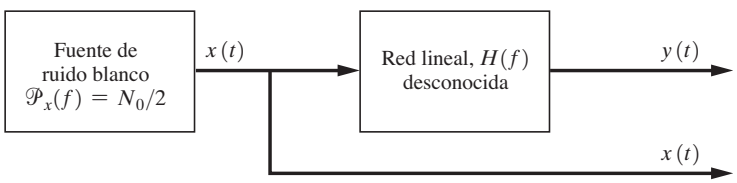


Figura P6–20

6–21 La salida de un sistema lineal se relaciona a la entrada mediante $y(t)=h(t)*x(t)$, donde $x(t)$ y $y(t)$ son conjuntamente estacionarios en el sentido amplio. Muestre que
(a) $R_{xy}(\tau)=h(\tau)*R_x(\tau)$.
(b) $\mathcal{P}_{xy}(f)=H(f)\mathcal{P}_x(f)$.
(c) $R_{yx}(\tau)=h(-\tau)*R_x(\tau)$.
(d) $\mathcal{P}_{yx}(f)=H^*(f)\mathcal{P}_x(f)$.
[*Sugerencia:* use las ecuaciones (6-86) y (6-87).]

★ **6–22** Se aplica ruido blanco ergódico con una PSD de $\mathcal{P}_n(f) = N_0/2$ a la entrada de un integrador ideal con una ganancia de K (un número real) tal que $H(f) = K/(j2\pi f)$.
(a) Halle la PSD para la salida.
(b) Encuentre el RMS para el ruido de salida.

6–23 Un sistema lineal tiene una función de transferencia de potencia $|H(f)|^2$, como se muestra en la figura P6–23. La entrada $x(t)$ es un proceso gaussiano aleatorio con una PSD dada por

$$\mathcal{P}_x(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}N_0, & |f| \leq 2B \\ 0, & f \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

(a) Determine la función de autocorrelación para la salida $y(t)$.

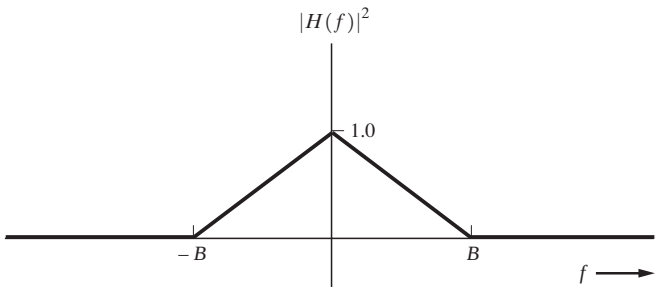


Figura P6–23

(b) Halle la PDF para $y(t)$.
(c) ¿Cuándo son independientes las dos variables $y_1 = y(t_1)$ y $y_2 = y(t_2)$?

6–24 Un filtro lineal evalúa la media móvil de T segundos de una forma de onda de entrada, donde la salida del filtro es

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-(T/2)}^{t+(T/2)} x(u)\, du$$

y $x(t)$ es la entrada.
(a) Compruebe que la respuesta al impulso es $h(t) = (1/T)\,\Pi(t/T)$.
(b) Muestre que

$$R_y(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left(1 - \frac{|u|}{T}\right) R_x(\tau - u)\, du$$

(c) Si $R_x(\tau) = e^{-|\tau|}$ y $T = 1$ segundo, grafique $R_y(\tau)$ y compárelo con $R_x(\tau)$.

★ **6–25** Como se muestra en el ejemplo 6–5, la relación señal a ruido de salida de un LPF *RC* se obtiene de la ecuación (6–95) cuando la entrada es una señal senoidal con ruido blanco. Derive el valor del producto *RC* de tal forma que la relación señal a ruido de salida sea un máximo.

6–26 Suponga que una onda seno de amplitud pico A_0 y frecuencia f_0, con ruido blanco con $\mathcal{P}_n(f) = N_0/2$, se aplica a un filtro lineal. La función de transferencia del filtro es

$$H(f) = \begin{cases} \dfrac{1}{B}\,(B - |f|), & |f| < B \\ 0, & f \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde B es el ancho de banda absoluto del filtro. Encuentre la relación señal a potencia de ruido para la salida del filtro.

6–27 Para el proceso aleatorio $x(t)$ con la PSD que se muestra en la figura P6-27, determine:
(a) El ancho de banda equivalente.
(b) El ancho de banda de RMS.

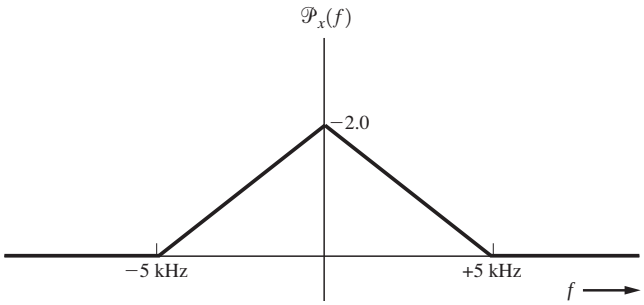


Figura P6–27

6–28 Si $x(t)$ es un proceso aleatorio pasabanda real que es estacionario en el sentido amplio, muestre que la definición del ancho de banda de RMS, ecuación (6-100), es equivalente a

$$B_{\text{rms}} = 2\sqrt{\overline{f^2} - (f_0)^2}$$

donde $\overline{f^2}$ se obtiene mediante la ecuación (6-98) o la ecuación (6-99) y f_0 se obtiene por la ecuación (6-102).

6–29 f_0 se emplea en la definición para el ancho de banda de RMS de un proceso aleatorio pasabanda. Muestre que

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_x(0)} \left(\frac{d\hat{R}_x(\tau)}{d\tau} \right)\Bigg|_{\tau=0}$$

donde $\hat{R}_x(\tau)$ es la transformada de Hilbert de $R_x(\tau)$.

★ **6–30** Dos LPF *RC* idénticos se acoplan en cascada mediante un amplificador aislante que tiene una ganancia de voltaje de 10.
(a) Encuentre la función de transferencia general de la red como una función de R y C.
(b) Halle el ancho de banda a 3 dB en términos de R y C.

6–31 Sea $x(t)$ un proceso gaussiano en donde dos variables aleatorias son $x_1 = x(t_1)$ y $x_2 = (t_2)$. Las variables aleatorias tienen varianzas de σ_1^2 y σ_2^2 y medias de m_1 y m_2. El coeficiente de correlación es

$$\rho = \overline{(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}/(\sigma_1\sigma_2)$$

Ocupando nomenclatura matricial para la PDF de $N = 2$ dimensiones, muestre que la ecuación para la PDF de $\mathbf{x}$ se reduce a la PDF gaussiana bivariante, como se obtiene de la ecuación (B–97).

6–32 Un proceso blanco gaussiano aleatorio limitado por banda tiene una función de autocorrelación que se especifica por la ecuación (6–125). Muestre que conforme $B \to \infty$, la función de autocorrelación se convierte en $R_n(\tau) = \frac{1}{2}N_0\delta(\tau)$.

★ **6–33** Sean dos procesos aleatorios $x(t)$ y $y(t)$ conjuntamente gaussianos con medias de cero. Es decir, $(x_1, x_2, \ldots, x_N, y_1, y_2, \ldots, y_M)$ se describe mediante una PDF gaussiana de $(N + M)$ dimensiones. La correlación cruzada es

$$R_{xy}(\tau) = \overline{x(t_1)y(t_2)} = 10 \text{ sen}(2\pi\tau)$$

(a) ¿Cuándo son independientes las variables aleatorias $x_1 = x(t_1)$ y $y_2 = y(t_2)$?
(b) Muestre si $x(t)$ y $y(t)$ son o no procesos aleatorios independientes.

6–34 Iniciando con la ecuación (6–121), muestre que

$$\mathbf{C}_y = \mathbf{H}\mathbf{C}_x\mathbf{H}^T$$

(*Sugerencia:* use la propiedad de la matriz identidad, $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad.)

★ **6–35** Considere el proceso aleatorio

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_c t + \theta)$$

donde A_0 y ω_0 son constantes y θ es una variable aleatoria que está uniformemente distribuida sobre el intervalo $(0, \pi/2)$.
(a) Determine si $x(t)$ es estacionario en el sentido amplio.
(b) Encuentre la PSD para $x(t)$.
(c) Si θ está uniformemente distribuida sobre $(0, 2\pi)$, ¿es $x(t)$ estacionario en el sentido amplio?

6–36 Un proceso WSS pasabanda aleatorio $v(t)$ se representa en la ecuación (6–129a), donde se satisfacen las condiciones para la ecuación (6–129). La PSD de $v(t)$ se muestra en la figura P6–36, donde $f_c = 1$ MHz. Utilizando MATLAB o MathCAD,
(a) Grafique $\mathcal{P}_x(f)$.
(b) Grafique $\mathcal{P}_{xy}(f)$.

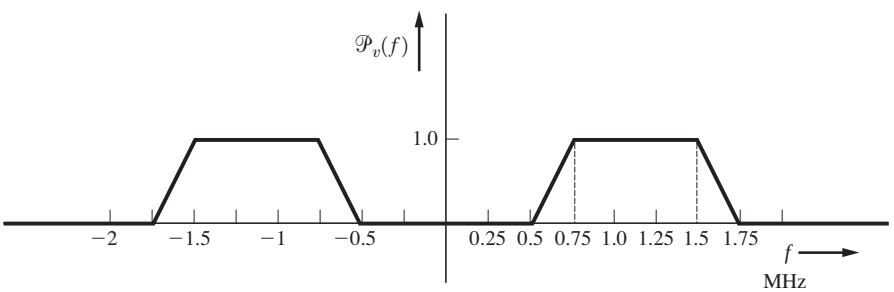


Figura P6–36

★ **6–37** La PSD de un proceso WSS pasabanda $v(t)$ se muestra en la figura P6–37. $v(t)$ es la entrada a un detector de producto y la señal del oscilador (es decir, la segunda entrada al multiplicador) es 5 cos $(\omega_c t + \theta_0)$, donde $f_c = 1$ MHz y θ_0 es una variable aleatoria independiente con una distribución uniforme sobre $(0, 2\pi)$. Empleando MATLAB o MathCAD, grafique la PSD para la salida del detector de producto.

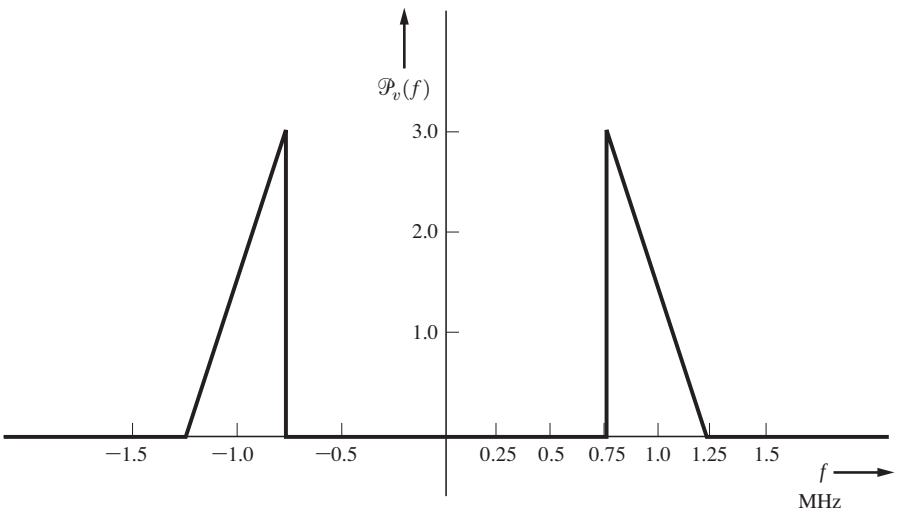


Figura P6–37

6–38 Un proceso WSS pasabanda $v(t)$ se aplica a un detector de producto, como se muestra en la figura 6–11, donde $\theta_c = 0$.
(a) Derive una expresión para la autocorrelación de $w_1(t)$ en términos de $R_v(\tau)$. ¿Es $w_1(t)$ WSS?
(b) Ocupe $R_{w_1}(\tau)$, la cual se obtuvo en la parte (a), para encontrar una expresión para $\mathcal{P}_{w_1}(f)$. (*Sugerencia:* use el teorema de Wiener–Khintchine.)

★ **6–39** Una señal USSB es

$$v(t) = 10\ \text{Re}\{[x(t) + j\hat{x}(t)]\, e^{j(\omega_c t + \theta_c)}\}$$

donde θ_c es una variable aleatoria uniformemente distribuida sobre $(0, 2\pi)$. La PSD de $x(t)$ se presenta en la figura P6–27. Encuentre
(a) La PSD para $v(t)$.
(b) La potencia total de $v(t)$.

6–40 Muestre que
(a) $R_{\hat{x}}(\tau) = R_x(\tau)$ y
(b) $R_{x\hat{x}}(\tau) = \hat{R}_x(\tau)$,

donde el signo de intercalación denota la transformada de Hilbert.

6–41 Una señal aleatoria pasabanda se puede representar mediante

$$s(t) = x(t)\ \cos(\omega_c t + \theta_c) - y(t)\ \text{sen}(\omega_c t + \theta_c)$$

donde la PSD de $s(t)$ se muestra en la figura P6–41. θ_c es una variable aleatoria independiente uniformemente distribuida sobre $(0, 2\pi)$. Suponga que $f_3 - f_2 = f_2 - f_1$. Encuentre la PSD para $x(t)$ y $y(t)$ cuando

(a) $f_c = f_1$. Esta es una señalización de USSB, donde $y(t) = x(t)$.

(b) $f_c = f_2$. Esto representa una señalización de USSB y LSSB independientes con dos distintas modulaciones.

(c) $f_1 < f_c < f_2$. Esto es una señalización de banda lateral residual.

(d) Para cuáles de estos casos, si se aplica, son ortogonales $x(t)$ y $y(t)$?

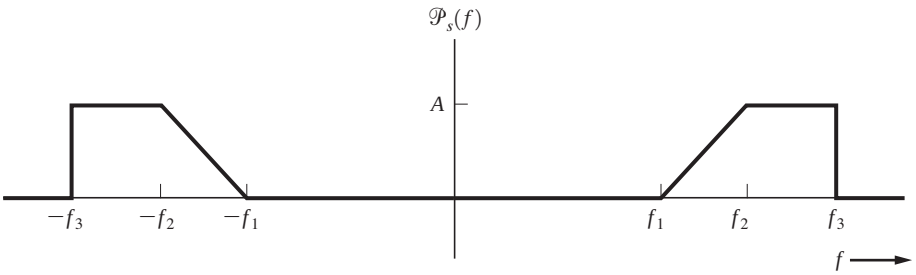


Figura P6–41

★ **6–42** Remitiéndose al problema 6–41(b), cómo se relacionan las dos modulaciones $m_1(t)$ y $m_2(t)$ para las bandas laterales independientes con $x(t)$ y $y(t)$? Obtenga la PSD para $m_1(t)$ y $m_2(t)$, donde $m_1(t)$ es la modulación sobre la porción de USSB de la señal y $m_2(t)$ la modulación sobre la porción de LSSB de $s(t)$.

6–43 Para el proceso aleatorio pasabanda, muestre que

(a) La ecuación (6–133m) es válida (decimotercera propiedad).

(b) La ecuación (6–133i) es válida (novena propiedad).

★ **6–44** Remitiéndose al ejemplo 6–9, encuentre la PSD para una señal BPSK con datos codificados por Manchester (vea la figura 3–15). Suponga que los datos poseen valores de $a_n = \pm 1$, los cuales son igualmente probables y que aquéllos son independientes de bit a bit.

6–45 La entrada a un detector de envolvente es un proceso de ruido gaussiano ergódico pasabanda. El RMS de la entrada es de 2 V y la media es de 0 V. El detector de envolvente tiene una ganancia de voltaje de 10. Encuentre:

(a) El valor de DC del voltaje de salida.

(b) El RMS del voltaje de salida.

6–46 Un proceso de señal de banda estrecha con ruido gaussiano se representa mediante la ecuación

$$r(t) = A\cos(\omega_c t + \theta_c) + x(t)\cos(\omega_c t + \theta_c) - y(t)\,\text{sen}(\omega_c t + \theta_c)$$

donde $A\cos(\omega_c t + \theta_c)$ es una portadora senoidal y los términos restantes son el ruido pasabanda con componentes gaussianos independientes I y Q. Sea el ruido con un RMS de σ y una media de 0. El proceso de señal con ruido aparece a la entrada del detector de envolvente. Muestre que la PDF para la salida del detector de envolvente es

$$f(R) = \begin{cases} \dfrac{R}{\sigma^2}\ e^{-[(R^2+A^2)/(2\sigma^2)]}\ I_0\left(\dfrac{RA}{\sigma^2}\right), & R \geq 0 \\ 0, & R < 0 \end{cases}$$

donde

$$I_0(z) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{z\ \cos\theta}\ d\theta$$

es la función de Bessel modificada del primer tipo de orden cero. $f(R)$ se conoce como la PDF *Rician* en honor a S. O. Rice, quien fue un excelente ingeniero en Bell Telephone Laboratories.

6–47 Suponga que

$$s(t) = \begin{cases} \dfrac{A}{T}\ t\ \cos\omega_c t, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

es una señal conocida. Esta señal con ruido blanco está presente a la entrada de un filtro acoplado.

(a) Diseñe un filtro acoplado para $s(t)$. Haga un diagrama de formas de onda análogas a aquellas que se muestran en la figura 6-16.

(b) Haga un diagrama de las formas de onda para el procesador de correlación que se muestra en la figura 6–18.

★ **6–48** Un sistema digital de comunicación de banda base utiliza señalización polar con una velocidad de bit de $R = 2{,}000$ bits/s. Los pulsos transmitidos son rectangulares y la respuesta de frecuencia del filtro del canal es

$$H_c(f) = \frac{B}{B + jf}$$

donde $B = 6{,}000$ Hz. Los pulsos filtrados son la entrada a un receptor que ocupa procesamiento de integración y descarga, como se ilustra en la figura 6-17. Examine la salida del integrador para presencia de ISI. En particular,

(a) Grafique la salida del integrador cuando se envía un 1 binario.

(b) Grafique la salida del integrador para un canal pasatodas y compare este resultado con el que se obtuvo en la parte (a).

6–49 Remítase a la figura 6–19 para la detección de una señal BPSK. Suponga que dicha señal a la entrada es

$$r(t) = s(t) = \sum_{n=0}^{7} d_n p(t - nT)$$

donde

$$p(t) = \begin{cases} e^{-t}\ \cos(\omega_c t), & 0 < t < T \\ 0, & t \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

y los datos binarios d_n son la cadena de 8 bits $\{+1, -1, -1, +1, +1, -1, +1, -1\}$. Emplee MATLAB o MathCAD para

(a) Graficar la forma de onda de entrada $r(t)$.

(b) Graficar la forma de onda de la salida del integrador $r_0(t)$.

★ **6–50** En la figura P6-50 se describe un filtro acoplado.
(a) Encuentre la respuesta al impulso del filtro acoplado.
(b) Halle la forma de pulso al cual este filtro está acoplado (el caso de ruido blanco).

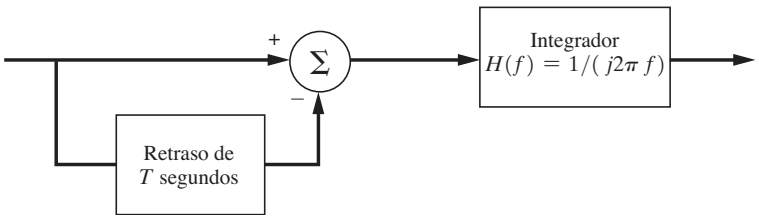


Figura P6–50

★ **6–51** Una señal FSK $s(t)$ se aplica a un circuito receptor de correlación que se muestra en la figura P6–51. Dicha señal es

$$s(t) = \begin{cases} A\cos(\omega_1 t), & \text{cuando se envía un 1 binario} \\ A\cos(\omega_2 t), & \text{cuando se envía un 0 binario} \end{cases}$$

donde $f_1 = f_c + \Delta F$ y $f_2 = f_c - \Delta F$. Sea ΔF seleccionada para satisfacer la condición de MSK, la cual es $\Delta F = 1/(4T)$. T es el tiempo que se lleva en enviar un bit, y el integrador se reinicializa cada T segundos. Suponga que $A = 1$, $f_c = 1{,}000$ Hz y $\Delta F = 50$ Hz.
(a) Si se envía un 1 binario, grafique $v_1(t)$, $v_2(t)$ y $r_0(t)$ sobre un intervalo de T segundos.
(b) Remítase a la figura 6-16 y encuentre una expresión que describa la salida de un filtro que se acopla a la señal FSK cuando se envía un 1 binario. Grafique la salida del filtro.
(c) Discuta cómo los gráficos obtenidos en las partes (a) y (b) están en acuerdo o descuerdo.

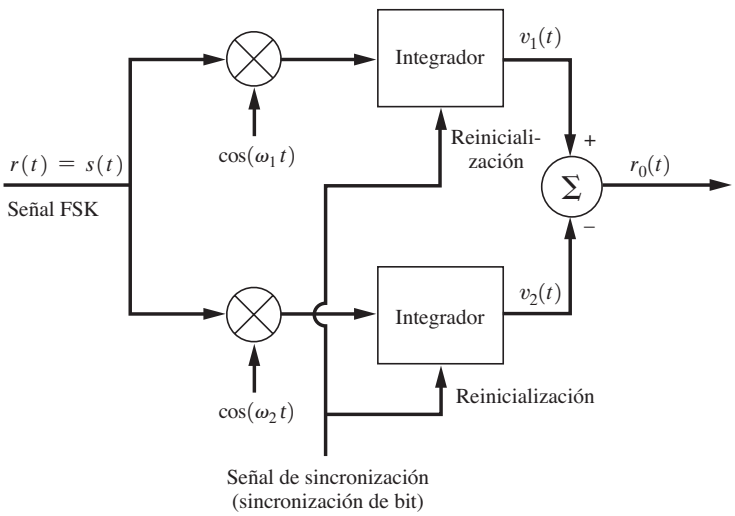


Figura P6–51

6–52 Sea

$$s(t) = \text{Re}\{g(t)\, e^{j(\omega_c t + \theta_c)}\}$$

una señal FM de banda ancha, donde

$$g(t) = A_c e^{jD_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)\, d\lambda}$$

y $m(t)$ un proceso aleatorio de modulación.

(a) Muestre que

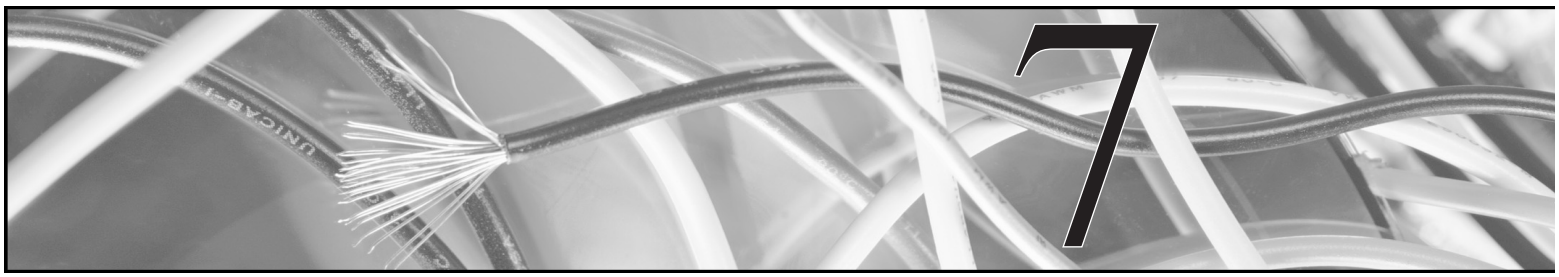
$$R_g(\tau) = A_c^2 [\overline{e^{jD_f \tau m(t)}}]$$

cuando la integral $\int_t^{t+\tau} m(\lambda)\, d\lambda$ se aproxima mediante $\tau m(t)$.

(b) Con los resultados de la parte (a), demuestre que la PSD de la señal FM de banda ancha se obtiene de la ecuación (5-66). Es decir, muestre que

$$\mathcal{P}_s(f) = \frac{\pi A_c^2}{2D_f} \left[f_m\left(\frac{2\pi}{D_f}\,(f - f_c)\right) + f_m\left(\frac{2\pi}{D_f}\,(-f - f_c)\right)\right]$$

Capítulo



7

RENDIMIENTO DE SISTEMAS DE COMUNICACIONES DISTORSIONADOS POR RUIDO

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Tasa de error en el bit para sistemas binarios (unipolar, polar, bipolar, OOK, BPSK, FSK y MSK)
- Razón señal a ruido de salida para sistemas analógicos (AM, SSB, PM y FM)

Como se discutió en el capítulo 1, las dos consideraciones principales en el diseño de un sistema de comunicaciones son las siguientes:

1. El *rendimiento* del sistema cuando el ruido lo distorsiona. La medición de rendimiento en un sistema digital es la probabilidad de error en la señal de salida. Para los sistemas analógicos, la medición de rendimiento es la razón señal a ruido de salida.
2. El *ancho de banda* del canal que se requiere para la transmisión de una señal de comunicaciones. Este ancho de banda se evaluó para varios tipos de señales tanto digitales como analógicas en los capítulos anteriores.

Existen muchas maneras de demodular (recuperar) la información a partir de la señal recibida que el ruido ha distorsionado. Algunos receptores ofrecen un rendimiento óptimo, pero no la mayoría. A menudo un receptor subóptimo rinde casi tan bien como los óptimos para todos los propósitos prácticos. A continuación se analizará el rendimiento de algunos receptores tanto óptimos como subóptimos.

7–1 PROBABILIDADES DE ERROR PARA SEÑALIZACIÓN BINARIA

Resultados generales

La figura 7-1 muestra un diagrama de bloques general para un sistema binario de comunicaciones. La entrada del receptor $r(t)$ contiene una señal transmitida $s(t)$ con ruido en el canal $n(t)$. Para señalización en banda base, los circuitos de procesamiento en el receptor consisten en un filtrado pasabajas con amplificación adecuada. Para señalización *pasabanda*, como OOK, BPSK y FSK, los circuitos de procesamiento normalmente constan de un receptor superheterodino que contiene un mezclador, un amplificador de IF y un detector. Estos circuitos producen una salida analógica en banda base $r_0(t)$. (Por ejemplo, cuando se emplea la señalización BPSK, el detector puede estar compuesto por un detector de producto y un integrador, como se describe en la sección (6-8) e ilustra en la figura 6-19).

La forma de onda analógica en banda base $r_0(t)$ se muestrea a un tiempo de sincronización $t = t_0 + nT$ para producir las muestras $r_0(t_0 + nT)$, las cuales se alimentan de un dispositivo de umbral (comparador). El dispositivo de umbral produce la forma de onda de datos seriales binarios $\tilde{m}(t)$

En esta subsección se desarrollará una *técnica general* para evaluar la probabilidad de encontrar un error en el bit, también llamada *tasa de error en el bit* (BER), para la señalización binaria. En secciones posteriores, esta técnica se utilizará para obtener expresiones específicas para la BER de varias formas de señalización, como OOK, BPSK y FSK.

Para desarrollar una fórmula general de la BER para una señal binaria detectada, suponga que T es el tiempo que se tarda en transmitir un bit de datos. La señal transmitida sobre un intervalo de bit $(0, T)$ es

$$s(t) = \begin{cases} s_1(t), & 0 < t \leq T, \quad \text{para un 1 binario} \\ s_2(t), & 0 < t \leq T, \quad \text{para un 0 binario} \end{cases} \tag{7–1}$$

donde $s_1(t)$ es la forma de onda que se usa si se transmite un 1 binario y $s_2(t)$ la forma de onda que se emplea si se transmite un 0 binario. Si $s_1(t) = -s_2(t)$, entonces $s(t)$ se conoce como señal *antípoda*.

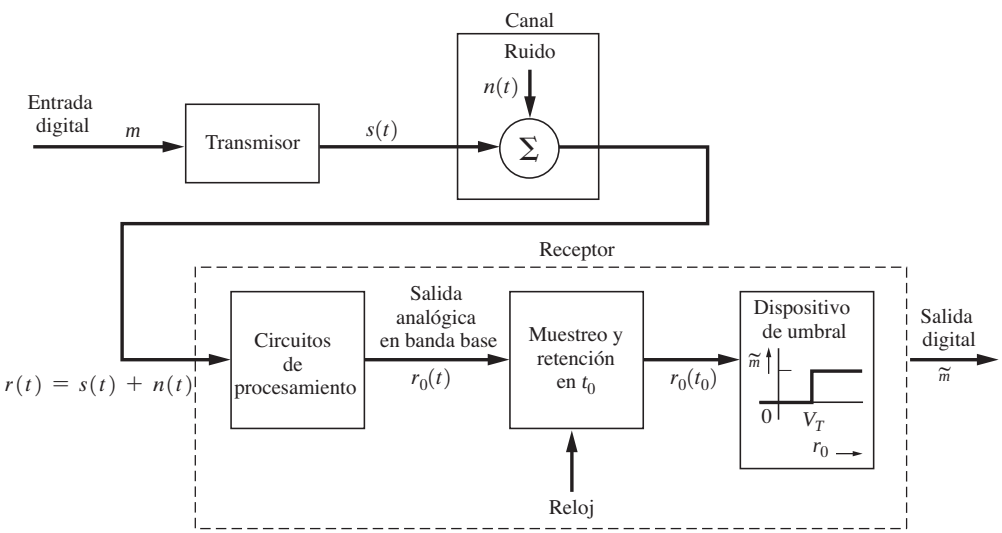


Figura 7–1 Sistema general binario de comunicación.

La señal binaria con ruido a la entrada del receptor produce una forma de onda analógica en banda base a la salida de los circuitos de procesamiento y se denota por

$$r_0(t) = \begin{cases} r_{01}(t), & 0 < t \leq T, \quad \text{para un 1 binario enviado} \\ r_{02}(t), & 0 < t \leq T, \quad \text{para un 0 binario enviado} \end{cases} \tag{7–2}$$

donde $r_{01}(t)$ es la señal de salida que se distorsiona por el ruido en una transmisión de un 1 binario, y $r_{02}(t)$ es la salida para la transmisión de un 0 binario. (Note que si el receptor ocupa circuitos no lineales de procesamiento, como un detector de envolvente, la superposición de las salidas de la señal con ruido no es una operación válida.) Esta forma de onda analógica de voltaje $r_0(t)$ se muestrea a cierto tiempo t_0 durante el intervalo de bit. Es decir, $0 < t_0 \leq T$. Para circuitos de procesamiento de filtros acoplados, t_0 es generalmente igual a T. La muestra resultante es

$$r_0(t_0) = \begin{cases} r_{01}(t_0), & \text{para un 1 binario enviado} \\ r_{02}(t_0), & \text{para un 0 binario enviado} \end{cases} \tag{7–3}$$

Se observa que $r_0(t_0)$ es una *variable aleatoria* que tiene una distribución *continua* debido a que el ruido en el canal ha distorsionado la señal. Para reducir la nomenclatura se denotará $r_0(t_0)$ simplemente por r_0. Es decir,

$$r_0 = r_0(t_0) = \begin{cases} r_{01}, & \text{para un 1 binario enviado} \\ r_{02}, & \text{para un 0 binario enviado} \end{cases} \tag{7–4}$$

A r_0 se le llama *estadística de prueba*.

Por el momento, suponga que se pueden evaluar las PDF para las dos variables aleatorias $r_0 = r_{01}$ y $r_0 = r_{02}$. Estas PDF son en verdad *PDF condicionales*, ya que dependen, respectivamente, de la transmisión de un 1 o un 0 binario. Es decir, cuando $r_0 = r_{01}$, la PDF es $f(r_0|s_2\text{enviada})$, y cuando $r_0 = r_{02}$, la PDF es $f(r_0 \ |s_2$ enviada). La figura 7−2 muestra estas PDF condicionales, así como formas gaussianas con fines ilustrativos. Las formas reales de las PDF dependen de las características del ruido en el canal, los tipos específicos de filtro, los circuitos detectores empleados y los tipos de señales binarias transmitidas. (En secciones posteriores se obtendrán PDF específicas ocupando la teoría desarrollada en el capítulo 6.)

En el desarrollo de una fórmula general para la BER, suponga que la *polaridad de los circuitos de procesamiento* en el receptor es tal que si *sólo la señal* (sin ruido) está presente a la entrada

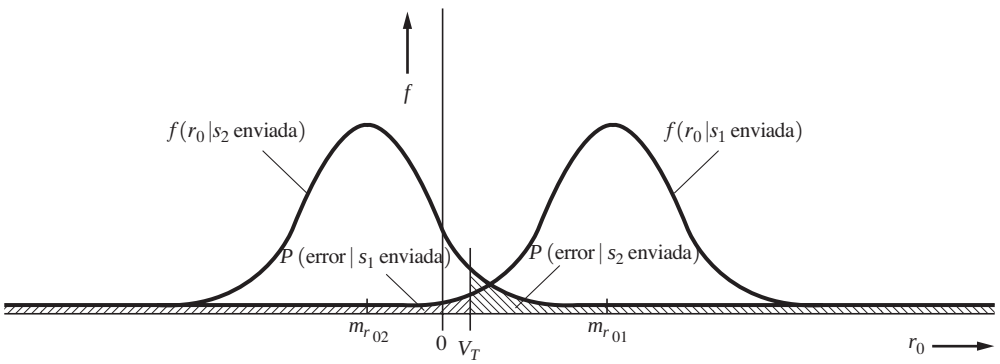


Figura 7–2 Probabilidad de error para señalización binaria.

del receptor, $r_0 > V_T$ cuando *se envía un 1 binario* y $r_0 < V_T$ cuando *se envía un 0 binario*. V_T es el valor de umbral (voltaje) del comparador (dispositivo de umbral).

Cuando existe señal con ruido a la entrada del receptor pueden ocurrir errores de dos maneras. Hay un error cuando $r_0 < V_T$ si se envía un 1 binario:

$$P(\text{error}|s_1 \text{ enviada}) = \int_{-\infty}^{V_T} f(r_0|s_1)\, dr_0 \tag{7–5}$$

Esto se ilustra mediante el área sombreada a la izquierda de V_T en la figura 7–2. De manera similar, ocurre un error cuando $r_0 > V_T$ si se envía un 0 binario:

$$P(\text{error}|s_2 \text{ enviada}) = \int_{V_T}^{\infty} f(r_0|s_2)\, dr_0 \tag{7–6}$$

La BER es, por lo tanto,

$$P_e = P(\text{error}|s_1 \text{ enviada})P(s_1 \text{enviada}) + P(\text{error}|s_2 \text{ enviada})P(s_2 \text{ enviada}) \tag{7–7}$$

Esto resulta de la teoría de probabilidad (consulte el apéndice B), donde la probabilidad de un evento que consiste de eventos conjuntos es

$$P(E) = \sum_{i=1}^{2} P(E, s_i) = \sum_{i=1}^{2} P(E|s_i)P(s_i)$$

Cuando se combinan las ecuaciones (7–5), (7–6) y (7–7), la expresión general para la BER de cualquier sistema binario de comunicación es

$$P_e = P(s_1 \text{ enviada}) \int_{-\infty}^{V_T} f(r_0|s_1)\, dr_0 + P(s_2 \text{ enviada}) \int_{V_T}^{\infty} f(r_0|s_2)\, dr_0 \tag{7–8}$$

$P(s_1$ enviado) y $P(s_2$ enviado) se conocen como *estadísticos fuente* o *estadísticos a priori*. En la mayoría de las aplicaciones los estadísticos fuente se consideran equiprobables. Esto es,

$$P(1 \text{ binario enviado}) = P(s_1 \text{ enviada }) = \tfrac{1}{2} \tag{7–9a}$$

$$P(0 \text{ binario enviado}) = P(s_2 \text{ enviada }) = \tfrac{1}{2} \tag{7–9b}$$

En los resultados que se obtiene a lo largo del resto de este capítulo se asumirá que los estadísticos fuente son equiprobables. Las PDF condicionales dependen de las formas de onda de señalización involucradas, del ruido en el canal y de los circuitos de procesamiento ocupados. Éstos se obtendrán subsecuentemente para el caso de ruido gaussiano en el canal y circuitos lineales de procesamiento.

Resultados para el ruido gaussiano

Suponga que el ruido en el canal es un proceso gaussiano estacionario en el sentido amplio con media igual a cero y que los circuitos de procesamiento en el receptor, a excepción del dispositivo de umbral, son lineales. Entonces se sabe que (consulte el capítulo 6) para un proceso gaussiano a la entrada, la salida del procesador lineal será también un proceso gaussiano. Para señalización en banda base, los circuitos de procesamiento consistirían en filtros lineales con alguna ganancia. Para señalización pasabanda, como se demostró en el capítulo 4, un circuito superheterodino (que está integrado

por un mezclador, una etapa de IF y un detector de producto) es un circuito lineal. Sin embargo, si se emplean un control de ganancia automático (AGC) o limitadores, el receptor será no lineal y los resultados de esta sección no serán aplicables. Además, si se ocupa un detector no lineal, como un detector de envolvente, el ruido de salida no será gaussiano. Para el caso de un circuito receptor de procesamiento lineal con una señal binaria con ruido a la entrada, la salida muestreada es

$$r_0 = s_0 + n_0 \tag{7–10}$$

En este caso se emplea la nomenclatura abreviada $r_0(t_0) = 0$ □ $n_0(t_0) = n_0$ es una variable aleatoria gaussiana con media igual a cero, y $s_0(t_0)$ una constante que depende de la señal que se envía. Es decir,

$$s_0 = \begin{cases} s_{01}, & \text{para un 1 binario enviado} \\ s_{02}, & \text{para un 0 binario enviado} \end{cases} \tag{7–11}$$

donde s_{01} y s_{02} son constantes conocidas para un tipo dado de receptor con formas de onda de señalización de entrada conocidas $s_1(t)$ y $s_2(t)$. Como la muestra del ruido de salida n_0 es una variable aleatoria gaussiana con media de cero, la muestra total de salida r_0 es una variable aleatoria gaussiana con media de s_{01} o s_{02}, dependiendo de si se envió un 1 o un 0 binario. Esto se ilustra en la figura 7–2, donde la media de $r_0 = m_{r_{01}} = s_{01}$ cuando se envía un 1 binario y la media de r_0 es $m_{r_{02}} = s_{02}$ cuando se envía un 0 binario. Por lo tanto, las dos PDF condicionales son

$$f(r_0|s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\, e^{-(r_0 - s_{01})^2/(2\sigma_0^2)} \tag{7–12}$$

y

$$f(r_0|s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\, e^{-(r_0 - s_{02})^2/(2\sigma_0^2)} \tag{7–13}$$

$\sigma_0^2 = \overline{n_0^2} = \overline{n_0^2(t_0)} = \overline{n_0^2(t)}$ es la potencia promedio del ruido de *salida* del circuito de procesamiento en el receptor donde el proceso de ruido de salida es estacionario en el sentido amplio.

Usando estadísticos fuente equiprobables y sustituyendo las ecuaciones (7–12) y (7–13) en la ecuación (7–8), se encuentra que la BER se convierte en

$$P_e = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{V_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\, e^{-(r_0 - s_{01})^2/(2\sigma_0^2)}\, dr_0 + \frac{1}{2}\int_{V_T}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\, e^{-(r_0 - s_{02})^2/(2\sigma_0^2)}\, dr_0 \tag{7–14}$$

Esto puede reducirse a las funciones $Q(z)$ que se definen en la sección B–7 (apéndice B) y se tabulan en la sección A–10 (apéndice A). Sea $\lambda = -(r_0 - s_{01})/\sigma_0$ en la primera integral y $\lambda = (r_0 - s_{02})/\sigma_0$ en la segunda □ entonces

$$P_e = \frac{1}{2}\int_{-(V_T - s_{01})/\sigma_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\lambda^2/2}\, d\lambda + \frac{1}{2}\int_{(V_T - s_{02})/\sigma_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\lambda^2/2}\, d\lambda$$

o

$$P_e = \frac{1}{2}\, Q\left(\frac{-V_T + s_{01}}{\sigma_0}\right) + \frac{1}{2}\, Q\left(\frac{V_T - s_{02}}{\sigma_0}\right) \tag{7–15}$$

Esta probabilidad de error puede minimizarse si se utiliza el valor apropiado para el umbral del comparador, V_T. Se debe resolver dP_e/dV_T para encontrar el valor de V_T que minimice a P_e. Empleando la regla de Leibniz, sección A–2, para la diferenciación de las integrales de la ecuación (7–14), se obtiene que

$$\frac{dP_e}{dV_T} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\,e^{-(V_T - s_{01})^2/(2\sigma_0^2)} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\,e^{-(V_T - s_{02})^2/(2\sigma_0^2)} = 0$$

o

$$e^{-(V_T - s_{01})^2/(2\sigma_0^2)} = e^{-(V_T - s_{02})^2/(2\sigma_0^2)}$$

lo cual implica la condición

$$(V_T - s_{01})^2 = (V_T - s_{02})^2$$

En consecuencia, para una mínima P_e, el valor de umbral del comparador requiere ser de

$$V_T = \frac{s_{01} + s_{02}}{2} \tag{7–16}$$

Si se sustituye la ecuación (7–16) en la ecuación (7–15) se obtiene la expresión para la mínima P_e. Por lo tanto, para la señalización binaria en ruido gaussiano y con el valor de umbral óptimo, como se especifica mediante la ecuación (7–16), la BER es

$$P_e = Q\left(\frac{s_{01} - s_{02}}{2\sigma_0}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(s_{01} - s_{02})^2}{4\sigma_0^2}}\right) \tag{7–17}$$

donde se asume que $s_{01} > V_T > s_{02}$.[1] Hasta ahora se ha optimizado sólo el nivel de umbral y no los filtros en los circuitos de procesamiento.

Resultados para el ruido blanco gaussiano y recepción por filtro acoplado

Si se optimiza el filtro receptor (en los circuitos de procesamiento de la figura 7–1), la BER que se obtiene a partir de la ecuación (7–17) puede reducirse. Para *minimizar* a P_e se requiere *maximizar* el argumento de Q, como se observa en la figura B–7. Por tanto, se requiere encontrar el filtro lineal que maximiza a

$$\frac{[s_{01}(t_0) - s_{02}(t_0)]^2}{\sigma_0^2} = \frac{[s_d(t_0)]^2}{\sigma_0^2}$$

[1] Si $s_{01} < V_T < s_{02}$, el resultado es

$$P_e = Q\left(\frac{s_{02} - s_{01}}{2\sigma_0}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(s_{02} - s_{01})^2}{4\sigma_0^2}}\right)$$

donde la característica del dispositivo de umbral en la figura 7–1 se altera de tal forma que se escoge un 0 binario cuando $r_0 > V_T$ y un 1 binario cuando $r_0 < V_T$.

$s_d(t_0) \triangleq s_{01}(t_0) - s_{02}(t_0)$ es el valor muestra de la *señal de diferencia* que se obtiene al sustraer la muestra s_{02} de s_{01}. La potencia instantánea correspondiente de la señal de diferencia de salida cuando $t = t_0$ es s_d^2. Como se derivó en la sección 6–8, el filtro lineal que maximiza la potencia instantánea de la señal de salida al tiempo de muestreo $t = t_0$ cuando se compara con la potencia promedio del ruido de salida $\sigma_0^2 = n_0^2(t)$, es el *filtro acoplado*. Para el caso de *ruido blanco* a la entrada del receptor, el *filtro acoplado deberá acoplarse a la señal de diferencia* $s_d(t) = s_1(t) - s_2(t)$. Por lo tanto, la respuesta al impulso del filtro acoplado para una señalización binaria es

$$h(t) = C[s_1(t_0 - t) - s_2(t_0 - t)] \tag{7–18}$$

donde $s_1(t)$ es la señal (solamente) que aparece a la entrada del receptor cuando se envía un 1 binario, $s_2(t)$ la señal que se recibe cuando se envía un 0 binario y C una constante real. Aún más, ocupando la ecuación (6–161), la razón de señal pico de salida a ruido promedio que se obtiene del filtro acoplado es

$$\frac{[s_d(t_0)]^2}{\sigma_0^2} = \frac{2E_d}{N_0}$$

$N_0/2$ es la PSD del ruido a la *entrada del receptor* y E_d la energía de la señal de diferencia a la *entrada del receptor*, donde

$$E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 \, dt \tag{7–19}$$

Por ende, para una señalización binaria distorsionada por ruido *blanco* gaussiano, recepción por *filtro acoplado* y empleando el valor óptimo de umbral, la BER es

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right) \tag{7–20}$$

Este resultado se usará para evaluar la P_e para varios tipos de señalización binaria donde se utiliza la recepción por filtro acoplado.

Resultados para el ruido coloreado gaussiano y recepción por filtro acoplado

La técnica anterior para obtener la BER de señalización binaria en ruido blanco puede modificarse para evaluar la BER de ruido coloreado. La figura 7–3 ilustra la modificación empleada. En este caso se inserta un *filtro de preblanqueado* antes de los circuitos de procesamiento en el receptor. La función de transferencia del filtro de preblanqueado es

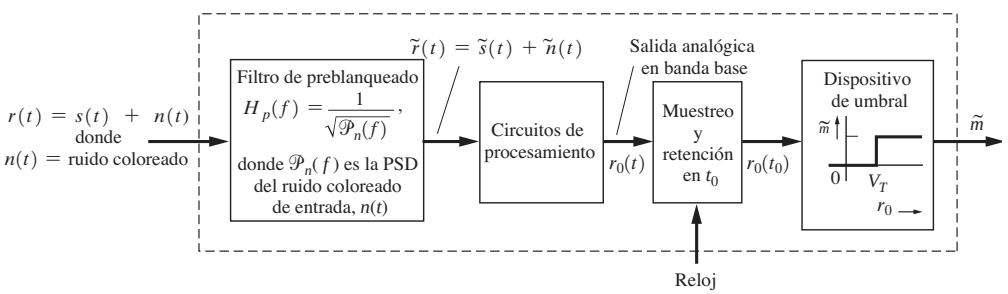


Figura 7–3 Receptor de filtro acoplado para ruido coloreado.

$$H_p(f) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{P}_n(f)}} \tag{7–21}$$

de tal forma que el ruido que aparece a la salida del filtro, $\tilde{n}(t)$, es blanco. Entonces se ha convertido el problema de ruido coloreado a uno de ruido blanco, así que las técnicas de diseño estudiadas en la sección anterior son aplicables. El filtro acoplado en los circuitos de procesamiento se acopla a continuación a las *formas de onda filtradas*,

$$\tilde{s}(t) = \tilde{s}_1(t) = s_1(t) * h_p(t) \qquad \text{(1 binario)} \tag{7–22a}$$

$$\tilde{s}(t) = \tilde{s}_2(t) = s_2(t) * h_p(t) \qquad \text{(0 binario)} \tag{7–22b}$$

donde $h_p(t) = \mathcal{F}^{-1}[H_p(f)]$. Debido a que el preblanqueado producirá las señales $\tilde{s}_1(t)$ y $\tilde{s}_2(t)$, las cuales se ensanchan más allá del intervalo de señalización de T segundos, ocurrirán dos tipos de degradación:

- El filtro acoplado no empleará la energía de señal en la señal filtrada que ocurre más allá del intervalo de T segundos para maximizar la señal de salida.
- Las porciones de las señales de los intervalos previos de señalización que ocurren en el intervalo actual de señalización producirán ISI (consulte el capítulo 3).

Ambos efectos pueden reducirse si la duración de la señal original se hace menor al intervalo de señalización de T segundos de tal forma que casi toda la señal ensanchada ocurra dentro de dicho intervalo.

7–2 RENDIMIENTO DE SISTEMAS BINARIOS EN BANDA BASE

Señalización unipolar

Como se ilustra en la figura 7–4b, las dos formas de onda para señalización en banda base son

$$s_1(t) = +A, \qquad 0 < t \leq T \qquad \text{(1 binario)} \tag{7–23a}$$

$$s_2(t) = 0, \qquad 0 < t \leq T \qquad \text{(0 binario)} \tag{7–23b}$$

donde $A > 0$. Esta señal unipolar con ruido blanco gaussiano está presente a la entrada del receptor.

Primero se evalúa el rendimiento de un receptor que ocupa un LPF, $H(f)$, con ganancia igual a la unidad. Se selecciona un ancho de banda equivalente para este LPF igual a $B > 2/T$ para así preservar (aproximadamente) la forma de onda de la señalización unipolar, pero el ruido se reducirá gracias al filtro.[2] Por lo tanto, $s_{01}(t_0) \approx A$ y $s_{02}(t_0) \approx 0$. La potencia del ruido a la salida del filtro

[2] De la ecuación (3–96b) se tiene que la PSD de una señal unipolar (forma de pulso rectangular) es proporcional a $[\text{sen}(\pi fT)/(\pi fT)]^2$, así que el segundo ancho de banda nulo es $2/T$. Considerando los ejemplos de estudio SA7–1 y SA7–2 se observa que si el ancho de banda equivalente del LPF es mayor a $2/T$, la señal filtrada consistirá en pulsos que son casi de forma rectangular y los valores pico de los pulsos son aproximadamente iguales a A.

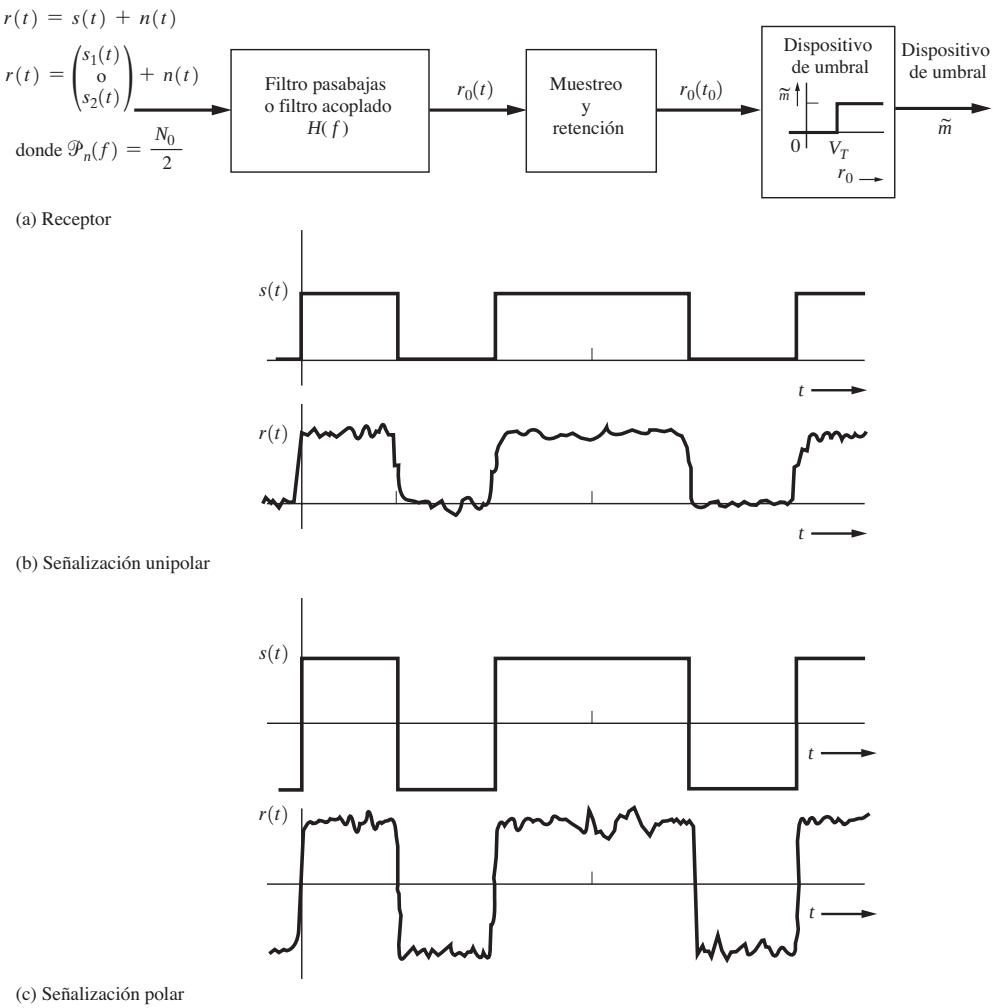


Figura 7–4 Receptor para la señalización binaria en banda base.

es $\sigma_0^2 = (N_0/2)(2B)$, donde B es el ancho de banda equivalente del filtro. El valor óptimo de umbral es entonces de $V_T = \frac{1}{2}A$. Cuando se usa la ecuación (7–7), la BER es

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{4N_0B}}\right) \qquad \text{(filtro pasabajas)} \tag{7–24a}$$

para un receptor que utiliza una LPF con un ancho de banda equivalente de B.

El rendimiento de un receptor de filtro acoplado se obtiene mediante la ecuación (7–20), donde el tiempo de muestreo es $t_0 = T$. La energía en la señal de diferencia es $E_d = A^2T$, de tal manera que la BER es

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \qquad \text{(filtro acoplado)} \tag{7–24b}$$

donde la energía promedio por bit es $E_b = A^2T/2$ debido a que la energía para un 1 binario es A^2T y para un 0 binario es 0. Para la forma de pulso rectangular, el filtro acoplado es un integrador. En consecuencia, el valor óptimo de umbral es

$$V_T = \frac{s_{01} + s_{02}}{2} = \frac{1}{2}\left(\int_0^T A\,dt + 0\right) = \frac{AT}{2}$$

A menudo se desea expresar la BER en términos de E_b/N_0, ya que indica la energía promedio que se requiere para transmitir un bit de datos sobre un canal con ruido blanco (térmico). Al expresar la BER en términos de E_b/N_0 se pueden comparar los rendimientos de diferentes técnicas de señalización.

En la figura 7−5 se muestra un gráfico de la ecuación (7−24b).

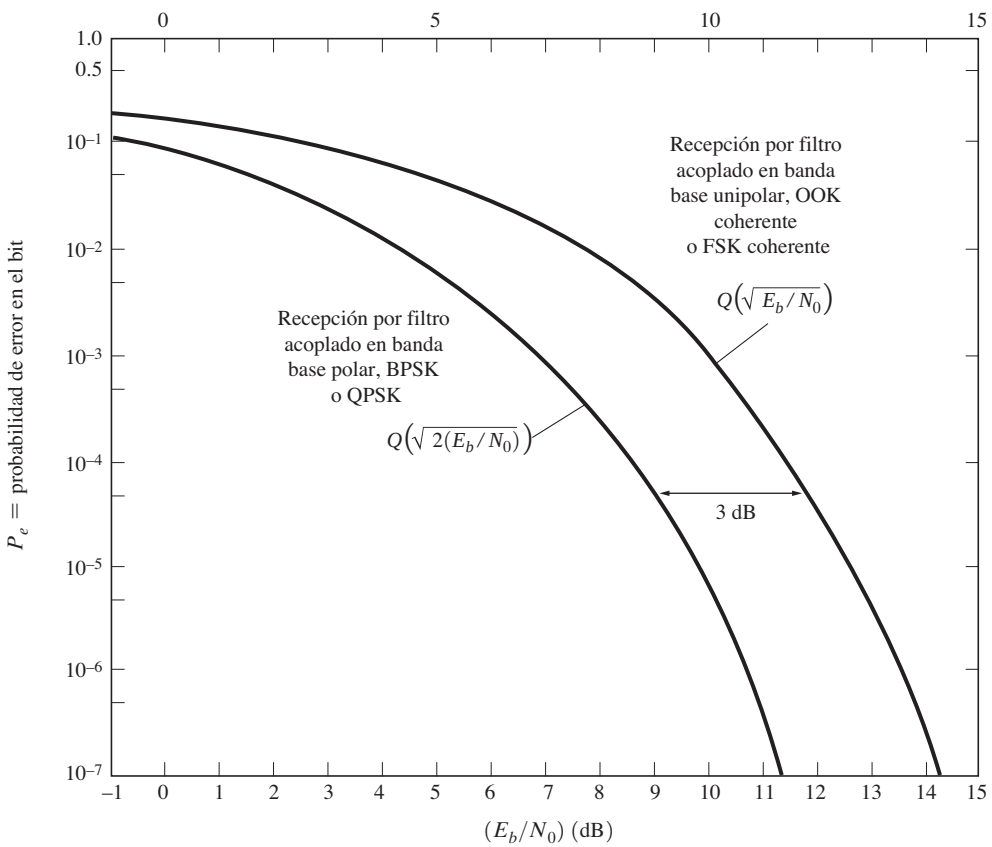


Figura 7–5 P_e para una recepción por filtro acoplado de varias técnicas de señalización binaria.

Señalización polar

Como se muestra en la figura 7–4c, la forma de onda de señalización polar en banda base es

$$s_1(t) = +\,\mathrm{A}, \qquad 0 < t \leq T \qquad \text{(1 binario)} \tag{7–25a}$$

$$s_2(t) = -\,\mathrm{A}, \qquad 0 < t \leq T \qquad \text{(0 binario)} \tag{7–25b}$$

La señal polar es una señal antípoda, ya que $s_1(t) = -s_2(t)$.

El rendimiento de un sistema de recepción por LPF se obtiene con la ecuación (7–17). Asumiendo que el ancho de banda equivalente del LPF es de $B \geq 2/T$ se observa que las muestras de la señal de salida son $s_{01}(t_0) \approx A$ y $s_{02}(t_0) \approx -A$ al tiempo de muestreo $t = t_0$. Además, $\sigma_0^2 = N_0 B$. El valor óptimo de umbral es ahora de $V_T = 0$. Por lo tanto, la BER para la señalización polar es

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{N_0 B}}\right) \qquad \text{(filtro pasabajas)} \tag{7–26a}$$

donde B es el ancho de banda equivalente del LPF.

El rendimiento del receptor de filtro acoplado se obtiene, una vez más, a partir de la ecuación (7–20), donde $t_0 = T$. (El filtro acoplado de integración y descarga para la señalización polar se presentó en la figura 6–17.) Como la energía de la señal de diferencia es $E_d = (2A)^2 T$, la BER es

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2T}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}\right) \qquad \text{(filtro acoplado)} \tag{7–26b}$$

donde la energía promedio por bit es $E_b = A^2 T$. El valor óptimo de umbral es de $V_T = 0$.

En la figura 7–5 se muestra un gráfico de la BER para la señalización unipolar y polar en banda base. Se aprecia que la segunda tiene una ventaja de 3 dB sobre la primera, ya que ésta requiere una E_b/N_0 que es 3 dB mayor que para la señalización polar para una misma P_e.

Señalización bipolar

Para la señalización bipolar NRZ, los 1 binarios se representan mediante valores que alternan entre positivo y negativo, y los 0 binarios se representan mediante un nivel igual a cero. Por lo tanto,

$$s_1(t) = \pm\,\mathrm{A}, \qquad 0 < t \leq T \qquad \text{(1 binario)} \tag{7–27a}$$

$$s_2(t) = 0, \qquad 0 < t \leq T \qquad \text{(0 binario)} \tag{7–27b}$$

donde $A > 0$. Esto es parecido a la señalización unipolar, excepto que se requieren de dos umbrales, $+V_T$ y $-V_T$, como se muestra en la figura 7–6. La figura 7–6b ilustra las probabilidades de error para el caso de ruido gaussiano aditivo. La BER es

$$\begin{aligned} P_e = {} & P(\text{error}|+A \text{ enviada})P(+A \text{ enviada}) + P(\text{error}|-A \text{ enviada})P(-A \text{ enviada}) \\ & + P(\text{error}|s_2 \text{ enviada})P(s_2 \text{ enviada}) \end{aligned}$$

y, a partir de la figura 7–6b, se encuentra que

$$P_e \approx \left[2Q\left(\frac{A - V_T}{\sigma_0}\right)\right]\frac{1}{4} + \left[2Q\left(\frac{V_T}{\sigma_0}\right)\right]\frac{1}{2}$$

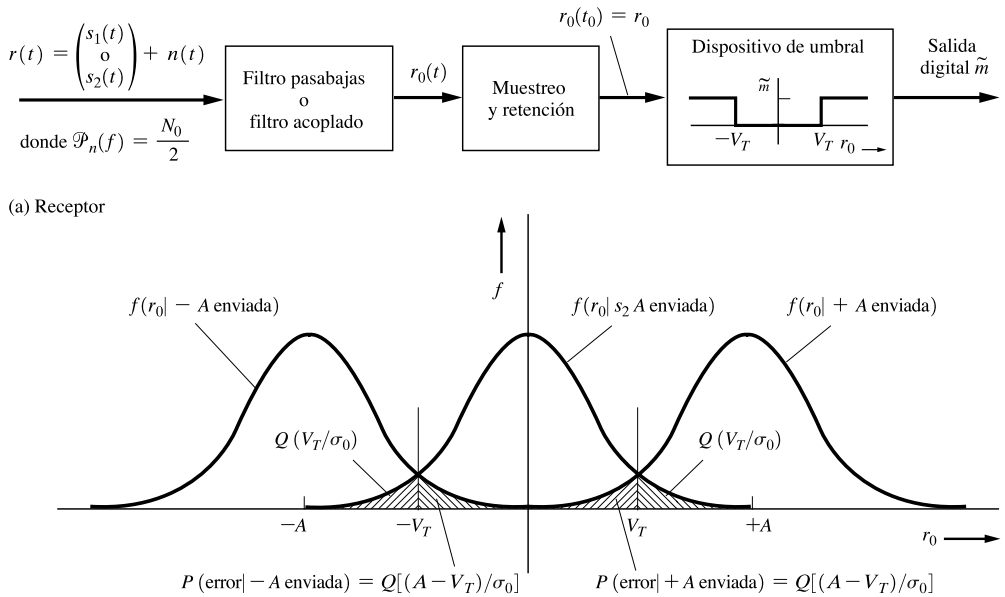


Figura 7–6 Receptor para señalización bipolar.

o

$$P_e \approx Q\left(\frac{V_T}{\sigma_0}\right) + \frac{1}{2} Q\left(\frac{A - V_T}{\sigma_0}\right)$$

Con cálculos matemáticos se encuentra que el valor óptimo de V_T que resulta en la mínima BER es $V_T = \frac{A}{2} + \frac{\sigma_0^2}{A} \ln 2$. Para aquellos sistemas con BER relativamente bajas (es decir, utilizables), resulta que $A > \sigma_0$, de tal forma que el umbral óptimo se vuelve aproximadamente igual a $V_T = A/2$, y la BER es

$$P_e = \frac{3}{2}\ Q\left(\frac{A}{2\sigma_0}\right)$$

Para un receptor con un filtro pasabajas que tiene una señal bipolar con ruido blanco a su entrada, $\sigma_0^2 = N_0 B$. Por lo tanto, la BER es

$$P_e = \frac{3}{2}\ Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{4N_0 B}}\right) \qquad \text{(filtro pasabajas)} \tag{7–28a}$$

donde la PSD del ruido de entrada es $N_0/2$ y el ancho de banda equivalente del filtro es de B Hz. Si se emplea un filtro acoplado, su SNR de salida es, ocupando la ecuación (6−161),

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \frac{A^2}{\sigma_0^2} = \frac{2E_d}{N_0}$$

Para la señalización bipolar NRZ, la energía en la señal de diferencia es $E_d = A^2T = 2E_b$, donde E_b es la energía promedio por bit. Por lo tanto, para un receptor de filtro acoplado, la BER es

$$P_e = \frac{3}{2}\, Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \qquad \text{(filtro acoplado)} \tag{7–28b}$$

Para una señalización bipolar RZ, $E_d = A^2T/4 = 2E_b$, así que la fórmula resultante para la BER es idéntica a la ecuación (7−28b). Estos resultados muestran que la BER para la señalización bipolar es exactamente $\frac{3}{2}$ de la señalización unipolar que se describe en la ecuación (7−24b).

7–3 DETECCIÓN COHERENTE DE SEÑALES BINARIAS PASABANDA

Modulación de encendido-apagado

Como se observa en la figura 5−1c, una señal OOK se representa mediante

$$s_1(t) = A\cos(\omega_c t + \theta_c), \qquad 0 < t \leq T \qquad \text{(1 binario)} \tag{7–29a}$$

o

$$s_2(t) = 0, \qquad 0 < t \leq T \qquad \text{(0 binario)} \tag{7–29b}$$

Se usa un detector de producto para una detección coherente, como se ilustra en la figura 7−7. De hecho, en aplicaciones de RF, un mezclador convertiría a la señal OOK entrante en una IF, de tal forma que se alcanza convenientemente una amplificación estable de alta ganancia, y después un detector de producto trasladaría la señal a banda base. La figura 7−7 equivalentemente representa estas operaciones mediante la conversión de la señal entrante y ruido directamente a banda base.

Suponga que la señal OOK con ruido blanco (sobre la banda de paso equivalente) gaussiano está presente a la entrada del receptor. Como se desarrolló en el capítulo 6, este ruido pasabanda puede representarse mediante

$$n(t) = x(t)\,\cos(\omega_c t + \theta_n) - y(t)\,\operatorname{sen}(\omega_c t + \theta_n)$$

donde la PSD de $n(t)$ es $\mathcal{P}_n(f) = N_0/2$ y θ_n es una variable aleatoria uniformemente distribuida que es independiente de θ_c.

El filtro receptor $H(f)$ de la figura 7−7 puede ser algún LPF conveniente, o un filtro acoplado. Por supuesto que el receptor se optimizará (para la P_e más baja) si se utiliza un filtro acoplado.

Primero evalúe el rendimiento de un receptor que usa un LPF cuando el filtro posee una ganancia de DC igual a la unidad. Suponga que el ancho de banda equivalente del filtro es $B \geq 2T$, de tal forma que la envolvente de la señal OOK se preserva (aproximadamente) a la salida del filtro. La salida analógica en banda base sería entonces

$$r_0(t) = \begin{Bmatrix} A, & 0 < t \leq T, & 1 \text{ binario} \\ 0, & 0 < t \leq T, & 0 \text{ binario} \end{Bmatrix} + x(t) \tag{7–30}$$

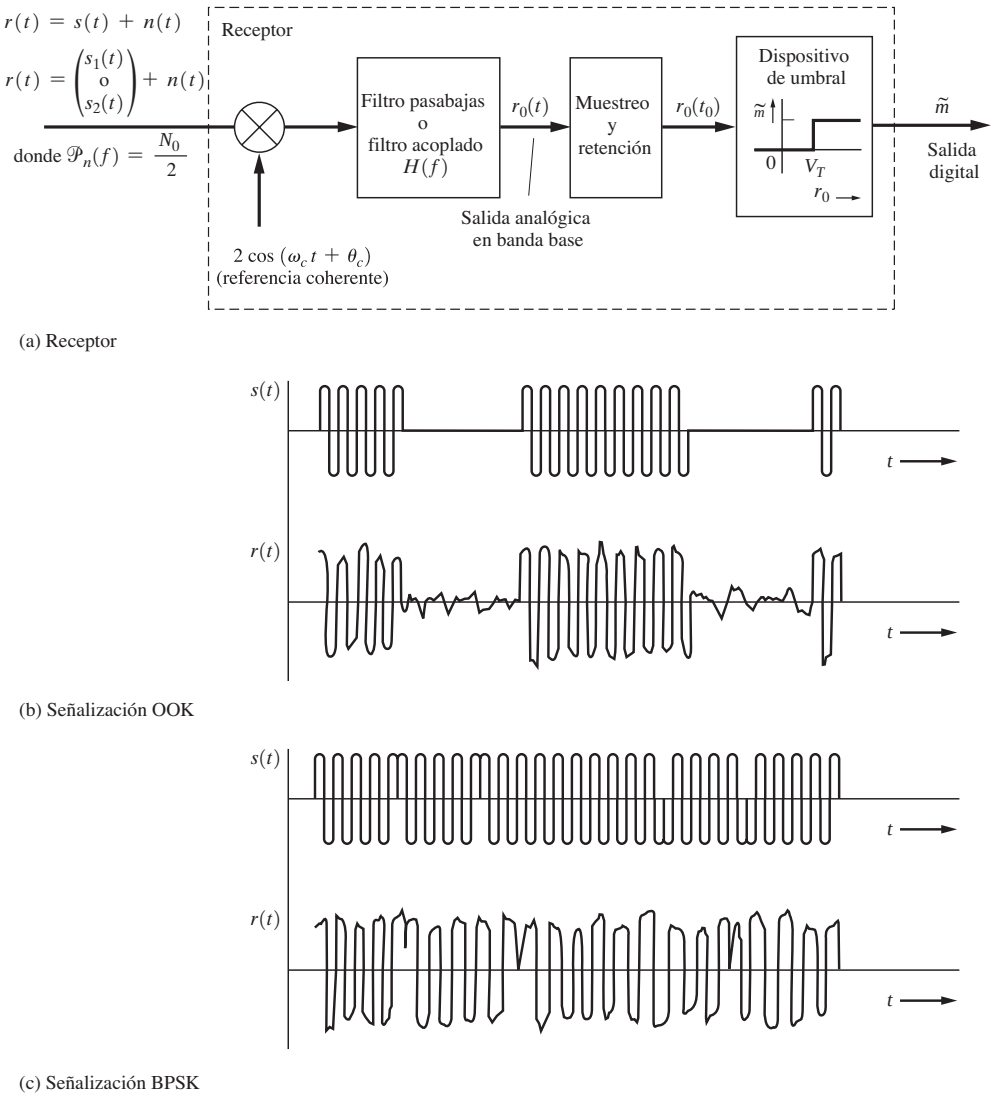


Figura 7–7 Detección coherente de señales OOK o BPSK.

donde $x(t)$ es el ruido en banda base. Con la ecuación (6–133g) se calcula la potencia de ruido como $\overline{x^2(t)} = \sigma_0^2 = \overline{n^2(t)} = 2(N_0/2)(2B) = 2N_0B$. □a que $s_{01} = A$ y $s_{02} = 0$, el valor óptimo de umbral es $V_T = A/2$. Cuando se emplea la ecuación (7–17), la BER es

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{8N_0B}}\right) \qquad \text{(filtro de banda estrecha)} \tag{7–31}$$

B es el ancho de banda equivalente del LPF. El ancho de banda pasabanda equivalente de este receptor es de $B_p = 2B$.

El rendimiento de un receptor de filtro acoplado se obtiene mediante la ecuación (7–20). La energía en la señal de diferencia a la entrada del receptor es[3]

$$E_d = \int_0^T [A\cos(\omega_c t + \theta_c) - 0]^2\, dt = \frac{A^2T}{2} \tag{7–32}$$

En consecuencia, la BER es

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{4N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \qquad \text{(filtro acoplado)} \tag{7–33}$$

donde la energía promedio por bit es $E_b = A^2T/4$. Para este caso, donde $s_1(t)$ tiene una envolvente rectangular (real), el filtro acoplado es un integrador. Por lo tanto, el valor óptimo de umbral es

$$V_T = \frac{s_{01} + s_{02}}{2} = \frac{1}{2}s_{01} = \frac{1}{2}\left[\int_0^T 2A\cos^2(\omega_c t + \theta_c)\, dt\right]$$

lo cual se reduce a $V_T = AT/2$ cuando $f_c \gg R$. Note que el rendimiento de la OOK es exactamente igual al de la señalización unipolar en banda base, como se ilustra en la figura 7–5.

Modulación por corrimiento de fase binaria

En la figura 7–7 se observa que la señal BPSK es

$$s_1(t) = A\cos(\omega_c t + \theta_c), \qquad 0 < t \le T \qquad \text{(1 binario)} \tag{7–34a}$$

y

$$s_2(t) = -A\cos(\omega_c t + \theta_c), \qquad 0 < t \le T \qquad \text{(0 binario)} \tag{7–34b}$$

A la señalización BPSK también se le llama *modulación por inversión de fase* (PRK, por sus siglas en inglés). La señal BPSK es antípoda porque $s_1(t) = -s_2(t)$.

De nuevo se evalúa primero el rendimiento de un receptor que ocupa un LPF con una ganancia igual a la unidad y un ancho de banda equivalente a $B \ge 2/T$. La salida analógica en banda base es

$$r_0(t) = \begin{Bmatrix} A, & 0 < t \le T \quad 1 \text{ binario} \\ -A, & 0 < t \le T, \quad 0 \text{ binario} \end{Bmatrix} + x(t) \tag{7–35}$$

donde $\overline{x^2(t)} = \sigma_0^2 = \overline{n^2(t)} = 2N_0B$. Dado que $s_{01} = A$ y $s_{02} = -A$, el umbral óptimo es $V_T = 0$. Cuando se usa la ecuación (7–17), la BER es

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{2N_0B}}\right) \qquad \text{(filtro de banda estrecha)} \tag{7–36}$$

Cuando se compara la BPSK con la OOK en base a una *potencia pico de envolvente* (PEP) para un valor dado de N_0, se observa que se requiere de una potencia de señal de 6 dB menos (pico) para

[3] Hablando estrictamente, f_c requiere ser un entero múltiplo de la mitad de la tasa de bit, $R = 1/T$, para obtener una E_d exactamente igual a $A^2T/2$. Sin embargo, debido a que $f_c \gg R$, $E_d = A^2T/2$ para todo propósito práctico, sin importar si $f_c = nR/2$ o no.

que la señalización BPSK resulte en la misma P_e que para la señalización OOK. Sin embargo, si las dos se comparan en base a una potencia promedio (de señal), el rendimiento de la BPSK posee una ventaja de 3 dB sobre la OOK, ya que la potencia promedio de OOK es 3 dB menor a su PEP (señalización equiprobable), pero la potencia promedio de la BPSK es igual a su PEP.

El rendimiento del receptor de filtro acoplado se obtiene con la ecuación (7–20). Recuerde el filtro acoplado para la señalización BPSK que se ilustró en la figura 6–19, donde se mostró un procesador de correlación utilizando un filtro de integración y descarga. La energía en la señal de diferencia a la entrada del receptor es

$$E_d = \int_0^T [2A\cos(\omega_c t + \theta_c)]^2\, dt = 2A^2T \tag{7–37}$$

Por lo tanto, la BER es

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}\right) \qquad \text{(filtro acoplado)} \tag{7–38}$$

donde la energía promedio por bit es $E_b = A^2T/2$ y $V_T = 0$. El rendimiento de la BPSK es exactamente el mismo que el de la señalización polar en banda base□sin embargo, es 3 dB superior a la señalización OOK (vea la figura 7–5).

Modulación por corrimiento de frecuencia

La señal FSK puede detectarse coherentemente empleando dos detectores de producto. Esto se ilustra en la figura 7–8, donde LPF idénticos en la salida de los detectores de producto se han reemplazado con sólo uno de los filtros, debido a que el orden de las operaciones lineales puede intercambiarse sin afectar los resultados. Las señales de marca (1 binario) y espacio (0 binario) son

$$s_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \theta_c), \qquad 0 < t \le T \qquad \text{(1 binario)} \tag{7–39a}$$

$$s_2(t) = A\cos(\omega_2 t + \theta_c), \qquad 0 < t \le T \qquad \text{(0 binario)} \tag{7–39b}$$

donde el corrimiento de frecuencia es $\Delta F = f_1 - f_2$, asumiendo que $f_1 > f_2$. Esta señal FSK con ruido blanco gaussiano está presente a la entrada del receptor. Las PSD para $s_1(t)$ y $s_2(t)$ se muestran en la figura 7–8b.

Primero evalúe el rendimiento de un receptor que ocupa un LPF $H(f)$ con una ganancia de DC igual a la unidad. Suponga que el ancho de banda equivalente del filtro es $2/T \le B < \Delta F$. El LPF y la traslación en frecuencia producida por los detectores de producto, combinados, actúan como filtros pasabanda duales, uno centrado en $f = f_1$ y el otro en $f = f_2$, donde cada uno posee un ancho de banda equivalente a $B_p = 2B$. Por lo tanto, el ruido de entrada que afecta a la salida consiste en dos componentes de banda estrecha $n_1(t)$ y $n_2(t)$, donde el espectro de $n_1(t)$ se centra en f_1 y el de $n_2(t)$ en f_2, como se muestra en la figura 7–8. Aún más, $n(t) = n_1(t) + n_2(t)$, donde, usando la ecuación (6–130),

$$n_1(t) = x_1(t)\cos(\omega_1 t + \theta_c) - y_1(t)\,\text{sen}(\omega_1 t + \theta_c) \tag{7–40a}$$

y

$$n_2(t) = x_2(t)\cos(\omega_2 t + \theta_c) - y_2(t)\,\text{sen}(\omega_2 t + \theta_c) \tag{7–40b}$$

El corrimiento de frecuencia es de $2\Delta F > 2B$, de tal forma que las señales de marca y de espacio pueden separarse mediante la acción de un filtrado. La señal de entrada y el ruido que pasan a través del canal superior en la figura 7–8a se describen a través de

$$r_1(t) = \begin{Bmatrix} s_1(t), & 1 \text{ binario} \\ 0, & 0 \text{ binario} \end{Bmatrix} + n_1(t) \tag{7–41}$$

y la señal y el ruido que pasan a través del canal inferior se describen mediante

$$r_2(t) = \begin{Bmatrix} 0, & 1 \text{ binario} \\ s_2(t), & 0 \text{ binario} \end{Bmatrix} + n_2(t) \tag{7–42}$$

donde $r(t) = r_1(t) + r_2(t)$. La potencia de ruido de $n_1(t)$ y $n_2(t)$ es $\overline{n_1^2(t)} = \overline{n_2^2(t)} = (N_0/2)(4B) = 2N_0B$. Por lo tanto, la salida analógica en banda base es

$$r_0(t) = \begin{Bmatrix} +A, & 0 < t \leq T, & 1 \text{ binario} \\ -A, & 0 < t \leq T, & 0 \text{ binario} \end{Bmatrix} + n_0(t) \tag{7–43}$$

donde $s_{01} = +A$, $s_{02} = -A$ y $n_0(t) = x_1(t) - x_2(t)$. El valor óptimo de umbral es de $V_T = 0$. Aún más, los procesos de ruido pasabanda $n_1(t)$ y $n_2(t)$ son independientes, ya que poseen espectros en bandas de frecuencia sin traslape (vea la figura 7–8) y son blancos (consulte el problema 7–29 para la verificación de este enunciado). En consecuencia, los procesos de ruido en banda base resultantes $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son independientes, y la potencia de ruido de salida es

$$\overline{n_0^2(t)} = \sigma_0^2 = \overline{x_1^2(t)} + \overline{x_2^2(t)} = \overline{n_1^2(t)} + \overline{n_2^2(t)} = 4N_0B \tag{7–44}$$

Si se sustituye para s_{01}, s_{02} y σ_0 dentro de la ecuación (7–17) se tiene que

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{4N_0B}}\right) \qquad \text{(filtros pasabanda)} \tag{7–45}$$

Comparando el rendimiento de la FSK con la BPSK y OOK con base en su PEP, se observa que la FSK requiere de 3 dB más de potencia que la BPSK para una misma P_e, pero requiere 3 dB menos de potencia que la OOK. Si se compara el rendimiento con base en la potencia promedio, se observa que la FSK es 3 dB peor que la BPSK, pero es equivalente a la OOK (ya que la potencia promedio de la OOK es 3 dB menor a su PEP).

El rendimiento de la señalización FSK con recepción por filtro acoplado se obtiene de la ecuación (7–20). La energía en la señal de diferencia es

$$E_d = \int_0^T [A\cos(\omega_1 t + \theta_c) - A\cos(\omega_2 t + \theta_c)]^2\, dt$$

$$= \int_0^T [A^2\cos^2(\omega_1 t + \theta_c) - 2A^2\cos(\omega_1 t + \theta_c)$$

$$\times \cos(\omega_2 t + \theta_c) + A^2\cos^2(\omega_2 t + \theta_c)]\, dt$$

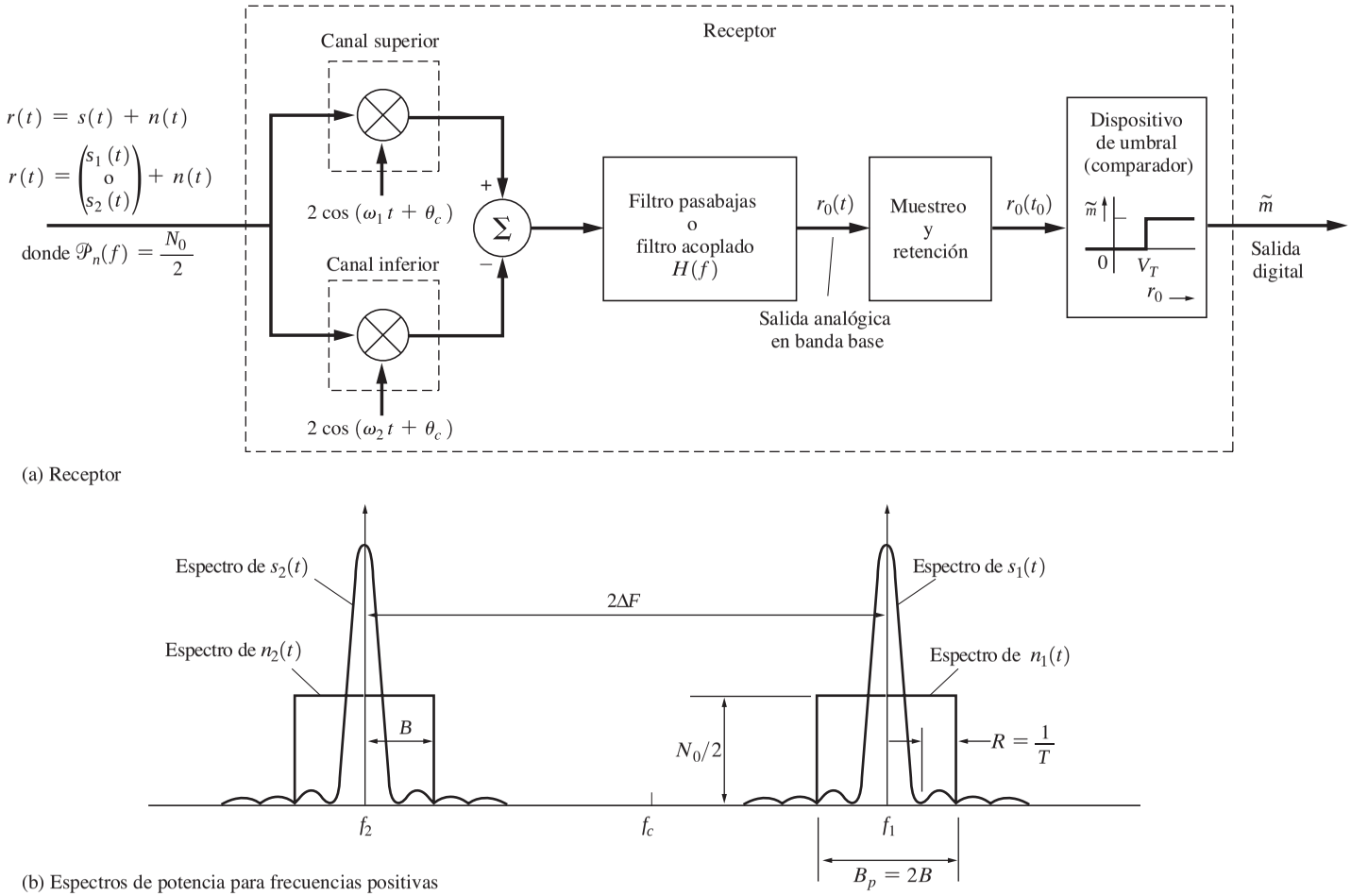


Figura 7–8 Detección coherente de una señal FSK.

o[4]

$$E_d = \tfrac{1}{2}A^2T - A^2 \int_0^T [\cos(\omega_1 - \omega_2)t]\, dt + \tfrac{1}{2}A^2T \tag{7–46}$$

Considere el caso cuando $2\Delta F = f_1 - f_2 = n/(2T) = nR/2$. Bajo esta condición la integral (es decir, el término de producto cruzado) llega a cero. Se requiere de esta condición para que $s_1(t)$ y $s_2(t)$ sean ortogonales. Por lo tanto, $s_1(t)$ no contribuirá con una salida al canal inferior (vea la figura 7–8), y viceversa. Aún más, si $(f_1 - f_2)\ (f_1 - f_2) \gg R$, entonces $s_1(t)$ y $s_2(t)$ serán aproximadamente ortogonales, ya que el valor de esta integral será despreciable en comparación a A^2T. Asumiendo que se satisfacen una o ambas de estas condiciones, $E_d = A^2T$, y la BER para la señalización FSK es

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \qquad \text{(filtro acoplado)} \tag{7–47}$$

donde la energía promedio por bit es de $E_b = A^2T/2$. El rendimiento de la señalización FSK es equivalente al de la señalización OOK (recepción por filtro acoplado) y es 3 dB inferior a la señalización BPSK (vea la figura 7–5).

Como se demostrará en la siguiente sección, la detección coherente es superior a la no coherente. Sin embargo, para una detección coherente, la referencia coherente debe estar disponible. Esta referencia a menudo se obtiene a partir de una señal de entrada ruidosa de tal forma que la referencia misma sea también ruidosa. Esto, por supuesto, aumenta la P_e sobre los valores dados por las fórmulas anteriores. Los circuitos que extraen la referencia de portadora son generalmente complejos y costosos. A menudo se está dispuesto a aceptar el rendimiento más pobre de un sistema no coherente para simplificar dichos circuitos y reducir el costo.

7–4 DETECCIÓN NO COHERENTE DE SEÑALES BINARIAS PASABANDA

La *derivación* de las ecuaciones para la BER de receptores no coherentes es considerablemente más difícil que la de la BER para receptores coherentes. Por otra parte, los *circuitos* para los receptores no coherentes son *relativamente simples* cuando se comparan con los que se utilizan en receptores coherentes. Por ejemplo, una OOK *con recepción no coherente es la técnica de señalización más popular empleada en los sistemas de comunicaciones por fibra óptica*.

En esta sección se calculará la BER para dos receptores no coherentes, uno para la recepción de señales OOK y el otro para señales FSK. Como se indicó en el capítulo 5, la BPSK no puede detectarse no coherentemente. Sin embargo, como se verá, las señales DPSK pueden demodularse con una técnica parcialmente coherente.

Modulación de encendido-apagado

En la figura 7–9 se muestra un receptor no coherente para la detección de señales OOK. Suponga que hay una señal OOK con ruido blanco gaussiano a la entrada del receptor. Entonces el ruido a la

[4] Para las integrales del tipo $\int_0^T A^2 \cos^2(\omega_1 t + \theta_c)\, dt = \frac{1}{2}A^2\, [\int_0^T dt + \int_0^T \cos(2\omega_1 t + 2\theta_c)\, dt]$, la segunda integral a la derecha es despreciable en comparación con la primera integral a la derecha debido a la oscilación en la segunda (lema de Riemann-Lebesque [Olmsted, 1961]).

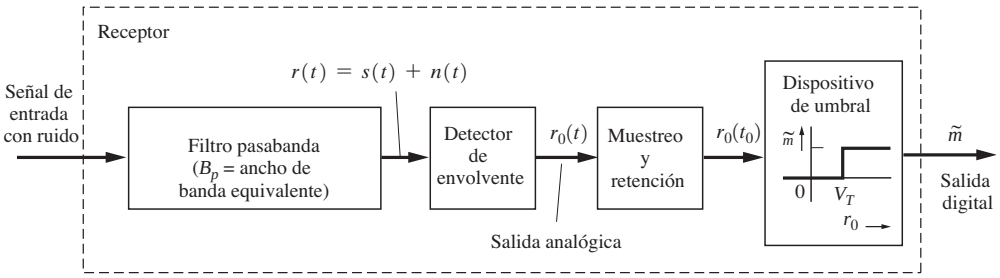


Figura 7–9 Detección no coherente de OOK.

salida del filtro $n(t)$ será ruido gaussiano limitado por banda y la salida total del filtro, que consiste de la señal con ruido, es

$$r(t) = \begin{cases} r_1(t), & 0 < t \leq T, \quad 1 \text{ binario enviado} \\ r_2(t), & 0 < t \leq T, \quad 0 \text{ binario enviado} \end{cases} \tag{7–48}$$

Sea el ancho de banda del filtro igual a B_p, donde éste es por lo menos tan grande como el ancho de banda de transmisión de la señal OOK, de tal manera que se preserve la forma de onda de la señal a la salida del filtro. Entonces, para el caso de un 1 binario, $s_1(t) = A\cos(\omega_c t + \theta_c)$, así que

$$r_1(t) = A\cos(\omega_c t + \theta_c) + n(t), \qquad 0 < t \leq T$$

o

$$r_1(t) = [A + x(t)]\cos(\omega_c t + \theta_c) - y(t)\,\text{sen}(\omega_c t + \theta_c), \qquad 0 < t \leq T \tag{7–49}$$

Para un 0 binario, $s_2(t) = 0$ y

$$r_2(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \theta_c) - y(t)\,\text{sen}\,(\omega_c t + \theta_c), \qquad 0 < t \leq T \tag{7–50}$$

La BER se obtiene empleando la ecuación (7–8), la cual, para el caso de señalización equiprobable, es

$$P_e = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{V_T} f(r_0|s_1)\,dr_0 + \tfrac{1}{2}\int_{V_T}^{\infty} f(r_0|s_2)\,dr_0 \tag{7–51}$$

Se requieren evaluar las PDF condicionales para la salida del detector de envolvente, $f(r_0|s_1)$ y $f(r_0|s_2)$. La primera es la PDF para $r_0 = r_0(t) = r_{01}$ que ocurre cuando $r_1(t)$ está a la entrada del detector de envolvente, y la segunda es la PDF para $r_0 = r_0(t_0) = r_{02}$ que ocurre cuando $r_2(t)$ está a la entrada del mismo.

Primero se evaluará $f(r_0|s_2)$. Cuando se envía $s_2(t)$, la entrada al detector de envolvente, $r_2(t)$, consiste en ruido gaussiano pasabanda limitado por banda, como se observa en la ecuación (7–50). En el ejemplo 6–10 se demostró que para este caso la PDF de la envolvente tiene una distribución de Rayleigh. Por supuesto que la salida del detector de envolvente es de hecho el envolvente, así que $r_0 = R = r_{02}$. Por lo tanto, la PDF para el caso de el ruido solo es

$$f(r_0|s_2) = \begin{cases} \dfrac{r_0}{\sigma^2}\, e^{-r_0^2/(2\sigma^2)}, & r_0 \geq 0 \\ 0, & r_0 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{7–52}$$

El parámetro σ^2 es la varianza del ruido a la entrada del detector de envolvente. Por lo tanto, $\sigma^2 = (N_0/2)(2B_p) = N_0 B_p$, donde B_p es el ancho de banda efectivo del filtro pasabanda y $N_0/2$ es la PSD del ruido blanco a la entrada del receptor.

Para el caso donde se transmite $s_1(t)$, la entrada al detector de envolvente se obtiene de la ecuación (7–49). Dado que $n(t)$ es un proceso gaussiano (que no posee funciones delta en su espectro en $f = \pm f_c$), el componente en fase en banda base, $A + x(t)$, es también un proceso gaussiano con media de A en lugar de una media igual a cero, como en la ecuación (7–50). La PDF para la envolvente $r_0 = R = r_{01}$ se evalúa empleando la misma técnica que se describió en el ejemplo 6–10 y el resultado que se cita en el problema 6–46. Por lo tanto, para el caso de una senoidal con ruido a la entrada del detector de envolvente,

$$f(r_0|s_1) = \begin{cases} \dfrac{r_0}{\sigma^2}\, e^{-(r_0^2+A^2)/(2\sigma^2)}\, I_0\left(\dfrac{r_0 A}{\sigma^2}\right) & r_0 \geq 0 \\ 0, & r_0 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{7–53}$$

la cual es una PDF Rician, donde

$$I_0(z) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{z\cos\theta}\, d\theta \tag{7–54}$$

es la función modificada de Bessel del primer tipo de orden cero.

Las dos PDF condicionales, $f(r_0|s_2)$ y $f(r_0|s_1)$, se muestran en la figura 7–10. De hecho, $f(r_0|s_2)$ es un caso especial de $f(r_0|s_1)$ cuando $A = 0$, ya que, para esta condición, se tiene ruido sólo en la entrada del detector y la ecuación (7–53) se convierte en la ecuación (7–52). También se presentan dos gráficos más de la ecuación (7–53), uno para $A = 1$ y otro para $A = 4$. Se observa que para $A/\sigma \gg 11$, la moda de la distribución [es decir, cuando $f(r_0|s_1)$ es un máximo] ocurre en el valor $r_0 = A$. Además, note que para $A/\sigma \gg 1$, $f(r_0|s_1)$ toma una forma gaussiana (como se demostrará posteriormente).

La BER para el receptor no coherente de OOK se obtiene al sustituir las ecuaciones (7–52) y (7–53) en la ecuación (7–51):

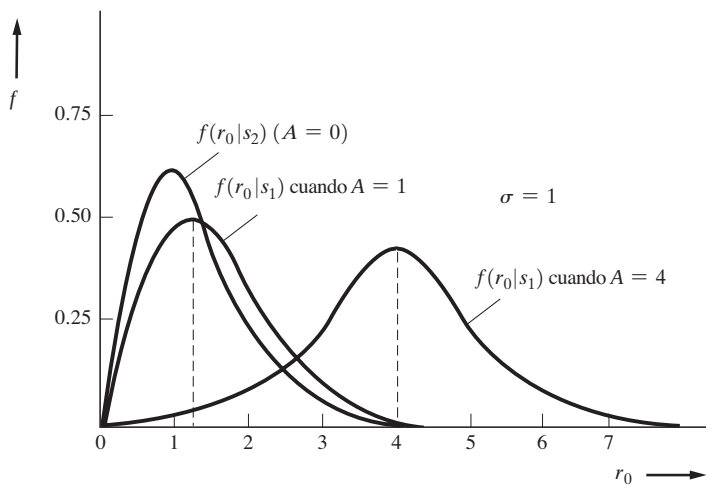


Figura 7–10 PDF condicionales para la recepción no coherente de OOK.

$$P_e = \frac{1}{2}\int_0^{V_T} \frac{r_0}{\sigma^2}\, e^{-(r_0^2+A^2)/(2\sigma^2)}\, I_0\left(\frac{r_0 A}{\sigma^2}\right) dr_0 + \frac{1}{2}\int_{V_T}^{\infty} \frac{r_0}{\sigma^2}\, e^{-r_0^2/(2\sigma^2)}\, dr_0 \tag{7–55}$$

El óptimo nivel de umbral es el valor de V_T para el cual P_e es mínimo. Para $A/\sigma \gg 1$, el umbral óptimo es alrededor de $V_T = A/2$, así que se ocupará este valor para simplificar las matemáticas empleadas.[5] La integral que involucra a la función de Bessel no puede evaluarse en forma cerrada. Sin embargo, I_0 se aproxima a través de $I_0(z) = e^z/\sqrt{2\pi z}$, lo cual es válido para $z \gg 1$. Entonces, para $A/\sigma \gg 1$, la integral izquierda en la ecuación (7–55) se convierte en

$$\frac{1}{2}\int_0^{V_T} \frac{r_0}{\sigma^2}\, e^{-(r_0^2+A^2)/(2\sigma^2)}\, I_0\left(\frac{r_0 A}{\sigma^2}\right) dr_0 \approx \frac{1}{2}\int_0^{A/2} \sqrt{\frac{r_0}{2\pi\sigma^2 A}}\, e^{(r_0-A)^2/(2\sigma^2)}\, dr_0$$

Debido a que $A/\sigma \gg 1$, el término dentro de la integral es despreciable excepto para los valores de r_0 alrededor de A, así que el límite inferior puede extenderse a $-\infty$, y $\sqrt{r_0/(2\pi\sigma^2 A)}$ reemplazarse con $\sqrt{1/(2\pi\sigma^2)}$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\int_0^{V_T} \frac{r_0}{\sigma^2}\, e^{-(r_0^2+A^2)/(2\sigma^2)}\, I_0\left(\frac{r_0 A}{\sigma^2}\right) dr_0 \approx \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{V_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-(r_0-A)^2/(2\sigma^2)}\, dr_0 \tag{7–56}$$

Cuando se sustituye esta ecuación en la (7–55), la BER se convierte en

$$P_e = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{A/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-(r_0-A)^2/(2\sigma^2)}\, dr_0 + \frac{1}{2}\int_{A/2}^{\infty} \frac{r_0}{\sigma^2}\, e^{-r_0^2/(2\sigma^2)}\, dr_0$$

o

$$P_e = \tfrac{1}{2} Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) + \tfrac{1}{2} e^{-A^2/(8\sigma^2)} \tag{7–57}$$

Usando $Q(z) = e^{-z^2/2}/\sqrt{2\pi z^2}$ para $z \gg 1$, se tiene que

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(A/\sigma)}\, e^{-A^2/(8\sigma^2)} + \tfrac{1}{2} e^{-A^2/(8\sigma^2)}$$

Debido a que $A/\sigma \gg 1$, el segundo término a la derecha domina sobre el primero. *Finalmente*, se obtiene la aproximación para la BER para la detección no coherente de OOK. Ésta es

$$P_e = \tfrac{1}{2} e^{-A^2/(8\sigma^2)}, \qquad \frac{A}{\sigma} \gg 1$$

o

$$P_e = \tfrac{1}{2} e^{-[1/(2TB_p)](E_b/N_0)}, \qquad \frac{E_b}{N_0} \gg \frac{TB_p}{4} \tag{7–58}$$

donde la energía promedio por bit es de $E_b = A^2T/4$ y $\sigma^2 = N_0 B_p$. $R = 1/T$ es la tasa de bit de la señal OOK y B_p el ancho de banda equivalente del filtro pasabanda que precede al detector de envolvente.

[5] La mayoría de los sistemas prácticos operan con $A/\sigma \gg 1$.

La ecuación (7−58) indica que la BER depende del ancho de banda del filtro pasabanda y que la P_e se hace más pequeña conforme B_p disminuye. Por supuesto que este resultado es sólo válido cuando la ISI es despreciable. Considerando la ecuación (3−74) se observa que el mínimo ancho de banda permitido (es decir, para que no exista ISI) se obtiene cuando el factor de *rolloff* es de $r = 0$. Esto implica que el mínimo ancho de banda pasabanda que se permite es de $B_p = 2B = R = 1/T$. En la figura 7−14 se presenta un gráfico de la BER para este caso del mínimo ancho de banda de $B_p = 1/T$.

Modulación por corrimiento de frecuencia

La figura 7−11 muestra un receptor no coherente para la detección de señales moduladas por corrimiento de frecuencia (FSK). La entrada consiste en una señal FSK, como se describe en la ecuación (7−39) con ruido blanco gaussiano con una PSD de $N_0/2$. En la figura 7−8b se presentó un diagrama del espectro de la señal FSK y del ruido, donde el ancho de banda del filtro pasabanda es de B_p. Se asume que el corrimiento de frecuencia, $2\Delta F = f_1 - f_2$, es lo suficientemente grande como para que los espectros de $s_1(t)$ y $s_2(t)$ tengan un traslape despreciable.

La BER para este receptor se obtiene al evaluar la ecuación (7−8). Para la señal sola a la entrada del receptor, la salida de la unión de las sumatorias es de $r_0(t) = +A$ cuando se transmite una marca (1 binario), y $r_0(t) = -A$ cuando se transmite un espacio (0 binario). Por esta simetría y como el ruido a la salida de los canales superior e inferior del receptor es parecido, el umbral óptimo es $V_T = 0$. De manera similar, se observa que la PDF de $r_0(t)$ condicionada a s_1 y que la PDF de $r_0(t)$ condicionada a s_2 son también parecidas. Es decir,

$$f(r_0|s_1) = f(-r_0|s_2) \tag{7–59}$$

Sustituyendo la ecuación (7−59) en la ecuación (7−8) se encuentra que la BER es

$$P_e = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f(r_0|s_1)\, dr_0 + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\infty} f(r_0|s_2)\, dr_0$$

o

$$P_e = \int_{0}^{\infty} f(r_0|s_2)\, dr_0 \tag{7–60}$$

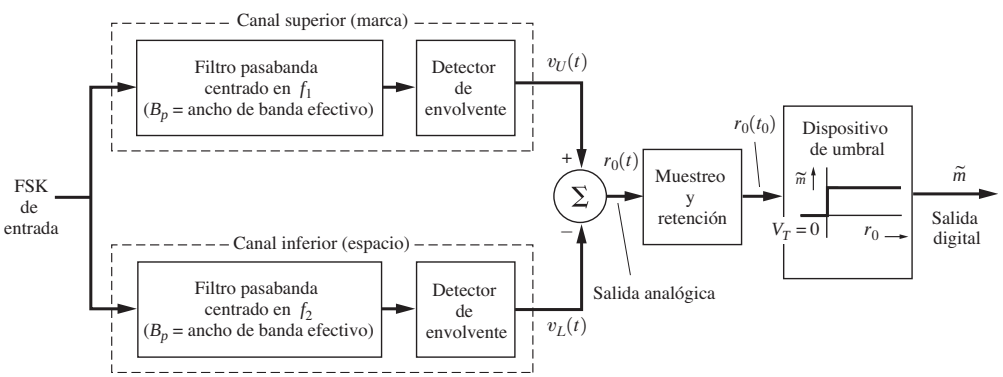


Figura 7–11 Detección no coherente de FSK.

Como se muestra en la figura 7−11, $r_0(t)$ es de valor positivo cuando la salida del canal superior $v_U(t)$ excede la salida del canal inferior $v_L(t)$. Por lo tanto,

$$P_e = P(v_U > v_L | s_2) \tag{7–61}$$

Para el caso de una señal de espacio con ruido a la entrada del receptor, se sabe que la salida del filtro pasabanda superior de sólo ruido gaussiano (sin señal). Por lo tanto, la salida del detector de envolvente superior v_U es ruido con una distribución de Rayleigh

$$(v_U | s_2) = \begin{cases} \dfrac{v_U}{\sigma^2} e^{-v_U^2/(2\sigma^2)}, & v_U \geq 0 \\ 0, & v_U < 0 \end{cases} \tag{7–62}$$

donde $\sigma^2 = N_0 B_p$. Por otra parte, v_L tiene una distribución Rician, ya que una senoidal (la señal de espacio) con ruido aparece a la entrada del detector de envolvente inferior:

$$f(v_L | s_2) = \begin{cases} \dfrac{v_L}{\sigma^2} e^{-(v_L^2 + A^2)/(2\sigma^2)} I_0\left(\dfrac{v_L A}{\sigma^2}\right), & v_L \geq 0 \\ 0, & v_L < 0 \end{cases} \tag{7–63}$$

donde $\sigma^2 = N_0 B_p$ también. Utilizando las ecuaciones (7−62) y (7−63) en la ecuación (7−61) se obtiene que

$$P_e = \int_0^\infty \frac{v_L}{\sigma^2} e^{-(v_L^2 + A^2)/(2\sigma^2)} I_0\left(\frac{v_L A}{\sigma^2}\right) \left[\int_{v_L}^\infty \frac{v_U}{\sigma^2} e^{-v_U^2/(2\sigma^2)} \, dv_U \right] dv_L$$

Cuando se evalúa la integral interior, la BER se convierte en

$$P_e = e^{-A^2/(2\sigma^2)} \int_0^\infty \frac{v_L}{\sigma^2} \, e^{-v_L^2/\sigma^2} I_0\left(\frac{v_L A}{\sigma^2}\right) dv_L \tag{7–64}$$

Esta integral puede evaluarse empleando la tabla de integrales del apéndice A. Por lo tanto, para la detección no coherente de FSK, la BER es

$$P_e = \tfrac{1}{2} e^{-A^2/(4\sigma^2)}$$

o

$$P_e = \tfrac{1}{2} e^{-[1/(2TB_p)](E_b/N_0)} \tag{7–65}$$

donde la energía promedio por bit es de $E_b = A^2T/2$ y $\sigma^2 = N_0 B_p$. $N_0/2$ es la PSD del ruido de entrada y B_p el ancho de banda efectivo de cada uno de los filtros pasabanda (vea la figura 7−11). Si se compara la ecuación (7−65) con la ecuación (7−58) se observa que la OOK y FSK son equivalentes con base en E_b/N_0. La figura 7−14 grafica la ecuación (7−65) para el caso del mínimo ancho de banda en el filtro permitido, $B_p = R = 1/T$, para que no exista ISI. Cuando se compara el rendimiento de error de la FSK detectada no coherentemente con la FSK detectada coherentemente, se observa que para la primera se requiere, cuando mucho, de E_b/N_0 de sólo 1 dB más que para la FSK coherente si la P_e es 10^{-4} o menor. El receptor no coherente de FSK es considerablemente más fácil de construir porque no se tienen que generar las señales coherentes de referencia. Por lo tanto, en la práctica casi todos los receptores de FSK ocupan detección no coherente.

Modulación por corrimiento de fase diferencial

Las señales moduladas por corrimiento de fase no pueden detectarse no coherentemente. Sin embargo, se emplea una técnica parcialmente coherente en donde la referencia de fase para el intervalo actual de señalización se suministra mediante una versión retrasada de la señal que ocurrió durante el intervalo previo de señalización. Esto se ilustra con los receptores de la figura 7−12, donde se provee de una decodificación diferencial con el retraso (de un bit) y el multiplicador. Si se aplicara una señal BPSK (sin ruido) a la entrada del receptor, la salida del circuito de muestreo y retención, $r_0(t_0)$, sería positivo (1 binario) si el bit actual de datos y el bit previo de datos fueran del mismo sentido□ $r_0(t_0)$ sería negativo (0 binario) si los dos bits de datos fueran diferentes. En consecuencia, si los datos en la señal BPSK están codificados diferencialmente (para un ejemplo, vea la ilustración de la tabla 3−4), la secuencia de datos *decodificada* se recuperaría a la salida de dicho receptor. Esta técnica de señalización que consiste en la transmisión de una señal BPSK diferencialmente codificada se conoce como DPSK (por sus siglas en inglés).

La BER para estos receptores de DPSK puede derivarse bajo las siguientes suposiciones:

- El ruido aditivo a la entrada es blanco y gaussiano.
- La perturbación en la fase de la señal compuesta con ruido varía lentamente de tal forma que la referencia de fase es esencialmente una constante desde el intervalo pasado de señalización hasta el intervalo actual de señalización.
- El oscilador de portadora en el transmisor es lo suficientemente estable para que la fase durante el intervalo actual de señalización sea la misma que para el intervalo pasado de señalización.

La BER para el demodulador subóptimo de la figura 7−12a se ha obtenido por □ H. Park para el caso de un gran valor en la razón señal a ruido de entrada y para $B_T > 2/T$, pero no tan grande. El resultado es [Park, 1978]

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{(E_b/N_0)}{1 + [(B_T T/2)/(E_b/N_0)]}}\right) \tag{7–66a}$$

Para valores típicos de B_T y de E_b/N_0 en el rango de $B_T = 3/T$ y $E_b/N_0 = 10$, esta BER puede aproximarse mediante

$$P_e = Q\left(\sqrt{E_b/N_0}\right) \tag{7–66b}$$

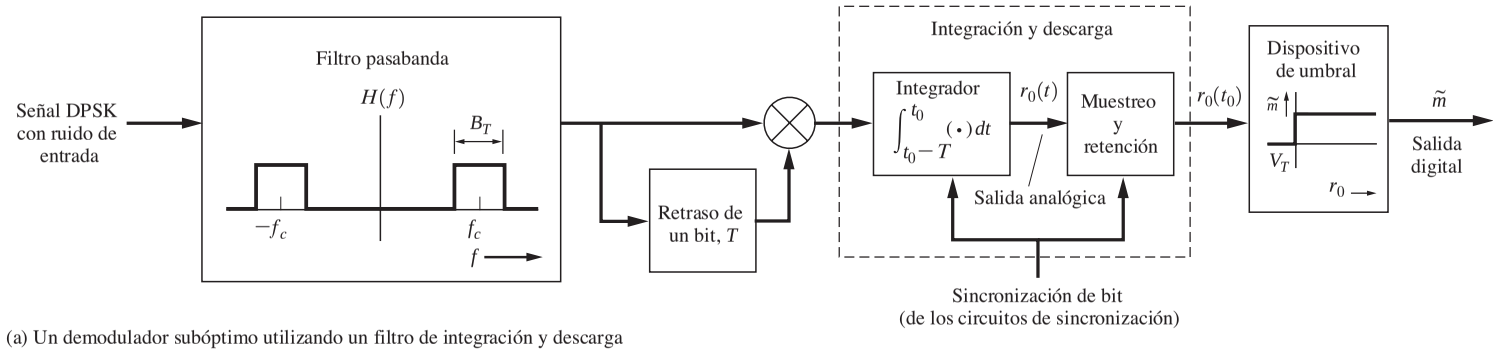
Por lo tanto, el rendimiento del receptor subóptimo de la figura 7−12a es parecido al que se obtiene para la OOK y FSK, como se grafica en la figura 7−14.

La figura 7−12b muestra una forma de un receptor óptimo de DPSK que puede obtenerse [Couch, 1993, Fig. 8−25]. La BER para la demodulación óptima de DPSK es

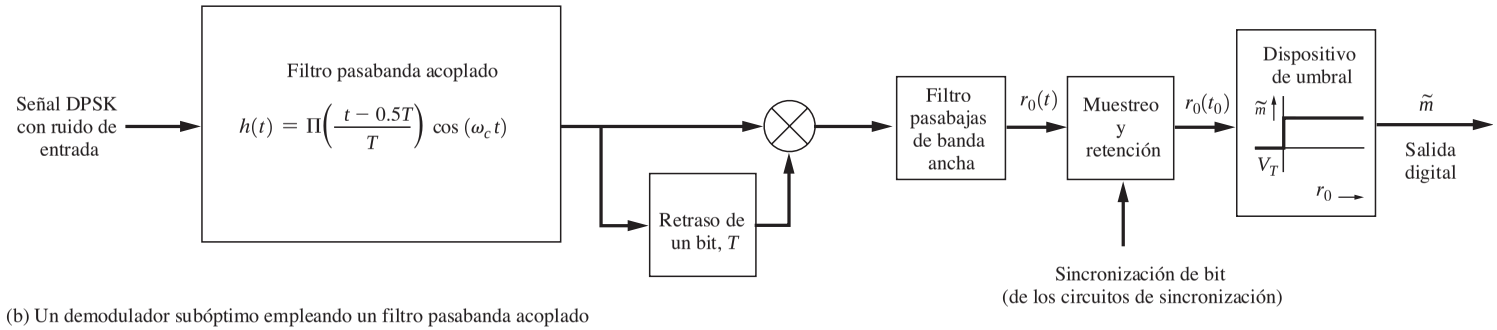
$$P_e = \tfrac{1}{2} e^{-(E_b/N_0)} \tag{7–67}$$

También son posibles otras formas alternativas de receptores óptimos de DPSK [Lindsey y Simon, 1973□Simon, 1978].

La figura 7−14 muestra un gráfico de esta característica de error para el caso de una demodulación óptima de DPSK, ecuación (7−67). Comparando los rendimientos de error de la BPSK y



(a) Un demodulador subóptimo utilizando un filtro de integración y descarga



(b) Un demodulador subóptimo empleando un filtro pasabanda acoplado

Figura 7–12 Demodulación de DPSK.

DPSK con demodulación óptima, se observa que para la misma P_e, la señalización por DPSK requiere de un valor para E_b/N_0 de, cuando mucho, 1 dB más que para la BPSK, siempre y cuando la $P_e = 10^{-4}$ o menor. En la práctica se usa la DPSK a menudo en lugar de la BPSK, ya que el receptor de DPSK no requiere un circuito de sincronización de portadora.

7–5 MODULACIÓN POR CORRIMIENTO DE FASE EN CUADRATURA Y MODULACIÓN POR CORRIMIENTO MÍNIMO

Como se describió en la sección 5−10, la modulación por corrimiento de fase en cuadratura (QPSK) es una técnica multinivel de señalización que ocupa $L = 4$ niveles por símbolo. Por lo tanto, se transmiten 2 bits durante cada intervalo de señalización (de T segundos). La señal QPSK puede representarse por

$$s(t) = (\pm A)\cos(\omega_c t + \theta_c) - (\pm A)\,\text{sen}(\omega_c t + \theta_c), \qquad 0 < t \leq T \tag{7–68}$$

donde el factor de $(\pm A)$ tanto en la portadora coseno como en la portadora seno es un bit de datos. El ruido relevante de entrada se representa mediante

$$n(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \theta_n) - y(t)\,\text{sen}(\omega_c t + \theta_n)$$

La señal QPSK es equivalente a dos señales BPSK, una usando una portadora coseno y la otra una portadora seno. La señal QPSK se detecta con el receptor coherente que se muestra en la figura 7−13. (Ésta es una aplicación del detector IQ que se presentó por primera vez en la figura 4−31.) Debido a que tanto el canal superior como el inferior del receptor son receptores de BPSK, la BER es la misma que para un sistema de BPSK. Por lo tanto, a partir de la ecuación (7−38), la BER para el receptor de QPSK es

$$P_e = Q\left(\sqrt{2\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}\right) \tag{7–69}$$

Esto también se muestra en la figura 7−14. Las BER para la señalización por BPSK y QPSK son idénticas, pero para la misma tasa de bit R los anchos de banda de las dos señales *no* son iguales. El ancho de banda de la señal QPSK es exactamente la mitad del de la BPSK para una tasa de bit dada. Este resultado se obtiene de la ecuación (5−103) o la ecuación (5−106), donde la señal QPSK transmite un símbolo por cada 2 bits de datos, mientras que la BPSK uno por cada bit. El ancho de banda de la $\pi/4$ QPSK es idéntica que para la QPSK. Para la misma BER, la $\pi/4$ QPSK diferencialmente detectada requiere de cerca de 3 dB más de E_b/N_0 que para la QPSK, pero la $\pi/4$ QPSK coherentemente detectada tiene el mismo rendimiento en la BER que la QPSK.

En el capítulo 5 se mostró que la MSK es esencialmente equivalente a la QPSK, a excepción de que los datos en los componentes de modulación en cuadratura $x(t)$ y $y(t)$ están desplazados y su forma de pulso equivalente de datos es una parte positiva de una función coseno en lugar de un pulso rectangular. (Esto resulta en una PSD para la MSK que decae más rápidamente que para la PSK.) El receptor óptimo para la detección de MSK es parecido al de QPSK (figura 7−13), excepto que se usa un filtro acoplado con una forma de pulso coseno en lugar de una forma de pulso rectangular que se sintetiza mediante el circuito de integración y descarga. En consecuencia, debido a que las representaciones de señales MSK y QPSK y las estructuras de receptores óptimos son idénticas a excepción de la forma de pulso, la probabilidad de error en el bit para la MSK y QPSK es también idéntica, como se describe en la ecuación (7−69). La figura 7−14 muestra un gráfico de esta BER.

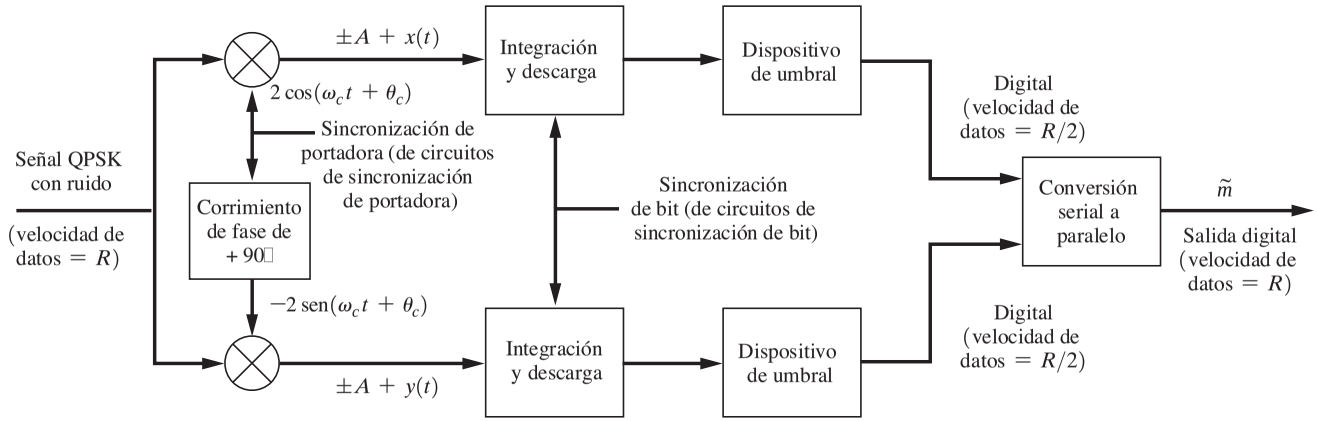

Señal QPSK con ruido
(velocidad de datos = R)
±A + x(t)
2 cos(ω_c t + θ_c)
Sincronización de portadora (de circuitos de sincronización de portadora)
Corrimiento de fase de + 90°
−2 sen(ω_c t + θ_c)
±A + y(t)
Integración y descarga
Integración y descarga
Sincronización de bit (de circuitos de sincronización de bit)
Dispositivo de umbral
Dispositivo de umbral
Digital (velocidad de datos = R/2)
Digital (velocidad de datos = R/2)
Conversión serial a paralelo
m̃
Salida digital (velocidad de datos = R)

Figura 7–13 Detección por filtro acoplado de QPSK.

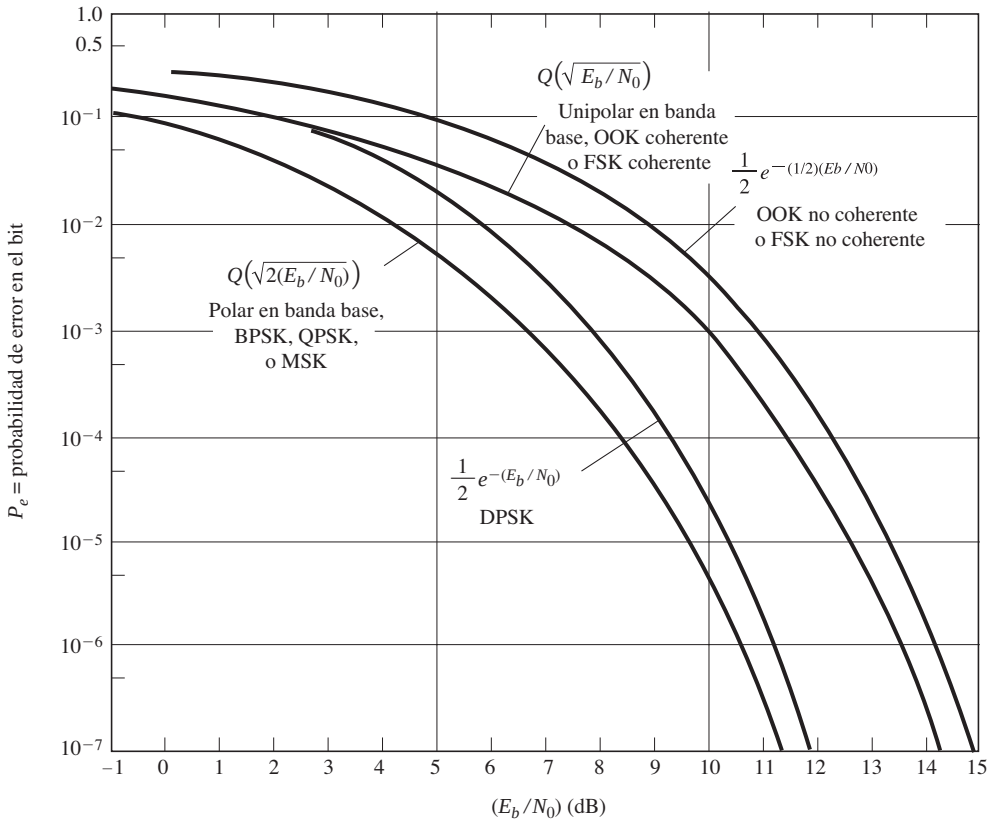


Figura 7–14 Comparación de la probabilidad de error en el bit para varias técnicas de señalización digital.

Si la información está codificada adecuadamente, los datos en una señal MSK también pueden ubicarse con detectores de tipo FM, ya que dicha señal es también FSL con una mínima cantidad de corrimiento de frecuencia que hace que $s_1(t)$ y $s_2(t)$ sean ortogonales. Por lo tanto, para la detección subóptima de MSK, la BER se obtiene a partir de la BER para la FSK, como se describe en las ecuaciones (7−47) y (7−65) para la detección coherente de FM.

7–6 COMPARACIÓN DE SISTEMAS DE SEÑALIZACIÓN DIGITAL

Tasa de error en el bit y ancho de banda

La tabla 7−1 compara la BER para las diferentes técnicas de señalización que se estudiaron en las secciones anteriores. También se tabula el mínimo ancho de banda para dichas señales. El mínimo ancho de banda absoluto se alcanza cuando se emplean pulsos de datos de tipo (sen x)/x, como se describió en los capítulos 3 y 5 (excepto para el caso especial de MSK).

TABLA 7–1 COMPARACIÓN DE MÉTODOS DE SEÑALIZACIÓN DIGITAL

Tipo de señalización digital	Mínimo ancho de banda de transmisión requerido[a] (donde R es la tasa de bit)		Rendimiento de error			
Señalización en banda base						
Unipolar	$\frac{1}{2}R$	(5-105)			$Q\left[\sqrt{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}\right]$	(7–24b)
Polar	$\frac{1}{2}R$	(5-105)			$Q\left[\sqrt{2\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}\right]$	(7–26b)
Bipolar	$\frac{1}{2}R$	(5-105)			$\frac{3}{2}Q\left[\sqrt{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}\right]$	(7–28b)
Señalización pasabanda			*Detección coherente*		*Detección no coherente*	
OOK	R	(5-106)	$Q\left[\sqrt{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}\right]$	(7–33)	$\frac{1}{2}\ e^{-(1/2)(E_b/N_0)}, \left(\frac{E_b}{N_0}\right) > \frac{1}{4}$	(7–58)
BPSK	R	(5-106)	$Q\left[\sqrt{2\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}\right]$	(7–38)	Requiere detección coherente	
FSK	$2\Delta F + R$ donde $2\Delta F = f_2 - f_1$ es el corrimiento de frecuencia	(5-89)	$Q\left[\sqrt{\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}\right]$	(7–47)	$\frac{1}{2}\ e^{-(1/2)(E_b/N_0)}$	(7–65)
DPSK	R	(5-106)	No utilizado en la práctica		$\frac{1}{2}\ e^{-(E_b/N_0)}$	(7–67)
QPSK	$\frac{1}{2}R$	(5-106)	$Q\left[\sqrt{2\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}\right]$	(7–69)	Requiere detección coherente	
MSK	$1.5R$ (ancho de banda nulo)	(5-115)	$Q\left[\sqrt{2\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}\right]$	(7–69)	$\frac{1}{2}\ e^{-(1/2)(E_b/N_0)}$	(7–65)

[a] Especificaciones típicas para el ancho de banda por la ITU son mayores que estos mínimos [Jordan, 1985].

En la figura 7−14, las curvas de la BER se grafican con las ecuaciones de la tabla 7−1. A excepción de las curvas que describen los casos de detección no coherente, todos estos resultados asumen que se emplea el filtro óptimo, el acoplado, en el receptor. En la práctica, filtros más simples funcionan casi tan bien como el acoplado. Por ejemplo, en una simulación por computadora de un sistema de BPSK con un filtro receptor de Butterworth con tres polos y un ancho de banda igual a la velocidad de datos, el valor de E_b/N_0 requiere incrementarse no más de 0.4 dB para obtener la misma BER que cuando se emplea un filtro acoplado (para tasas de error mayores a 10^{-12}).

Si se comparan las diversas técnicas de señalización pasabanda, se observa que la QPSK y MSK presentan el mejor rendimiento general en términos del mínimo ancho de banda requerido para una velocidad de señalización dada y una de las más pequeñas P_e para una E_b/N_0 dada. Sin embargo, la QPSK es relativamente costosa en su implementación, ya que requiere detección coherente. La figura 7−14 muestra que para la misma P_e, la DPSK (usando un receptor no coherente) requiere de sólo alrededor de 1 dB más en E_b/N que para la QPSK o BPSK, para tasas de error de 10^{-4} o menores. Como la DPSK es mucho más fácil de recibir, en la práctica se ocupa más y se prefiere sobre la BPSK. De manera similar, el rendimiento de la BER de un receptor no coherente de FSK es muy cercano al de uno coherente, y como aquél es más simple, comúnmente se recurre a él. En algunas aplicaciones existen múltiples trayectorias de diferentes longitudes entre el transmisor y el receptor (por ejemplo, las originadas por reflexión). Esto causa desvanecimiento e incoherencia en la señal recibida (fase). En este caso la implementación de detección coherente es muy complicada, independientemente de la complejidad del receptor, y se opta por usar las técnicas de detección no coherente.

La codificación de canal puede utilizarse para reducir la P_e por debajo de los valores presentados en la figura 7−14. Este concepto se desarrolló en el capítulo 1. Si se ocupa la fórmula de capacidad en el canal de Shannon se encontró que, teóricamente, la BER se aproximaría a cero mientras E_b/N_0 estuviera por encima de −1.59 dB cuando se emplea codificación óptima (desconocida) sobre un canal con ancho de banda infinito. Con la codificación práctica se alcanzan ganancias de código tan grandes como de 9 dB en los sistemas de BPSK y QPSK. Es decir, para una BER dada los requisitos para E_b/N_0 en la figura 7−14 pudieran reducirse hasta 9 dB si se usara alguna codificación.

Error en el símbolo y error en el bit para señalización multinivel

Para sistemas *multinivel* (en comparación con sistemas de señalización binaria), es imposible obtener fórmulas simples en forma cerrada para la probabilidad de *error en el bit* (también conocida como tasa de error en el bit, BER). Esta es la razón por la que no se incluyen los resultados en la BER para sistemas multinivel ni en la tabla 7−1 ni en la figura 7−14, excepto para el caso especial de la QPSK (la cual, como se discutió en la sección 7−5, consta de dos señales PSK binarias ortogonales). Por supuesto que es factible obtener la BER para señales multinivel mediante simulación o medición.

En algunos casos sí se obtienen fórmulas simples para los límites superiores en la probabilidad de *error en el símbolo* en sistemas multinivel. Para la MPSK, un límite sobre el error de bit es [Wilson, 1966]

$$P(E) \leq Q\left[\sqrt{2\left(\frac{E_b}{N_0}\right)(\log_2 M)\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}\right], \text{ para MPSK}$$

para el caso de AWGN. El límite se vuelve estrecho para tamaños de M y E_b/N_0, como $M = 8$ y $(E_b/N_0)_{\text{dB}} = 10$ dB. Para una señalización QAM (en el caso de AWGM), un límite en el error en el símbolo es [Wilson, 1967]

$$P(E) \leq 4Q\left[\sqrt{2\left(\frac{E_b}{N_0}\right)\eta_M}\right], \text{ para MQAM}$$

donde el factor de eficiencia η_M es de −4 dB para 16 QAM, −6 dB para 32 QAM, −8.5 dB para 64, −10.2 dB para 128 y −13.3 dB para 256 QAM.

La probabilidad de error en el símbolo (también conocida como tasa de error en la palabra, WER, por sus siglas en inglés) no se relaciona fácilmente con la BER. Sin embargo, los límites sobre la relación entre la BER y la WER son [Couch, 1993]

$$\frac{1}{K}P(E) \leq P_e \leq \frac{(M/2)}{M\text{-}1}P(E)$$

donde P_e es la BER, $P(E)$ es la WER y $M = 2^K$. Cuando ocurren errores bajo condiciones normales de operación de una tasa baja de error (como por ejemplo, $P_e < 10^{-3}$), el error en el símbolo seleccionado es generalmente el "vecino más cercano" al símbolo correcto en la constelación de señal. Esto resulta en una BER cercana al límite inferior. Para este caso, la BER es casi igual al límite inferior si la asignación de bit a símbolo es un código de Gray (vea la tabla 3−1) debido a que sólo existe un cambio en un solo bit (error) para el símbolo del vecino más cercano. Por ejemplo, si $M = 128$ $(K = 7)$, entonces

$$0.143\ P(E) \leq P_e \leq 0.504\ P(E)$$

Bajo las condiciones normales de operación de una BER baja, por ejemplo de $P_e < 10^{-3}$, la BER estaría cerca del límite inferior, así que $P_e \approx 0.143\ P(E)$ para $M = 128$.

Sincronización

Como se ha visto, se requieren tres niveles de sincronización en los sistemas de comunicación digitales:

1. Sincronización de bit.
2. Sincronización de trama o palabra.
3. Sincronización de portadora.

Las sincronizaciones de bit y de trama se discutieron en el capítulo 3.

Se requiere de la sincronización de portadora en los receptores que emplean detección coherente. Si el espectro de la señal digital tiene una línea discreta a la frecuencia de portadora, por ejemplo en la señalización por OOK equiprobable, se puede utilizar un PLL para recuperar la referencia de portadora a partir de la señal recibida. Esto se describió en el capítulo 4 y se mostró en la figura 4−24. En la señalización BPSK no existe un término discreto de portadora, pero el espectro es simétrico alrededor de la frecuencia de portadora. En consecuencia, se puede usar un lazo de Costas o un lazo cuadrático para la recuperación de sincronización de portadora. Estos lazos se ilustraron en las figuras 5−3 y P5−51. Como se indicó en la sección 5−4, estos lazos pueden engancharse con un

error en fase de 180°, el cual debe resolverse para asegurarse que los datos recuperados no estén complementados. Para las señales QPSK, la referencia de portadora se puede obtener mediante un lazo de Costas más generalizado o, de forma equivalente, mediante un lazo a la cuarta potencia [Spilker, 1977]. Estos lazos poseen una ambigüedad de cuatro fases de 0°, ±90° o ±180°, lo cual debe también resolverse para obtener los datos correctamente demodulados. Estos hechos ilustran una vez más la razón por la cual las técnicas de recepción no coherente (que pueden emplearse para la OOK, FSK y DPSK) son tan populares.

Se requieren sincronizadores de bit en el receptor para suministrar la señal de bit para sincronizar el circuito de muestreo y retención y, si está presente, el circuito del filtro acoplado. El sincronizador de bit se ilustró en la figura 3–20.

Todas las fórmulas para la BER que se han obtenido asumen que la sincronización de bit y la sincronización de portadora (para la detección coherente) libres de ruido están disponibles en el receptor. Por supuesto que, si estas señales se obtienen de señales ruidosas presentes a la entrada del receptor, las de referencia también serán ruidosas. Por lo tanto, la P_e será mayor que la que se presenta para el caso ideal cuando se asume una sincronización libre de ruido.

El tercer tipo de sincronización que se requiere en la mayoría de los sistemas digitales es el de trama o de palabra. En algunos sistemas, este tipo de sincronización se ocupa simplemente para demarcar los datos seriales a palabras digitales o *bytes*. En otros sistemas se usa la codificación por bloques o codificación convolucional en el transmisor de tal forma que algunos de los errores en el bit a la salida del dispositivo de umbral del receptor puedan detectare y corregirse con circuitos de decodificación. En estos sistemas se necesita la sincronización de palabra para sincronizar los circuitos de decodificación en el receptor. Además, la sincronización de trama se requiere en los sistemas con multiplexión por división de tiempo (TDM). Esto se describió en la figura 3–37. Pueden necesitarse niveles más altos de sincronización, como la sincronización de red, cuando se reciben datos desde varias fuentes. Por ejemplo, los sistemas de comunicaciones de acceso múltiple vía satélite requieren de una sincronización de red, como se ilustrará en el capítulo 8.

7–7 RAZÓN SEÑAL A RUIDO DE SALIDA PARA SISTEMAS PCM

En las secciones anteriores se estudió cómo la P_e para varios sistemas digitales depende de la energía por bit E_b de la señal a la entrada del receptor y del nivel del espectro del ruido de entrada $N_0/2$. A continuación se presentarán aplicaciones para estas técnicas de señalización donde se codifica una señal analógica dentro de una señal PCM que consiste en los datos que se transmiten sobre el sistema digital con una BER igual a la P_e, lo que se ilustra en la figura 7–15. El transmisor y receptor digitales pueden ser cualquiera de los asociados con los sistemas de señalización digital estudiados en las secciones anteriores. Por ejemplo, $s(t)$ puede ser una señal FSK y el receptor sería un receptor de FSK. La señal recuperada posee algunos errores en el bit (causados por el ruido en el canal). En consecuencia, la forma de onda analógica decodificada a la salida del decodificador PCM tendrá ruido debido a estos errores en el bit, así como el ruido de cuantización. La pregunta es: ¿cuál es la razón de señal pico a ruido promedio $(S/N)_{\text{salida}}$ para la salida analógica? Si la señal analógica de entrada cuenta con una PDF uniforme sobre $-V$ a $+V$ y existen M pasos en el cuantificador uniforme, la respuesta es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk salida}} = \frac{3M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e} \tag{7–70}$$

Las aplicaciones de este resultado se estudiaron por primera vez en la sección 3–3.

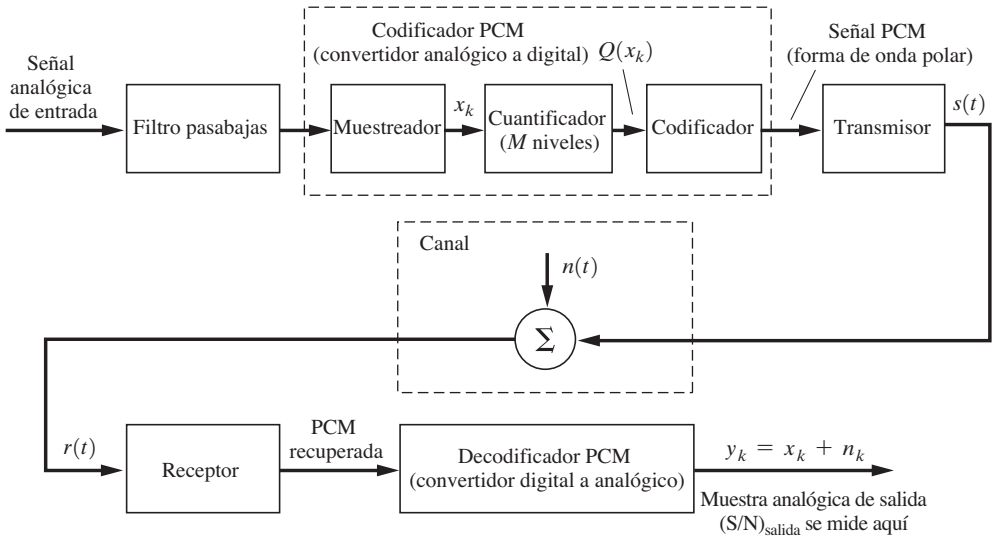


Figura 7–15 Sistema PCM de comunicaciones.

A continuación se derivará la ecuación (7–70). Como se ve en la figura 7–15, la muestra analógica x_k se obtiene al tiempo de muestreo $t = kT_s$. Esta muestra se cuantifica a un valor $Q(t_k)$, el cual es uno de los M niveles posibles, como se indica en la figura 7–16. La muestra cuantificada $Q(x_k)$ se codifica a una palabra PCM de n bits $(a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})$, donde $M = 2^n$. Si se usa la señalización polar, los términos a_k toman valores de +1 o −1. Para simplificar esto se asume que las palabras código PCM se relacionan a los valores cuantificados mediante[6]

$$Q(x_k) = V \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \left(\tfrac{1}{2}\right)^j \tag{7–71}$$

Por ejemplo, si la palabra PCM para la k–ésima muestra resulta ser $(+1, +1, \ldots, +1)$, entonces el valor de la muestra cuantificada sería

$$Q(x_k) = V\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{V}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Del apéndice A se encuentra que la suma de esta serie finita es

$$Q(x_k) = \frac{V}{2}\left[\frac{(\frac{1}{2})^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right] = V - \frac{V}{2^n}$$

[6] Para una simplificación matemática se emplean niveles de codificación binarios naturales en la ecuación (7–71), y no la codificación de Gray utilizada en la tabla 3–1.

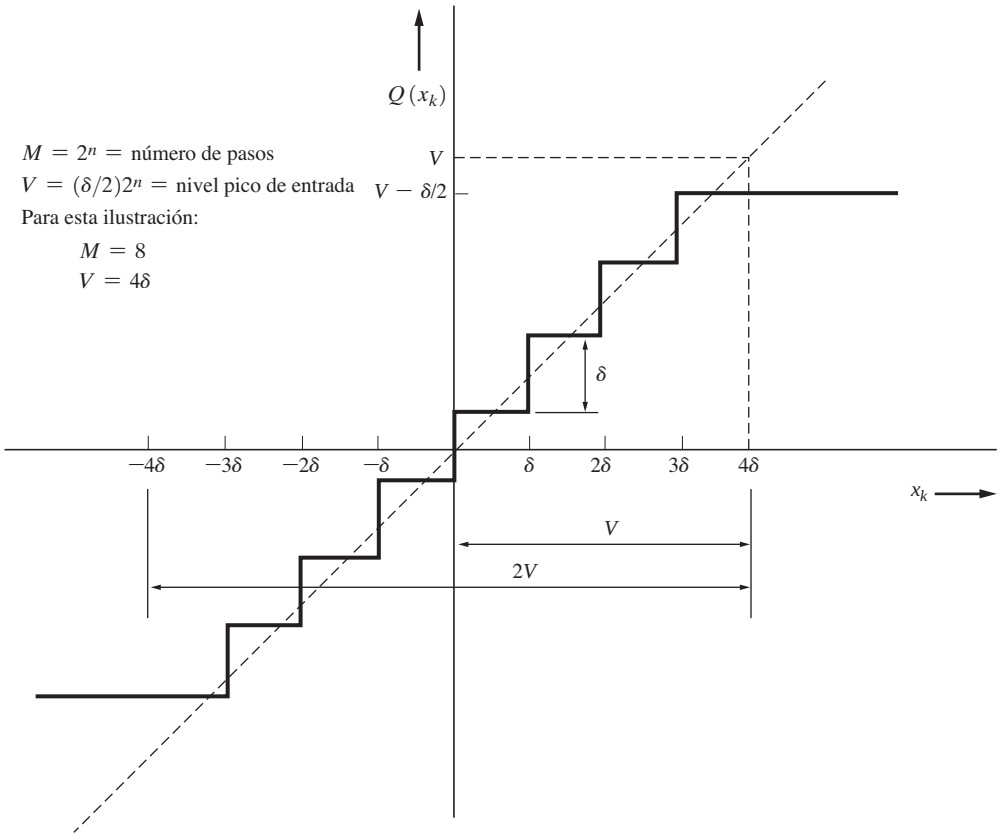


Figura 7–16 Característica uniforme del cuantificador para $M = 8$ (con $n = 3$ bits en cada palabra PCM).

donde δ es el tamaño de paso del cuantificador (figura 7−16). Por lo tanto, la palabra PCM (+1, +1, . . ., +1) representa el valor máximo del cuantificador, como se ilustra en la figura 7−16. El nivel del cuantificador correspondiente a las otras palabras código puede obtenerse de manera similar.

Considerando de nuevo la figura 7−15, note que la muestra analógica de salida del sistema PCM para el k−ésimo tiempo de muestreo es

$$y_k = x_k + n_k$$

donde x_k es la señal (igual que la muestra de entrada) y n_k es ruido. La potencia pico de señal de salida a potencia promedio de ruido es entonces

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk salida}} = \frac{[(x_k)_{\text{máx}}]^2}{\overline{n_k^2}} = \frac{V^2}{\overline{n_k^2}} \tag{7–72}$$

donde $(x_k)_{\text{máx}} = V$, como se observa en la figura 7−16. Como se indicó en el capítulo 3, se asume que el ruido n_k consiste en dos efectos sin correlación:

- Ruido de cuantización que se debe al error de cuantificación:

$$e_q = Q(x_k) - x_k \tag{7–73}$$

- Ruido debido a errores en el bit que originan el ruido en el canal:

$$e_b = y_k - Q(x_k) \tag{7–74}$$

Por lo tanto,

$$\overline{n_k^2} = \overline{e_q^2} + \overline{e_b^2} \tag{7–75}$$

Primero evalúe la potencia de ruido de cuantización. Para una señal uniformemente distribuida, el ruido de cuantización está también uniformemente distribuido. Aún más, como se indica en la figura 3–8c, el intervalo de la distribución uniforme es de $(-\delta/2, \delta/2)$, donde δ es el tamaño de paso ($\delta = 2$ en la figura 3–8c). Por lo tanto, con $M = 2^n = 2V/\delta$ (a partir de la figura 7–16), se tiene que

$$\overline{e_q^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e_q^2 f(e_q)\, de_q = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} e_q^2 \frac{1}{\delta}\, de_q = \frac{\delta^2}{12} = \frac{V^2}{3M^2} \tag{7–76}$$

La potencia de ruido debido a errores en el bit se evalúa mediante la ecuación (7–74), lo que resulta en

$$\overline{e_b^2} = \overline{[y_k - Q(x_k)]^2} \tag{7–77}$$

donde $Q(x_k)$ se obtiene de la ecuación (7–71). La muestra analógica recuperada y_k se reconstruye a partir de la palabra código PCM recibida empleando el mismo algoritmo que el de la ecuación (7–71). Asumiendo que la palabra PCM recibida para la k–ésima muestra es $(b_{k1}, b_{k2}, \ldots, b_{kn})$, se observa que

$$y_k = V \sum_{j=1}^{n} b_{kj} \left(\tfrac{1}{2}\right)^j \tag{7–78}$$

Los términos b serán diferentes a los términos a siempre que exista un error en el bit en la forma de onda digital (PCM) recuperada. Ocupando las ecuaciones (7–78) y (7–71), la ecuación (7–77) se convierte en

$$\begin{aligned} \overline{e_b^2} &= V^2 \overline{\left[\sum_{j=1}^{n} (b_{kj} - a_{kj}) \left(\tfrac{1}{2}\right)^j\right]^2} \\ &= V^2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \left(\overline{b_{kj} b_{k\ell}} - \overline{a_{kj} b_{k\ell}} - \overline{b_{kj} a_{k\ell}} + \overline{a_{kj} a_{k\ell}}\right) 2^{-j-\ell} \end{aligned} \tag{7–79}$$

donde b_{kj} y $b_{k\ell}$ son dos bits en la palabra PCM recibida que ocurren a diferentes posiciones de bit cuando $j \neq \ell$. De manera similar, a_{kj} y $b_{k\ell}$ son los bits transmitido (Tx) y recibido (Rx) en dos diferentes posiciones de bit, donde $j \neq \ell$ (para la palabra PCM correspondiente a la k–ésima muestra). El proceso de codificación produce bits que son independientes si $j \neq \ell$. Aún más, los bits tienen una media igual a cero. Por lo tanto, $\overline{b_{kj} b_{k\ell}} = \overline{b_{kj}}\,\overline{b_{k\ell}} = 0$ para $j \neq \ell$. Se pueden obtener resultados parecidos para los otros promedios en el lado derecho de la ecuación (7–79). Dicha ecuación se convierte en

$$\overline{e_b^2} = V^2 \sum_{j=1}^{n} \left(\overline{b_{kj}^2} - 2\overline{a_{kj} b_{kj}} + \overline{a_{kj}^2}\right) 2^{-2j} \tag{7–80}$$

Evaluando los promedios en esta ecuación se obtiene que[7]

$$\begin{aligned}
\overline{b_{kj}^2} &= (+1)^2 P(+1\text{Rx}) + (-1)^2 P(-1\text{Rx}) = 1 \\
\overline{a_{kj}^2} &= (+1)^2 P(+1\text{Tx}) + (-1)^2 P(-1\text{Tx}) = 1 \\
\overline{a_{kj} b_{kj}} &= (+1)(+1) P(+1\text{Tx}, +1\text{Rx}) + (-1)(-1) P(-1\text{Tx}, -1\text{Rx}) \\
&\quad + (-1)(+1) P(-1\text{Tx}, +1\text{Rx}) + (+1)(-1) P(+1\text{Tx}, -1\text{Rx}) \\
&= [P(+1\text{Tx}, +1\text{Rx}) + P(-1\text{Tx}, -1\text{Rx})] \\
&\quad - [P(-1\text{Tx}, +1\text{Rx}) + P(+1\text{Tx}, -1\text{Rx})] \\
&= [1 - P_e] - [P_e] = 1 - 2P_e
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación (7–80) se reduce a

$$\overline{e_b^2} = 4V^2 P_e \sum_{j=1}^{n} (\tfrac{1}{4})^j$$

la cual, consultando el apéndice A, se convierte en

$$\overline{e_b^2} = V^2 P_e \frac{(\frac{1}{4})^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{4}{3} V^2 P_e \frac{(2^n)^2 - 1}{(2^n)^2}$$

o

$$\overline{e_b^2} = \tfrac{4}{3} V^2 P_e \frac{M^2 - 1}{M^2} \tag{7–81}$$

Sustituyendo las ecuaciones (7–76) y (7–81) en la ecuación (7–72) con la ayuda de la ecuación (7–75) se tiene que

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk salida}} = \frac{V^2}{(V^2/3M^2) + (4V^2/3M^2) P_e (M^2 - 1)}$$

la cual se reduce a la ecuación (7–70).

La ecuación (7–70) se usa para obtener las curvas que se muestran en la figura 7–17. Para un sistema PCM con M pasos de cuantificación, $(S/N)_{\text{salida}}$ se obtiene como una función de la BER del receptor digital. Para una $P_e < 1/(4M^2)$, la señal analógica a la salida se distorsiona principalmente por el ruido de cuantización. De hecho, para una $P_e = 0$, $(S/N)_{\text{salida}} = 3M^2$, y todo el ruido es de cuantificación. Recíprocamente, para $P_e > 1/(4M^2)$, la salida se distorsiona principalmente por el ruido en el canal.

También se debe enfatizar que la ecuación (7–70) es la razón de la señal *pico* al ruido promedio. La razón señal *promedio* a ruido promedio se obtiene fácilmente de los resultados justamente presentados. La razón señal promedio a ruido promedio es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \frac{\overline{(x_k)^2}}{\overline{n_k^2}} = \frac{V^2}{3\overline{n_k^2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{pk salida}}$$

[7] La nomenclatura +1Tx denota un 1 binario transmitido, −1Tx un 0 binario transmitido, +1Rx un 1 binario recibido y –1Rx un 0 binario recibido.

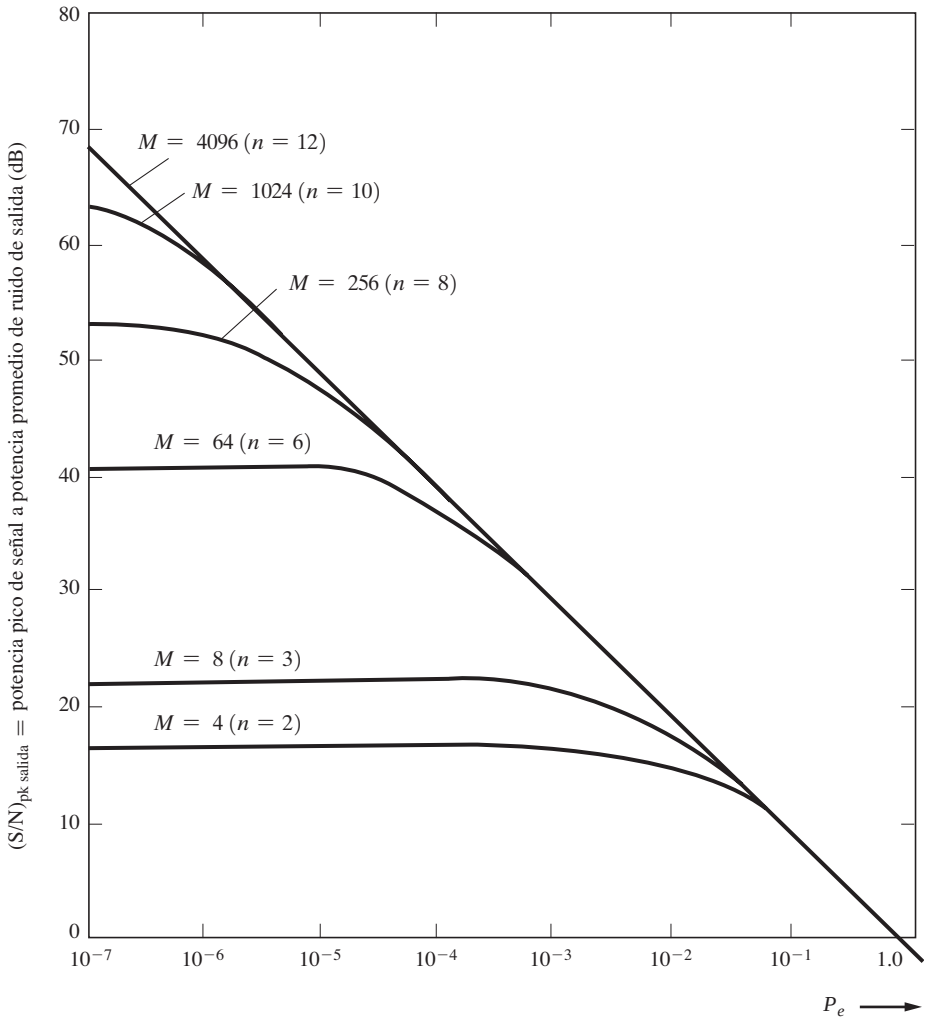


Figura 7–17 $(S/N)_{\text{salida}}$ de un sistema PCM como una función de P_e y el número de pasos de cuantificación M.

donde $\overline{x_k^2} = V^2/3$ ya que x_k está uniformemente distribuida desde $-V$ a $+V$. Por lo tanto, con las ecuaciones (7–72) y (7–70) se calcula que

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \frac{M^2}{1 + 4(M^2 - 1)P_e} \tag{7–82}$$

cuando $(S/N)_{\text{salida}}$ es la razón señal promedio a ruido promedio a la salida del sistema.

7–8 RAZONES SEÑAL A RUIDO DE SALIDA PARA SISTEMAS ANALÓGICOS

En los capítulos 4 y 5 se estudiaron técnicas generalizadas de modulación y de demodulación para señales analógicas y digitales. Se mostraron técnicas específicas para señalización por AM, DSB-SC, SSB, PM y FM, y se evaluaron los anchos de banda de dichas señales. A continuación se evalúan las razones señal a ruido de salida para estos sistemas como función de la señal de entrada, ruido y los parámetros del sistema. De nuevo se encuentra que el análisis matemático de sistemas no coherentes es más difícil que para los coherentes, y a menudo se emplean aproximaciones para obtener resultados simplificados. Sin embargo, en la práctica prevalecen los sistemas no coherentes, ya que el costo de su receptor es generalmente más económico. Este es el caso para el precio general del sistema en las aplicaciones que involucran a un transmisor y a miles o millones de receptores, como ocurre en la difusión por FM, AM y TV analógica.

Para sistemas con canales con ruido aditivo, la entrada al receptor es

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

Para sistemas de comunicaciones pasabanda con un ancho de banda de transmisión de B_T,

$$\begin{aligned} r(t) &= \mathrm{Re}\{g_s(t)\, e^{j(\omega_c t + \theta_c)}\} + \mathrm{Re}\{g_n(t)\, e^{j(\omega_c t + \theta_c)}\} \\ &= \mathrm{Re}\{[g_s(t) + g_n(t)]\, e^{j(\omega_c t + \theta_c)}\} \end{aligned}$$

o

$$r(t) = \mathrm{Re}\{g_T(t)\, e^{j(\omega_c t + \theta_c)}\} \tag{7–83a}$$

donde

$$\begin{aligned} g_T(t) &\triangleq g_s(t) + g_n(t) \\ &= [x_s(t) + x_n(t)] + j[y_s(t) + y_n(t)] \\ &= x_T(t) + jy_T(t) \\ &= R_T(t)\, e^{j\theta_T}(t) \end{aligned} \tag{7–83b}$$

$g_T(t)$ denota la envolvente compleja total (es decir, compuesta) a la entrada del receptor. Ésta consiste en la envolvente compleja de la señal más la envolvente compleja del ruido. Las propiedades de la envolvente compleja total, así como las del ruido gaussiano, se presentaron en el capítulo 6. En la tabla 4−1 se detallan las envolventes complejas para diferentes tipos de señales moduladas $g_s(t)$.

Comparación con los sistemas en banda base

El rendimiento del ruido de varios tipos de sistemas pasabanda se examina al evaluar la razón señal a potencia de ruido a la salida del receptor, $(S/N)_{\text{salida}}$, cuando una señal modulada con ruido está presente en la entrada del receptor. Se desea observar si $(S/N)_{\text{salida}}$ es grande para un sistema de AM, un sistema de DSB−SC o un sistema de FM. Para comparar estas SNR, la potencia de las señales

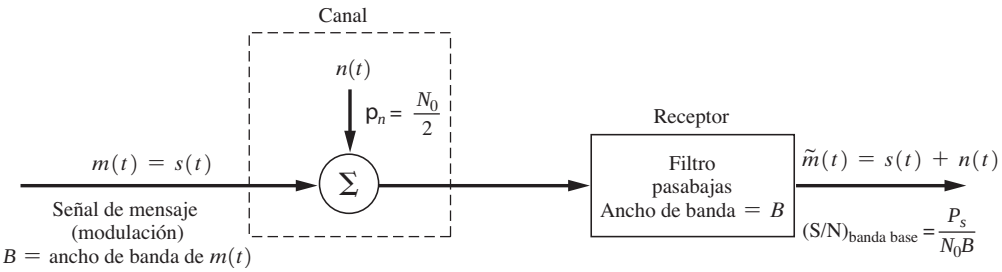


Figura 7–18 Sistema en banda base.

moduladas a la entrada de estos receptores se iguala al mismo valor y la PSD del ruido de entrada es $N_0/2$. (Es decir, el ruido de entrada es blanco y con un nivel espectral igualado a $N_0/2$.)

Para comparar la razón señal a ruido de salida $(S/N)_{\text{salida}}$ para varios sistemas pasabanda se requiere de un criterio común de medición para la entrada al receptor. Para los sistemas analógicos, este criterio es la potencia de la señal recibida P_s dividida entre la cantidad de potencia en el ruido blanco que está contenido en un ancho de banda igual al ancho de banda del mensaje (modulación). Esto es equivalente a la $(S/N)_{\text{salida}}$ de un sistema de transmisión en banda base, como se ilustra en la figura 7−18. Esto es,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{banda base}} = \frac{P_s}{N_0 B} \tag{7–84}$$

Se pueden comparar los rendimientos de diferentes sistemas modulados si se evalúa la $(S/N)_{\text{salida}}$ para cada sistema como función de $(P_s/N_0B) = (S/N)_{\text{banda base}}$, donde P_s es la potencia de la señal AM, DSB−SC o FM a la entrada del receptor. Se escoge una B que sea el ancho de banda de la señal en banda base (moduladora) donde se emplea la misma señal moduladora en banda base para todos los casos, de tal forma que se utilice el mismo criterio de comparación. [Si se escogiera B como el ancho de banda de la señal modulada a la entrada, B_T, la comparación no se haría con base en una PSD de ruido igual de $N_0/2$ para un valor fijo de $(S/N)_{\text{banda base}}$, debido a que los valores de B_T para las señales AM y FM son diferentes.]

También puede obtenerse la SNR a la entrada del receptor□ésta es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{entrada}} = \frac{P_s}{N_0 B_T} = \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{banda base}} \left(\frac{B}{B_T}\right) \tag{7–85}$$

donde B_T es el ancho de banda de la señal pasabanda a la entrada del receptor.

A continuación se evaluará la $(S/N)_{\text{salida}}$ para varios sistemas diferentes.

Sistemas de AM con detección de producto

La figura 7−19 ilustra el receptor para un sistema de AM con detección coherente. A partir de la ecuación (5−3), la envolvente compleja de la señal AM es

$$g_s(t) = A_c[1 + m(t)]$$

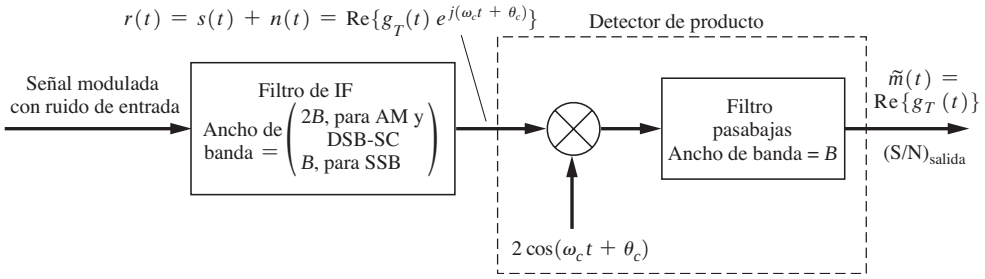

$r(t) = s(t) + n(t) = \text{Re}\{g_T(t)\, e^{j(\omega_c t + \theta_c)}\}$
Detector de producto
Señal modulada con ruido de entrada
Filtro de IF
Ancho de banda = 2B, para AM y DSB-SC; B, para SSB
Filtro pasabajas
Ancho de banda = B
$\tilde{m}(t) = \text{Re}\{g_T(t)\}$
$(S/N)_{\text{salida}}$
$2\cos(\omega_c t + \theta_c)$

Figura 7–19 Receptor coherente.

La envolvente compleja de la señal con ruido compuesta recibida es

$$g_T(t) = [A_c + A_c m(t) + x_n(t)] + jy_n(t) \tag{7–86}$$

Para una detección de producto, empleando la ecuación (4–71), se encuentra que la salida es

$$\tilde{m}(t) = \text{Re}\{g_T(t)\} = A_c + A_c m(t) + x_n(t)$$

Aquí A_c es el voltaje de DC a la salida del detector que ocurre debido a la portadora discreta de AM,[8] $A_c m(t)$ la modulación detectada y $x_n(t)$ el ruido detectado. La SNR de salida es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \frac{A_c^2 \overline{m^2(t)}}{\overline{x_n^2(t)}} = \frac{A_c^2 \overline{m^2(t)}}{2N_0 B} \tag{7–87}$$

donde, de la ecuación (6–133g), se tiene que $\overline{x_n^2} = \overline{n^2} = 2(N_0/2)(2B)$. La potencia de la señal de entrada es

$$P_s = \frac{A_c^2}{2}\overline{[1 + m(t)]^2} = \frac{A_c^2}{2}[1 + \overline{m^2}]$$

donde se asume que $\overline{m(t)} = 0$ (es decir, no existe DC en la forma de onda moduladora). Por lo tanto, la SNR de entrada es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{entrada}} = \frac{(A_c^2/2)(1 + \overline{m^2})}{2N_0 B} \tag{7–88}$$

Combinando las ecuaciones (7–87) y (7–88) resulta en

$$\frac{(S/N)_{\text{salida}}}{(S/N)_{\text{entrada}}} = \frac{2\overline{m^2}}{1 + \overline{m^2}} \tag{7–89}$$

Para 100 □ de modulación por onda senoidal, $\overline{m^2} = \frac{1}{2}$ y $(S/N)_{\text{salida}}/(S/N)_{\text{entrada}} = \frac{2}{3}$.

Para fines comparativos, la ecuación (7–87) puede evaluarse en términos de $(S/N)_{\text{banda base}}$ sustituyendo para P_s:

$$\frac{(S/N)_{\text{salida}}}{(S/N)_{\text{banda base}}} = \frac{\overline{m^2}}{1 + \overline{m^2}} \tag{7–90}$$

[8] Este voltaje de DC a menudo se ocupa para suministrar control automático de ganancia (AGC) de las etapas precedentes de RF e IF.

Para 100 □ de modulación por onda senoidal, $(S/N)_{\text{salida}}/(S/N)_{\text{banda base}} = \frac{1}{3}$. Esto ilustra que este sistema de AM es 4.8 dB peor que un sistema en banda base que usa la misma potencia de señal debido a la potencia adicional en la portadora discreta de AM,[9] lo que se muestra en la figura 7–27.

Sistemas de AM con detección de envolvente

El detector de envolvente produce $KR_T(t)$ a su salida, donde K es una constante de proporcionalidad. Entonces, para la señal aditiva con ruido a la entrada, la salida es

$$KR_T(t) = K|g_s(t) + g_n(t)|$$

Sustituyendo la ecuación (7–86) por $g_s(t) + g_n(t)$ se obtiene que

$$KR_T(t) = K|[A_c + A_c m(t) + x_n(t)] + j[y_n(t)]| \tag{7–91}$$

La potencia es

$$\overline{[KR_T(t)]^2} = K^2 A_c^2 \left\{ \left[1 + m(t) + \frac{x_n(t)}{A_c} \right]^2 + \left[\frac{y_n(t)}{A_c} \right]^2 \right\} \tag{7–92}$$

Para el caso de una $(S/N)_{\text{entrada}}$ grande, $(y_n/A_c)^2 \ll 1$, así que se tiene que

$$\overline{[KR_T(t)]^2} = (KA_c)^2 + K^2 A_c^2 \, \overline{m^2} + K^2 \overline{x_n^2} \tag{7–93}$$

donde $(KA_c)^2$ es la potencia del término AGC, $K^2 A_c^2 \, \overline{m^2}$ la potencia de la modulación (señal) detectada y $K^2 \overline{x_n^2}$ la potencia del ruido detectado. Por tanto, para grandes valores de $(S/N)_{\text{entrada}}$,

$$\left(\frac{S}{N} \right)_{\text{salida}} = \frac{A_c^2 \, \overline{m^2}}{\overline{x_n^2}} = \frac{A_c^2 \, \overline{m^2}}{2N_0 B} \tag{7–94}$$

Si se compara esto con la ecuación (7–87) se observa que *para grandes valores de* $(S/N)_{\text{entrada}}$, *el rendimiento del detector de envolvente es idéntico al del detector de producto.*

Para pequeños valores de $(S/N)_{\text{entrada}}$, *el rendimiento del detector de envolvente es muy inferior que para el detector de producto.* De la ecuación (7–91) se nota que la salida del detector es

$$KR_T(t) = K|g_T(t)| = K|A_c[1 + m(t)] + R_n(t)\, e^{j\theta_n(t)}|$$

Para $(S/N)_{\text{entrada}} < 1$, como se observa en la figura 7–20, la magnitud de $g_T(t)$ puede aproximarse mediante

$$KR_T(t) \approx K\{A_c[1 + m(t)] \cos \theta_n(t) + R_n(t)\} \tag{7–95}$$

Por lo tanto, para el caso de un canal con ruido gaussiano, la salida del detector de envolvente consiste en ruido con distribución de Rayleigh $R_n(t)$, además de un término de la señal que se *multiplica* por un factor aleatorio de ruido cos $\theta_n(t)$. Este efecto multiplicativo distorsiona más la señal que el ruido aditivo de Rayleigh. Esto produce un efecto *de umbral*. Esto es, $(S/N)_{\text{salida}}$ se vuelve *muy*

[9] La portadora de AM no contribuye con la información de la señal, pero sí permite que los receptores de AM utilicen detectores de envolvente económicos.

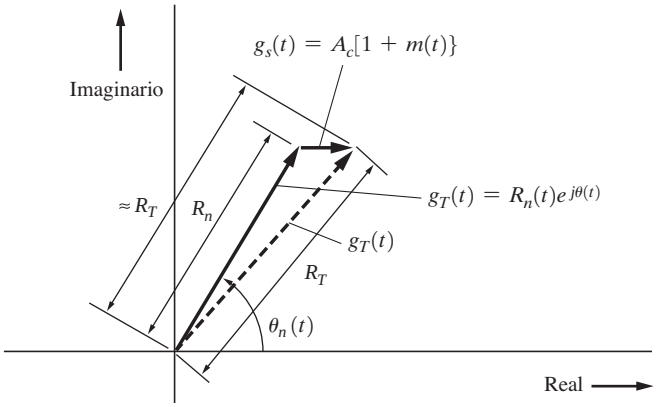


Figura 7–20 Diagrama vectorial para AM, $(S/N)_{\text{entrada}} \ll 1$.

pequeña cuando $(S/N)_{\text{entrada}} < 1$. De hecho, se puede mostrar que $(S/N)_{\text{salida}}$ es proporcional al *cuadrado* de $(S/N)_{\text{entrada}}$ para el caso donde $(S/N)_{\text{entrada}} < 1$ [Schwarz, Bennett y Stein, 1966]. A pesar de que el detector de envolvente es muy inferior al detector de producto para una pequeña $(S/N)_{\text{entrada}}$, a menudo esta deficiencia pasa desapercibida en la práctica para aplicaciones de difusión por AM. Esto es debido a que el oyente de AM generalmente se interesa en escuchar estaciones sólo cuando posee una $(S/N)_{\text{salida}}$ relativamente buena, de, por ejemplo, 25 dB o más. Bajo estas condiciones el rendimiento del detector de envolvente es equivalente al del detector de producto. Por estas razones, el detector de envolvente se emplea casi exclusivamente en receptores de difusión por AM. Para otras aplicaciones, como escuchar estaciones de AM débiles o para sistemas de transmisión de datos por AM, la detección de producto puede requerirse para erradicar el ruido multiplicativo que ocurriría con la detección de envolvente en sistemas débiles.

Sistemas de DSB-SC

Como se indicó en el capítulo 5, la señal DSB−SC es esencialmente una señal AM en la cual se ha suprimido el término de portadora discreta (es decir, es equivalente a una AM de un porcentaje infinito). La forma de onda moduladora $m(t)$ se recupera a partir de la señal DSB−SC empleando una detección coherente, como se muestra en la figura 7−19. Para el caso de DSB−SC,

$$g_s(t) = A_c m(t) \tag{7–96}$$

Siguiendo el desarrollo que lleva a la ecuación (7−89), la SNR para DSB−SC es

$$\frac{(S/N)_{\text{salida}}}{(S/N)_{\text{entrada}}} = 2 \tag{7–97}$$

Ocupando la ecuación (7−90) se obtiene que

$$\frac{(S/N)_{\text{salida}}}{(S/N)_{\text{banda base}}} = 1 \tag{7–98}$$

Por lo tanto, el rendimiento del ruido de un sistema de DSB−SC es el mismo que para los sistemas de señalización en banda base, aunque el requisito para el ancho de banda es doblemente mayor (es decir, $B_T = 2B$).

Sistemas de SSB

El receptor para una señal SSB se muestra también en la figura 7−19, donde el ancho de banda de IF es ahora de $B_T = B$. La envolvente compleja para la SSB es

$$g_s(t) = A_c[m(t) \pm j\hat{m}(t)] \tag{7–99}$$

donde el signo superior se usa para la USSB y el inferior para la LSSB. La envolvente compleja para la señal SSB con ruido (total) recibida es

$$g_T(t) = [A_c m(t) + x_n(t)] + j[\pm A_c \hat{m}(t) + y_n(t)] \tag{7–100}$$

La salida del detector de producto es

$$\hat{m}(t) = \text{Re}\{g_T(t)\} = A_c m(t) + x_n(t) \tag{7–101}$$

La SNR correspondiente es

$$(S/N)_{\text{salida}} = \frac{A_c^2\ \overline{m^2(t)}}{\overline{x_n^2(t)}} = \frac{A_c^2\ \overline{m^2(t)}}{N_0 B} \tag{7–102}$$

donde $\overline{x_n^2} = \overline{n^2} = 2(N_0/2)(B)$. Utilizando la ecuación (6−133g) se observa que la potencia de la señal de entrada es

$$P_s = \tfrac{1}{2}\overline{|g_s(t)|^2} = \frac{A_c^2}{2}[\overline{m^2} + \overline{(\hat{m})^2}] = A_c^2\overline{m^2} \tag{7–103}$$

y que la potencia de ruido de entrada es $P_n = \overline{n^2(t)} = N_0 B$. Por lo tanto,

$$\frac{(S/N)_{\text{salida}}}{(S/N)_{\text{entrada}}} = 1 \tag{7–104}$$

De la misma manera,

$$\frac{(S/N)_{\text{salida}}}{(S/N)_{\text{banda base}}} = 1 \tag{7–105}$$

La SSB es exactamente equivalente a la señalización en banda base, en términos tanto del rendimiento del ruido como de los requisitos en el ancho de banda (es decir, $B_T = B$). Aún más, las ecuaciones (7−98) y (7−105) muestran que los sistemas de señalización por DSB, SSB y en banda base son todos equivalentes en la SNR de salida.

Sistemas de PM

Como se muestra en la figura 7−21, la modulación sobre una señal PM se recupera con un receptor que emplea un detector de fase (coherente). (En el capítulo 4 se encontró que un detector de fase puede llevarse a cabo con un limitador que sigue de un detector de producto cuando el valor de β_p es pequeño.) La señal PM tiene una envolvente compleja de

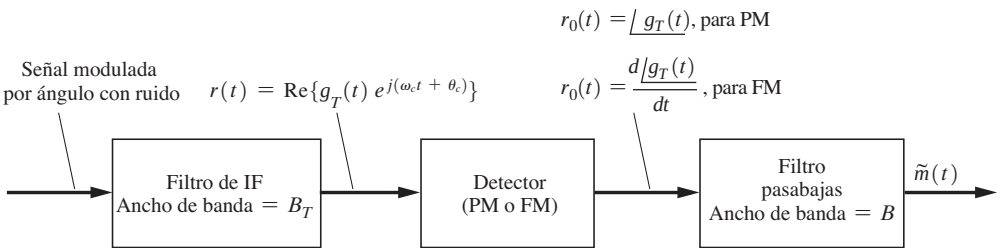


Figura 7–21 Receptor para señales moduladas por ángulo.

$$g_s(t) = A_c e^{j\theta_s(t)} \tag{7–106a}$$

donde

$$\theta_s(t) = D_p m(t) \tag{7–106b}$$

La envolvente compleja de la señal con ruido compuesta a la entrada del detector es

$$\begin{aligned} g_T(t) &= |g_T(t)|\, e^{j\theta_T(t)} = [g_s(t) + g_n(t)] \\ &= A_c e^{j\theta_s(t)} + R_n(t)\, e^{j\theta_n(t)} \end{aligned} \tag{7–107}$$

Cuando la entrada es ruido gaussiano (solamente), $R_n(t)$ tiene una distribución de Rayleigh y $\theta_n(t)$ está uniformemente distribuida, como se demostró en el ejemplo 6–10.

La salida del detector de fase es proporcional a $\theta_T(t)$:

$$r_0(t) = K\, \angle g_T(t) = K\theta_T(t)$$

Aquí K es la constante de ganancia del detector. Para valores grandes de $(S/N)_{\text{entrada}}$, el ángulo de fase de $g_T(t)$ puede aproximarse con la ayuda de un diagrama vectorial para $g_T = g_s + g_n$. Esto se muestra en la figura 7–22. Entonces, para $A_c \gg R_n(t)$, el ángulo de fase compuesto se aproxima mediante

$$r_0(t) = K\theta_T(t) \approx K\left\{\theta_s(t) + \frac{R_n(t)}{A_c}\ \text{sen}[\theta_n(t) - \theta_s(t)]\right\} \tag{7–108}$$

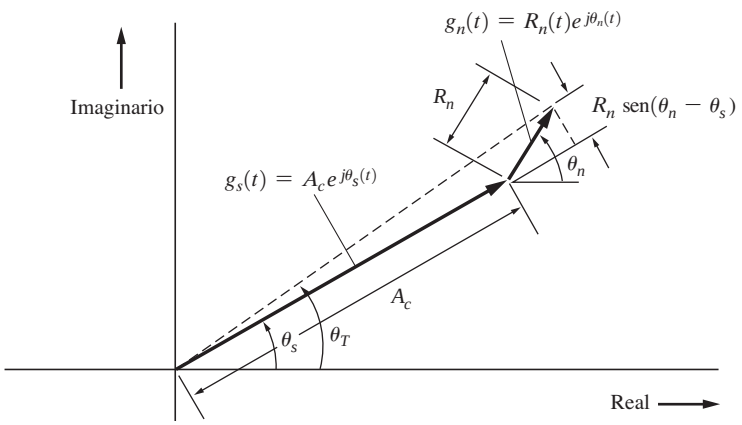


Figura 7–22 Diagrama vectorial para modulación por ángulo, $(S/N)_{\text{entrada}} \gg 1$.

Para el caso sin modulación de fase (la señal de portadora sigue presente), la ecuación se reduce a

$$r_0(t) \approx \frac{K}{A_c} y_n(t), \qquad \theta_s(t) = 0 \tag{7–109}$$

donde, utilizando la ecuación (6−127e), se encuentra que $y_n(t) = R_n(t)$ sen $\theta_n(t)$. Esto muestra que la presencia de una portadora no modulada (a la entrada del receptor de PM) suprime el ruido en la salida. A esto se le conoce como *efecto silenciador*, y ocurre cuando la potencia de la señal de entrada está por encima del *umbral* [es decir, cuando $(S/N)_{\text{entrada}} \gg 1$]. Aún más, cuando una modulación de fase está presente y $(S/N)_{\text{entrada}} \gg 1$, se puede reemplazar a $R_n(t)$ sen$[\theta_n(t) - \theta_s(t)]$ con $R_n(t)$ sen $\theta_n(t)$. Esto puede realizarse debido a que θ_s puede considerarse como determinista y, en consecuencia, $\theta_s(t)$ es una constante para un valor dado de t. Entonces, $\theta_n(t) - \theta_s(t)$ estará uniformemente distribuida sobre algún intervalo de 2π ya que, a partir de la ecuación (6−153), $\theta_n(t)$ está uniformemente distribuida sobre $(0, 2\pi)$. Esto es, cos $[\theta_n(t) - \theta_s(t)]$ tendrá la misma PDF que cos $[\theta_n(t)]$, así que se puede realizar este intercambio. Por lo tanto, para valores grandes de $(S/N)_{\text{entrada}}$, la parte relevante de la salida del detector de PM se aproxima mediante

$$r_0(t) \approx s_0(t) + n_0(t) \tag{7–110}$$

donde

$$s_0(t) = K\theta_s(t) = KD_p m(t) \tag{7–111a}$$

$$n_0(t) = \frac{K}{A_c} y_n(t) \tag{7–111b}$$

La PSD de este ruido de salida, $n_0(t)$, se obtiene con la ecuación (6−133l), y se tiene que

$$\mathcal{P}_{n_0}(f) = \begin{cases} \dfrac{K^2}{A_c^2} N_0, & |f| \le B_T/2 \\ 0, & f \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{7–112}$$

donde la PSD del ruido pasabanda de entrada es $N_0/2$ sobre la banda de paso del filtro de IF y cero fuera de ésta. La ecuación (7−112) se grafica en la figura 7−23a, y la porción del espectro que se pasa por el LPF se denota mediante las líneas sombreadas.

La salida del receptor consiste en la versión filtrada pasabajas de $r_0(t)$. Sin embargo, el espectro de $s_0(t)$ está contenido en la banda de paso del filtro, así que

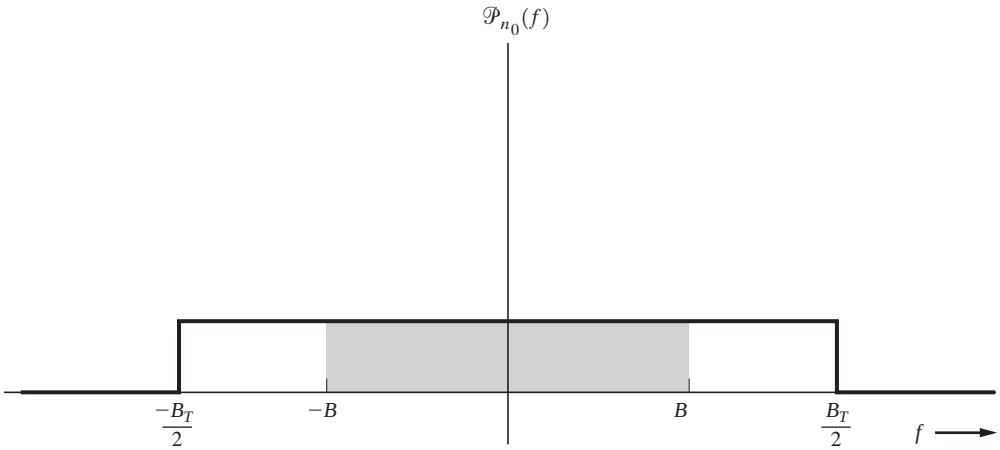
$$\tilde{m}(t) = s_0(t) + \tilde{n}_0(t) \tag{7–113}$$

donde $\tilde{n}_0(t)$ es ruido blanco limitado por banda de la porción sombreada de la figura 7−23a. La potencia de ruido del receptor es

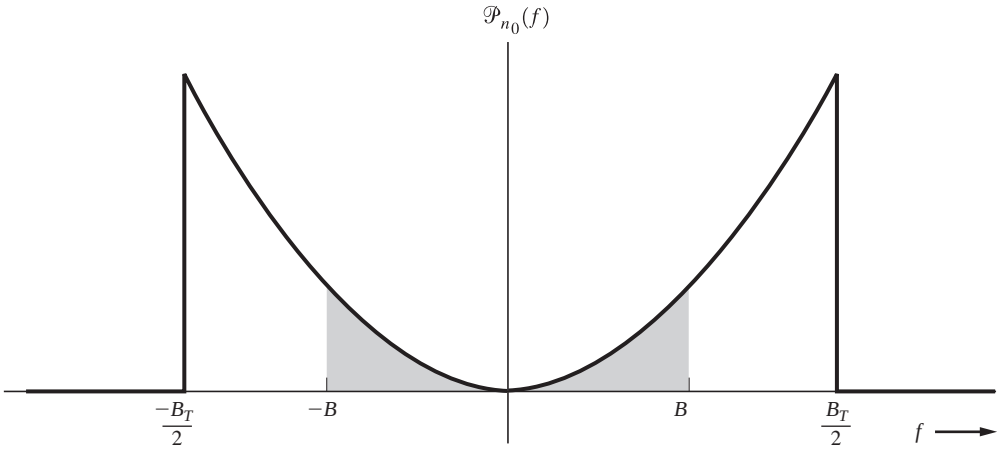
$$\overline{[\tilde{n}_0(t)]^2} = \int_{-B}^{B} \mathcal{P}_{n_0}(f)\, df = \frac{2K^2 N_0 B}{A_c^2} \tag{7–114}$$

Ahora puede fácilmente evaluarse la SNR de salida con ayuda de las ecuaciones (7−111a) y (7−114):

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \frac{\overline{s_0^2}}{\overline{\tilde{n}_0^2}} = \frac{A_c^2 D_p^2 \overline{m^2}}{2N_0 B}$$



(a) Detector de PM



(b) Detector de FM

Figura 7–23 PSD para el ruido a la salida de detectores para los receptores de señales moduladas por ángulo.

Empleando las ecuaciones (5–46) y (5–47) se puede escribir la constante de sensibilidad del transmisor de PM como

$$D_p = \frac{\beta_p}{V_p}$$

donde β_p es el índice de PM y V_p el valor pico de $m(t)$. Por lo tanto, la SNR de salida se convierte en

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \frac{A_c^2 \beta_p^2 \overline{(m/V_p)^2}}{2N_0 B} \tag{7–115}$$

La SNR de entrada es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{entrada}} = \frac{A_c^2/2}{2(N_0/2)B_T} = \frac{A_c^2}{2N_0B_T} \tag{7–116}$$

donde B_T es el ancho de banda de transmisión de la señal PM (también es el ancho de banda del filtro de IF).

El ancho de banda de transmisión de la señal PM se obtiene de la regla de Carson, ecuación (5–61),

$$B_T = 2(\beta_p + 1)B \tag{7–117}$$

donde β_p es el índice de PM, que es idéntico a la desviación pico de ángulo de la señal PM, como se indica en la ecuación (5–47). Por lo tanto,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{entrada}} = \frac{A_c^2}{4N_0(\beta_p + 1)B} \tag{7–118}$$

Si se combina esto con la ecuación (7–115) se obtiene la razón de SNR de salida a SNR de entrada:

$$\frac{(S/N)_{\text{salidat}}}{(S/N)_{\text{entrada}}} = 2\beta_p^2(\beta_p + 1)\overline{\left(\frac{m}{V_p}\right)^2} \tag{7–119}$$

La SNR de salida puede también expresarse en términos del sistema equivalente en banda base si se sustituye la ecuación (7–84) en la ecuación (7–115), donde $P_s = A_c^2/2$:

$$\frac{(S/N)_{\text{salida}}}{(S/N)_{\text{banda base}}} = \beta_p^2\overline{\left(\frac{m}{V_p}\right)^2} \tag{7–120}$$

Esta ecuación muestra que la mejora de un sistema de PM sobre un sistema de señalización en banda base depende de la cantidad de desviación de fase utilizada. Parece indicar que se pueden realizar mejoras tan grandes como se deseen con tan sólo aumentar β_p. Esto depende de los tipos de circuitos ocupados. Si la desviación de fase pico excede π radianes, se deben emplear técnicas especiales de "desenvolvimiento de fase" en algunos circuitos para obtener el valor verdadero (comparado con el valor relativo) de la fase a la salida. Por lo tanto, el máximo valor de $\beta_p m(t)/V_p = D_p m(t)$ puede considerarse como π. Para una modulación senoidal, esto otorgaría una mejora de $D_p^2\overline{m^2} = \pi^2/2$, o 6.9 dB, sobre la señalización en banda base.

Se debe enfatizar que los resultados obtenidos previamente para $(S/N)_{\text{salida}}$ son válidos sólo cuando la señal de entrada está por encima del umbral [es decir, cuando $(S/N)_{\text{entrada}} > 1$].

Sistemas de FM

El procedimiento que se usará para evaluar la SNR de salida para los sistemas de FM es esencialmente el mismo que el empleado para los sistemas de PM, a excepción de que la salida del detector de FM es proporcional a $d\theta_T(t)/dt$, mientras que la salida del detector de PM es proporcional a $\theta_T(t)$. El detector en el receptor modulado por ángulo de la figura 7–21 es ahora un detector de FM. La envolvente compleja de la señal FM (solamente) es

$$g_s(t) = A_c e^{j\theta_s(t)} \tag{7–121a}$$

donde

$$\theta_s(t) = D_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)\, d\lambda \tag{7–121b}$$

Se asume que una señal FM con ruido blanco está presente a la entrada del receptor.

La salida del detector de FM es proporcional a la derivada de la fase compuesta a la entrada del mismo:

$$r_0(t) = \left(\frac{K}{2\pi}\right) \frac{d\,/g_T(t)}{dt} = \left(\frac{K}{2\pi}\right) \frac{d\theta_T(t)}{dt} \tag{7–122}$$

En esta ecuación, K es la ganancia del detector de FM. Ocupando el mismo procedimiento que lleva a las ecuaciones (7−108), (7−110) y (7−111), la salida del detector puede aproximarse mediante

$$r_0(t) \approx s_0(t) + n_0(t) \tag{7–123}$$

donde, para FM,

$$s_0(t) = \left(\frac{K}{2\pi}\right) \frac{d\theta_s(t)}{dt} = \left(\frac{KD_f}{2\pi}\right) m(t) \tag{7–124a}$$

y

$$n_0(t) = \left(\frac{K}{2\pi A_c}\right) \frac{dy_n(t)}{dt} \tag{7–124b}$$

Este resultado es válido sólo cuando la señal de entrada está por encima del umbral [es decir, cuando $(S/N)_{\text{entrada}} \gg 1$]. La derivada del ruido, la ecuación (7−124b), hace a la PSD del ruido FM de salida diferente al caso de PM. Para FM se tiene que

$$\mathcal{P}_{n_0}(f) = \left(\frac{K}{2\pi A_c}\right)^2 |j2\pi f|^2 \mathcal{P}_{y_n}(f)$$

o

$$\mathcal{P}_{n_0}(f) = \begin{cases} \left(\dfrac{K}{A_c}\right)^2 N_0 f^2, & |f| < B_T/2 \\ 0, & f \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{7–125}$$

Esto muestra que la PSD para el ruido a la salida del detector de FM tiene una forma parabólica, como se ilustra en la figura 7−23b.

La salida del receptor consiste en la versión filtrada pasabajas de $r_0(t)$. La potencia de ruido para el ruido filtrado es

$$\overline{[\tilde{n}_0(t)]^2} = \int_{-B}^{B} \mathcal{P}_{n_0}(f)\, df = \frac{2}{3} \left(\frac{K}{A_c}\right)^2 N_0 B^3 \tag{7–126}$$

Ahora puede evaluarse fácilmente la SNR de salida usando las ecuaciones (7−124a) y (7−126):

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \frac{\overline{s_0^2}}{\overline{[\tilde{n}_0]^2}} = \frac{3A_c^2[D_f/(2\pi B)]^2 \overline{m^2}}{2N_0 B}$$

De las ecuaciones (5−44) y (5−48) se observa que

$$\frac{D_f}{2\pi B} = \frac{\beta_f}{V_p}$$

donde V_p es el valor pico de $m(t)$. Entonces, la SNR de salida se convierte en

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \frac{3A_c^2\beta_f^2\overline{(m/V_p)^2}}{2N_0B} \tag{7–127}$$

La SNR de entrada es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{entrada}} = \frac{A_c^2}{4N_0(\beta_f + 1)B} \tag{7–128}$$

Si se combinan las ecuaciones (7−127) y (7−128) se obtiene la razón de SNR de salida a la SNR de entrada:

$$\frac{(S/N)_{\text{salida}}}{(S/N)_{\text{entrada}}} = 6\beta_f^2(\beta_f + 1)\overline{\left(\frac{m}{V_p}\right)^2} \tag{7–129}$$

donde β_f es el índice de FM y V_p el valor pico de la señal moduladora $m(t)$.

La SNR de salida puede expresarse en términos de la SNR en banda base equivalente si se sustituye la ecuación (7−84) en la ecuación (7−127), donde $P_s = A_c^2/2$,

$$\frac{(S/N)_{\text{salida}}}{(S/N)_{\text{banda base}}} = 3\beta_f^2\overline{\left(\frac{m}{V_p}\right)^2} \tag{7–130}$$

Para el caso de una modulación senoidal, $\overline{(m/V_p)^2} = \frac{1}{2}$, y la ecuación (7−130) se convierte en

$$\frac{(S/N)_{\text{salida}}}{(S/N)_{\text{banda base}}} = \frac{3}{2}\beta_f^2 \quad \text{(modulación senoidal)} \tag{7–131}$$

A primera vista, estos resultados parecen indicar que el rendimiento de los sistemas de FM puede aumentarse sin límite al simplemente incrementar el índice de FM β_f. Sin embargo, conforme β_f aumenta, el ancho de banda de transmisión también aumenta y, en consecuencia, $(S/N)_{\text{entrada}}$ disminuye. Estas ecuaciones para $(S/N)_{\text{salida}}$ *sólo son válidas* cuando $(S/N)_{\text{entrada}} \gg 1$ (es decir, cuando la potencia de la señal de entrada está por encima del umbral), así que $(S/N)_{\text{salida}}$ *no* crece a un valor excesivamente grande simplemente al aumentar el índice de FM β_f. En la figura 7−24 se presentan gráficos de la ecuación (7−131) mediante las líneas punteadas.

El efecto de umbral se analizó por primera vez en 1948 [Rice, 1948□Stumpers, 1948]. Taub y Schilling [1986] trataron excelentemente el tema en una guía rápida, y demostraron que la ecuación (7−131) puede generalizarse para describir a $(S/N)_{\text{salida}}$ cerca del umbral. Para el caso de una modulación senoidal, la SNR de salida para un discriminador de FM se muestra como

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \frac{\frac{3}{2}\beta_f^2\ (S/N)_{\text{banda base}}}{1 + \left(\frac{12}{\pi}\ \beta_f\right)\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{banda base}} e^{\left\{-\left[\frac{1}{2(\beta_f+1)}\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{banda base}}\right]\right\}}} \tag{7–132}$$

(No se utilizó deénfasis para obtener el resultado.) Esta característica de SNR de salida que muestra el efecto de umbral de un discriminador de FM se grafica mediante líneas continuas en la figura

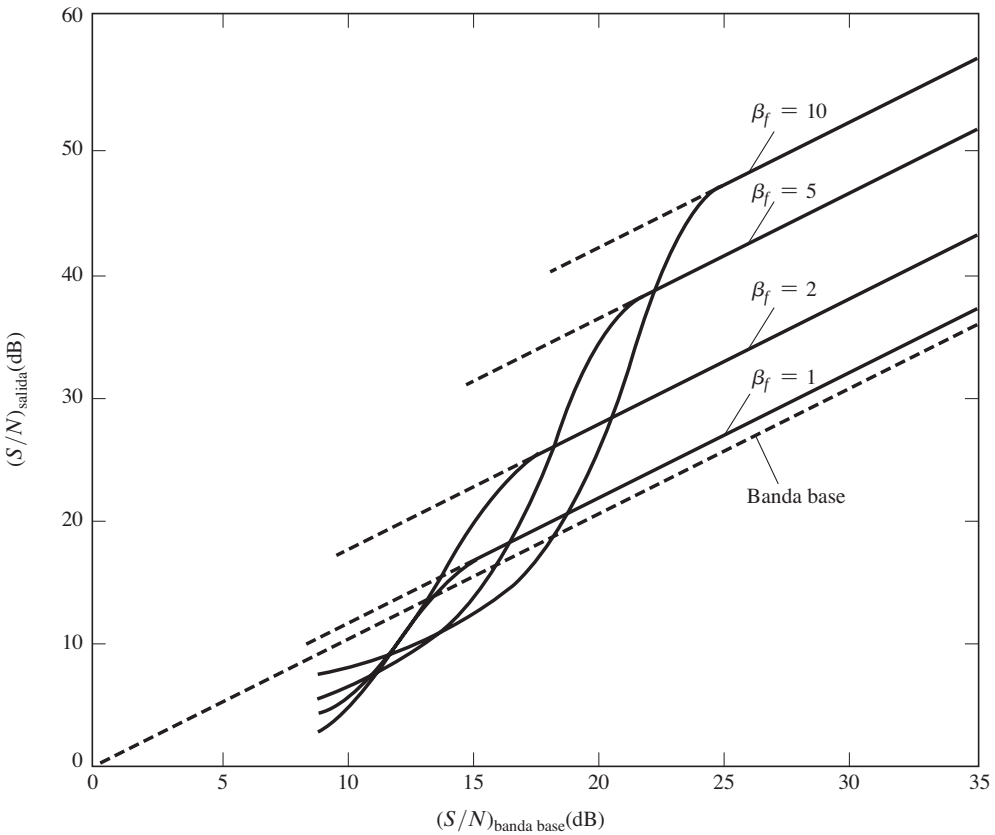


Figura 7–24 Rendimiento del ruido de un discriminador de FM para una señal senoidal FM modulada con ruido gaussiano (sin deénfasis).

7−24. Esta figura ilustra que el rendimiento del ruido de FM puede ser sustancialmente mejor que en banda base. Por ejemplo, para $\beta_f = 5$ y $(S/N)_{\text{banda base}} = 25$ dB, el rendimiento de FM es 15.7 dB mejor que el de banda base. Éste puede mejorarse aún más mediante el uso de deénfasis, como se demostrará en una sección posterior.

Sistemas de FM con extensión de umbral

Puede utilizarse una de varias técnicas para reducir el umbral por debajo del que suministra un receptor que emplea sólo un discriminador de FM. Por ejemplo, un detector PLL de FM puede ocuparse para extender el umbral por debajo del suministrado por un discriminador de FM. Sin embargo, cuando la SNR es grande, todas las técnicas de recepción de FM proporcionan el mismo rendimiento, en otras palabras, el que se predice mediante las ecuaciones (7−129) o (7−130).

En la figura 7−25 se muestra un *receptor de FM con retroalimentación* (FMFB). Ésta es otra técnica de extensión de umbral. El receptor de FMFB provee de una extensión de umbral al disminuir el índice de modulación para la señal FM que se aplica a la entrada del discriminador. Esto es, el índice de modulación de $\tilde{e}(t)$ es menor que el de $v_{\text{entrada}}(t)$, como se demostrará. Por lo tanto, el

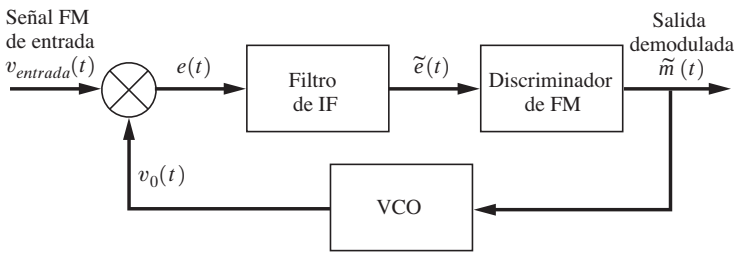


Figura 7–25 Receptor de FMFB.

umbral será menor al que se ilustra en la figura 7−24. El cálculo de la cantidad exacta de extensión de umbral que se lleva a cabo por un receptor de FMFB es un poco complejo [Taub y Schilling, 1986]. Sin embargo, puede mostrarse fácilmente que la técnica de FMFB sí reduce el índice de modulación de la señal FM a la entrada del discriminador. Considerando la figura 7−25 se encuentra que la señal FM a la entrada del receptor es

$$v_{\text{entrada}}(t) = A_c \cos[\omega_c t + \theta_i(t)]$$

donde

$$\theta_i(t) = D_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)\, d\lambda$$

La salida del VCO es

$$v_0(t) = A_0 \cos[\omega_0 t + \theta_0(t)]$$

donde

$$\theta_0(t) = D_v \int_{-\infty}^{t} \tilde{m}(\lambda)\, d\lambda$$

Con estas representaciones para $v_{\text{entrada}}(t)$ y $v_0(t)$, la salida del multiplicador (mezclador) es

$$\begin{aligned} e(t) &= A_c A_0 \cos[\omega_c t + \theta_i(t)] \cos[\omega_0 t + \theta_0(t)] \\ &= \tfrac{1}{2} A_c A_0 \cos[(\omega_c - \omega_0)t + \theta_i(t) - \theta_0(t)] \\ &\quad + \tfrac{1}{2} A_c A_0 \cos[(\omega_c + \omega_0)t + \theta_i(t) + \theta_0(t)] \end{aligned}$$

Si el filtro de IF se sintoniza para pasar la banda de frecuencias centrada alrededor de $f_{\text{if}} \triangleq f_c - f_0$, entonces la salida de IF es

$$\tilde{e}(t) = \frac{A_c A_0}{2} \cos[\omega_{\text{if}} t + \theta_i(t) - \theta_0(t)] \tag{7–133a}$$

o

$$\tilde{e}(t) = \frac{A_c A_0}{2} \cos\left\{\omega_{\text{if}} t + \int_{-\infty}^{t} [D_f\, m(\lambda) - D_v \tilde{m}(\lambda)]\, d\lambda\right\} \tag{7–133b}$$

La salida del discriminador de FM es proporcional a la derivada de la desviación de fase:

$$\tilde{m}(t) = \frac{K}{2\pi} \frac{d\left\{\int_{-\infty}^{t} [D_f\, m(\lambda) - D_v \tilde{m}(\lambda)]\, d\lambda\right\}}{dt}$$

Evaluando la derivada y resolviendo la ecuación resultante para $\tilde{m}(t)$ se obtiene

$$\tilde{m}(t) = \left(\frac{KD_f}{2\pi + KD_v}\right) m(t)$$

Sustituyendo esta expresión por $\tilde{m}(t)$ en la ecuación (7−133) se tiene que

$$\tilde{e}(t) = \frac{A_c A_0}{2} \cos\left[\omega_{\text{if}} t + \left(\frac{1}{1 + (K/2\pi)D_v}\right) D_f \int_{-\infty}^{t} m(\lambda)\, d\lambda\right] \tag{7–134}$$

Esto demuestra que el índice de modulación de $\tilde{e}(t)$ es exactamente $1/[1 + (K/2\pi)D_v]$ del índice de modulación de $v_{\text{entrada}}(t)$. La extensión de umbral proporcionada por el receptor de FMFB está en el orden de 5 dB, mientras que el de un receptor de PLL está en el orden de 3 dB (cuando ambos se comparan con el umbral de un discriminador de FM). A pesar de que lo anterior no es una excelente mejora, sí puede ser muy significativa para los sistemas que operan cerca del umbral, como los de comunicación vía satélite. Un sistema que usa un receptor de extensión de umbral en lugar de uno convencional es mucho más económico que el que requiere de una antena de tamaño doble para suministrar la ganancia de 3 dB de la señal. Algunos autores han descrito y analizado otras técnicas de extensión de umbral [Klapper y Frankle, 1972].

Sistemas de FM con deénfasis

El rendimiento del ruido de un sistema de FM puede mejorarse si se deenfatizan las frecuencias más altas de la señal de modulación a la entrada del transmisor, así como la salida del receptor (como se ilustró por primera vez en la figura 5−16). Esta mejora ocurre porque la PSD del ruido a la salida del detector de FM tiene forma parabólica, como se muestra en la figura 7−23b.

Considerando la figura 7−21 se puede incorporar un deénfasis en el receptor si se incluye una respuesta de deénfasis en la característica del LPF. Suponga que la función de transferencia del LPF es

$$H(f) = \frac{1}{1 + j(f/f_1)} \tag{7–135}$$

sobre el ancho de banda del mensaje de B Hz. Se utiliza un filtro de deénfasis de 75 μs para la difusión por FM estándar de tal forma que $f_1 = 1/[(2\pi)(75 \times 10^{-6})] = 2.1$ kHz. De la ecuación (7−125) se observa que la potencia de ruido a la salida del receptor con deénfasis es

$$\overline{[\tilde{n}_0(t)]^2} = \int_{-B}^{B} |H(f)|^2 \mathcal{P}_{n_0}(f)\, df = \left(\frac{K}{A_c}\right)^2 N_0 \int_{-B}^{B} \left[\frac{1}{1 + (f/f_1)^2}\right] f^2\, df$$

o

$$\overline{[\tilde{n}_0(t)]^2} = 2\left(\frac{K}{A_c}\right)^2 N_0 f_1^3 \left[\frac{B}{f_1} - \tan^{-1}\left(\frac{B}{f_1}\right)\right] \tag{7–136}$$

En una aplicación típica, $B/f_1 \gg 1$, así que $\tan^{-1}(B/f_1) \approx \pi/2$, lo cual es despreciable si se compara con B/f_1. Por lo tanto, la ecuación (7−136) se convierte en

$$\overline{[\tilde{n}_0(t)]^2} = 2\left(\frac{K}{A_c}\right)^2 N_0 f_1^2 B \tag{7–137}$$

para $B/f_1 \gg 1$.

La potencia de la *señal* de salida para el sistema de preénfasis-deénfasis es la misma para cuando esta última no se ocupa, ya que la respuesta general de frecuencia del sistema a $m(t)$ es plana (constante) sobre el ancho de banda de B Hz.[10] Por lo tanto, a partir de las ecuaciones (7−137) y (7−124a) se tiene que la SNR de salida es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \frac{\overline{s_0^2}}{\overline{\tilde{n}_0^2}} = \frac{A_c^2[D_f/(2\pi f_1)]^2\overline{m^2}}{2N_0 B}$$

Además de esto, $D_f/(2\pi B) = \beta_f/V_p$, así que la SNR de salida se reduce a

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \frac{A_c^2\beta_f^2(B/f_1)^2\ \overline{(m/V_p)^2}}{2N_0 B} \tag{7–138}$$

De la ecuación (7−128) se tiene que la SNR de salida a la SNR de entrada es

$$\frac{(S/N)_{\text{salida}}}{(S/N)_{\text{entrada}}} = 2\ \beta_f^2\ (\beta_f + 1)\left(\frac{B}{f_1}\right)^2\ \overline{\left(\frac{m}{V_p}\right)^2} \tag{7–139}$$

donde β_f es el índice de FM, B el ancho de banda de los circuitos en banda base (modulación), f_1 el ancho de banda a 3 dB del filtro de deénfasis, V_p el valor pico de la señal moduladora $m(t)$ y $\overline{(m/V_p)^2}$ el cuadrado del RMS de $m(t)/V_p$.

La SNR de salida se expresa en términos de la SNR en banda base equivalente al sustituir la ecuación (7−84) en la ecuación (7−138):

$$\frac{(S/N)_{\text{salida}}}{(S/N)_{\text{banda base}}} = \beta_f^2\left(\frac{B}{f_1}\right)^2\ \overline{\left(\frac{m}{V_p}\right)^2} \tag{7–140}$$

Cuando se transmite un tono de prueba senoidal sobre este sistema de FM, $\overline{(m/V_p)^2} = \frac{1}{2}$ y la ecuación (7−140) se convierten en

$$\frac{(S/N)_{\text{salida}}}{(S/N)_{\text{banda base}}} = \tfrac{1}{2}\beta_f^2\left(\frac{B}{f_1}\right)^2 \quad \text{(modulación senoidal)} \tag{7–141}$$

Por supuesto que cada uno de estos resultados es válido solamente cuando la señal FM a la entrada del receptor está por encima del umbral.

[10] Para una comparación precisa de los sistemas de FM con y sin preénfasis, la desviación pico ΔF requiere ser la misma para ambos casos. Con las señales típicas de programas de audio, la preénfasis no aumenta la ΔF de manera apreciable, ya que las bajas frecuencias dominan en el espectro de $m(t)$. Por lo tanto, este análisis es válido. Sin embargo, si se asume que $m(t)$ tiene un espectro plano sobre la banda de paso de audio, la ganancia del filtro de preénfasis debe reducirse de tal forma que la desviación pico será la misma con o sin preénfasis. En el último caso, habrá menos mejora en cuanto al rendimiento cuando se usa preénfasis.

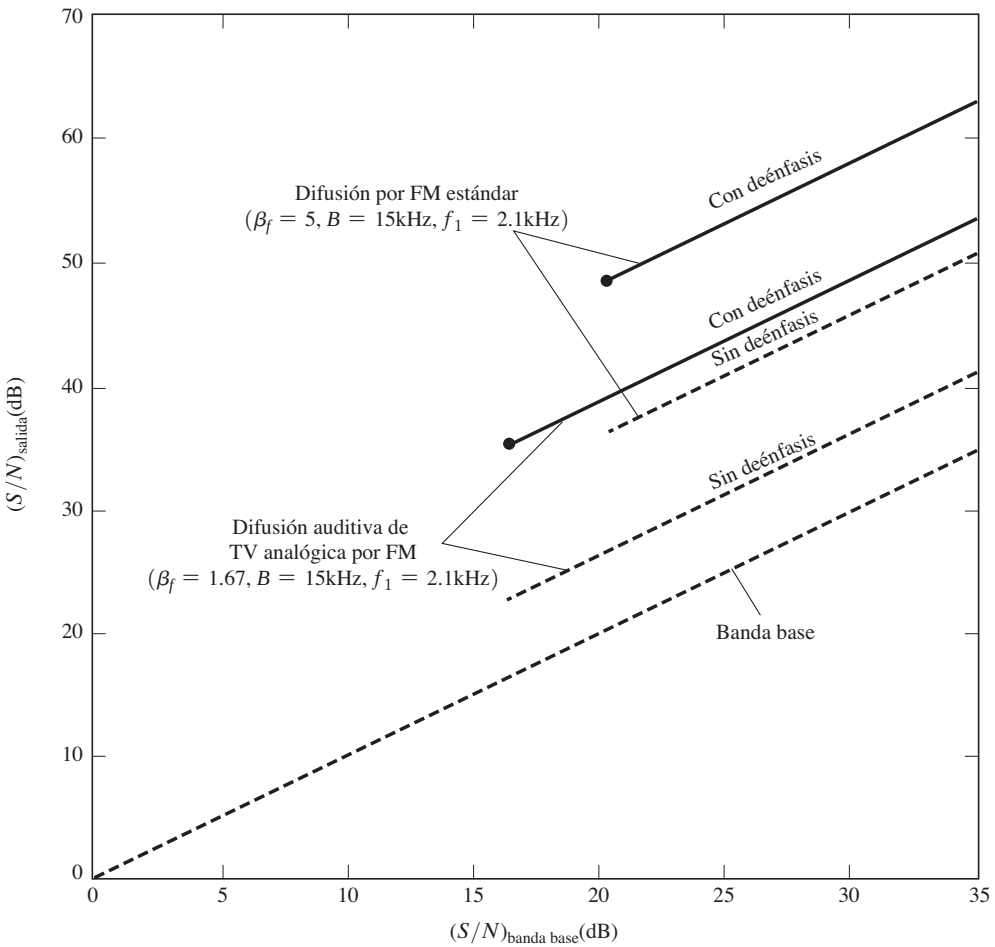


Figura 7–26 Rendimiento del ruido de sistemas de FM estándar para modulación senoidal.

Es interesante comparar el rendimiento del ruido de los sistemas comerciales de FM. Como se mostró en la tabla 5−4, para la difusión estándar por FM $\beta_f = 5$, $B = 15$ kHz y $f_1 = 2.1$ kHz. Con estos parámetros en la ecuación (7−141) se obtiene el rendimiento del ruido en un sistema de difusión por FM, como se muestra en la figura 7−26 mediante una línea continua. El rendimiento correspondiente del mismo sistema, pero sin preénfasis−deénfasis, también se muestra mediante una línea punteada [a partir de la ecuación (7−131)]. De manera similar, estos resultados se muestran para el rendimiento del sistema de transmisión de audio de TV analógica por FM, donde $\beta_f = 1.67$, $B = 15$ kHz y $f_1 = 2.1$ kHz.

La figura 7−26 también ilustra que el rendimiento del ruido de FM con deénfasis puede ser sustancialmente mejor que para la FM sin deénfasis. Por ejemplo, para la difusión estándar por FM ($\beta_f = 5$, $B = 15$ kHz y $f_1 = 2.1$ kHz) con $(S/N)_{\text{banda base}} = 25$ dB, el rendimiento de FM es 13.3 dB superior.

7–9 COMPARACIÓN DE SISTEMAS DE SEÑALIZACIÓN ANALÓGICA

La tabla 7−2 compara los sistemas analógicos que se analizaron en las secciones anteriores. Se aprecia que los sistemas de modulación no lineal proporcionan una mejora significativa en cuanto al rendimiento del ruido, *siempre y cuando* la señal de entrada esté por encima del umbral. Por supuesto que dicha mejora se obtiene a expensas de poder utilizar un ancho de banda de transmisión más grande. Si la SNR de entrada es muy baja, los sistemas lineales superarán en rendimiento a los no lineales. La SSB funciona mejor en términos de un ancho de banda pequeño y cuenta con una de las mejores características de ruido para SNR de entrada baja.

La selección de un sistema en particular depende del ancho de banda de transmisión permitido y de la SNR de entrada al receptor disponible. En la figura 7−27 se compara el rendimiento del ruido de dichos sistemas, con $V_p = 1$ y $\overline{m^2} = \frac{1}{2}$. Para los sistemas no lineales se selecciona una razón de ensanchado del ancho de banda de $B_T/B = 12$ para la comparación de los sistemas. Esto corresponde a un $\beta_f = 5$ para los sistemas de FM que se citan en la figura y a la difusión comercial por FM.

Note que, a excepción de la potencia de portadora "gastada" en AM, todos los métodos lineales de modulación tienen el mismo rendimiento de SNR que para el sistema en banda base. (La SSB tiene el mismo rendimiento que la DSB porque la coherencia de ambas bandas laterales en ésta hace una compensación para la mitad de la potencia de ruido en aquélla debido a reducción en su ancho de banda.) Estas comparaciones se realizan con base en señales con potencias *promedio* iguales. Si se contrastan sobre potencias *pico* iguales (es decir, valores pico iguales para las señales), la SSB tiene una $(S/N)_{\text{salida}}$ que es 3 dB mejor que para la DSB y 9 dB mejor que para la AM con 100% de modulación (como se demuestra en el problema 7−34). Por supuesto que, cuando se opera por encima del umbral, todos los sistemas no lineales de modulación poseen un mejor rendimiento de SNR que los lineales, ya que aquéllos cuentan con anchos de banda de transmisión más grandes.

Rendimiento de un sistema ideal

¿Cuál es el mejor rendimiento del ruido teóricamente posible? ¿Cómo se puede utilizar un ancho de banda de transmisión para obtener una mejora en el rendimiento del ruido? La respuesta se obtiene a partir del teorema de capacidad en el canal de Shannon. El *sistema ideal* se define como aquel que no pierde capacidad en el canal durante el proceso de detección. Por tanto,

$$C_{\text{centrada}} = C_{\text{salida}} \tag{7–142}$$

donde C_{entrada} es la capacidad pasabanda en el canal y C_{salida} la capacidad en el canal después de la detección. Empleando la ecuación (1−10) en la ecuación (7−142) se tiene que

$$B_T \log_2[1 + (S/N)_{\text{entrada}}] = B \log_2[1 + (S/N)_{\text{salida}}] \tag{7–143}$$

donde B_T es el ancho de banda de transmisión de la señal pasabanda a la entrada del receptor y B el ancho de banda de la señal en banda base a la salida del mismo. Resolviendo para $(S/N)_{\text{salida}}$ se tiene que

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \left[1 + \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{entrada}}\right]^{B_T/B} - 1 \tag{7–144}$$

TABLA 7–2 COMPARACIÓN DE TÉCNICAS DE SEÑALIZACIÓN ANALÓGICA[a]

Tipo	Linealidad	Ancho de banda de transmisión requerido[b]	$\frac{(S/N)_{\text{salida}}}{(S/N)_{\text{banda base}}}$		Comentarios
Banda base	L	B	1	(7–84)	Sin modulación
AM	L[c]	$2B$	$\frac{\overline{m^2}}{1+\overline{m^2}}$	(7–90)	Válida para toda $(S/N)_{\text{entrada}}$ con detección coherente; válida por encima del umbral para detección de envolvente y $\lvert m(t)\rvert \leq 1$
DSB-SC	L	$2B$	1	(7–98)	Requiere detección coherente
SSB	L	B	1	(7–105)	Requiere detección coherente; el rendimiento es idéntico al sistema en banda base
PM	NL	$2(\beta_p+1)B$	$\beta_p^2\overline{\left(\frac{m}{V_p}\right)^2}$	(7–120)	Requiere detección coherente; válida para $(S/N)_{\text{entrada}}$ por encima del umbral
FM	NL	$2(\beta_f+1)B$	$3\beta_f^2\overline{\left(\frac{m}{V_p}\right)^2}$	(7–130)	Válida para $(S/N)_{\text{entrada}}$ por encima del umbral
FM con deénfasis	NL	$2(\beta_f+1)B$	$\beta_f^2\left(\frac{B}{f_1}\right)^2\overline{\left(\frac{m}{V_p}\right)^2}$	(7–140)	Válida para $(S/N)_{\text{entrada}}$ por encima del umbral
PCM	NL	[d]	$M^2/(S/N)_{\text{banda base}}$	(7–82)	Válida para $(S/N)_{\text{entrada}}$ por encima del umbral (es decir, $P_e \to 0$)

[a] B, ancho de banda absoluto de la señal moduladora; f_1, ancho de banda de 3 dB de la señal de deénfasis; L, lineal; $m = m(t)$ es la señal moduladora; $M = 2^n$, número de pasos de cuantificación donde n es el número de bits en la palabra PCM; NL, no lineal; V_p, valor pico de $m(t)$; β_p, índice de PM; β_f, índice de FM.

[b] Las especificaciones típicas para el ancho de banda de la ITU son más grandes que estos mínimos [Jordan, 1985].

[c] Para ser estrictos, la señalización por AM es no lineal debido al término de portadora (consulte la tabla 4–1).

[d] El ancho de banda depende del tipo de sistema digital usado (por ejemplo, OOK y FSK).

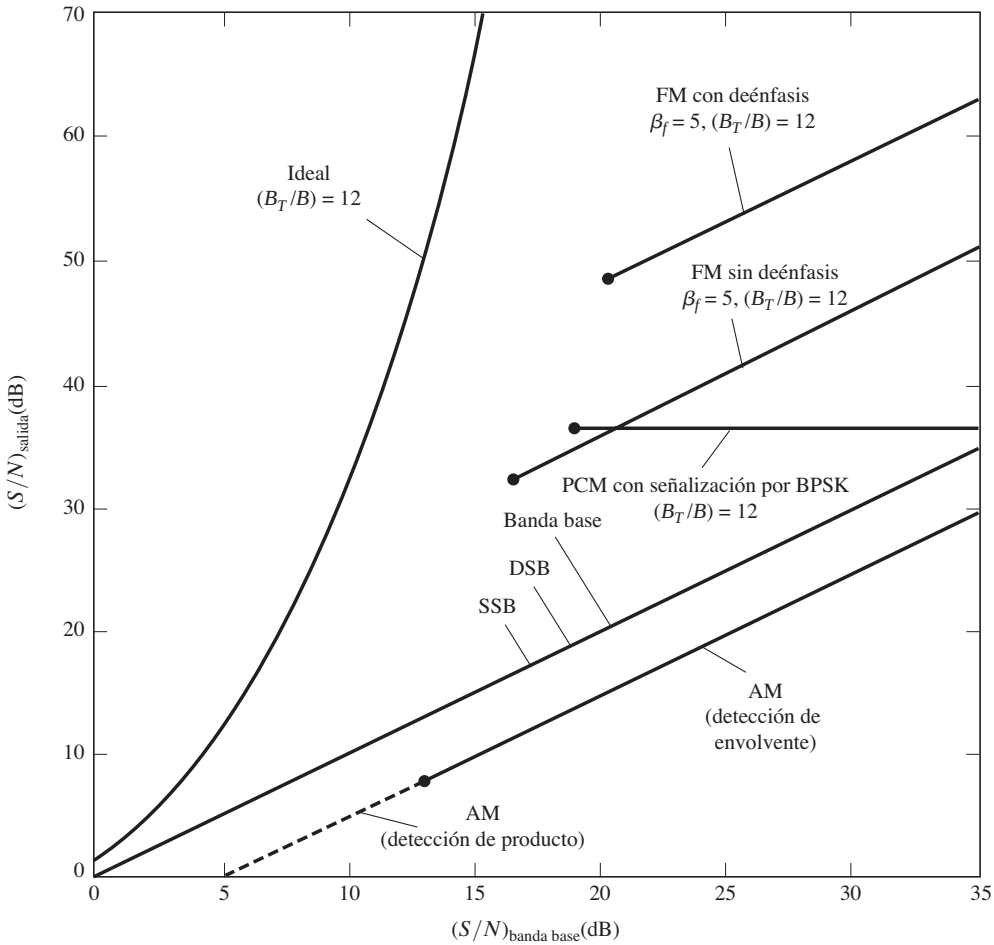


Figura 7–27 Comparación del rendimiento del ruido de sistemas analógicos.

Sin embargo

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{entrada}} = \frac{P_s}{N_0 B_T} = \left(\frac{P_s}{N_0 B}\right)\left(\frac{B}{B_T}\right) = \left(\frac{B}{B_T}\right)\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{banda base}} \tag{7–145}$$

donde se ocupó la ecuación (7–84). Por lo tanto, la ecuación (7–144) se convierte en

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{salida}} = \left[1 + \left(\frac{B}{B_T}\right)\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{banda base}}\right]^{B_T/B} - 1 \tag{7–146}$$

La ecuación (7–146), la cual describe el rendimiento del sistema ideal, se grafica en la figura 7–27 para el caso de $B_T/B = 12$. Como se esperaba, ninguno de los sistemas prácticos de señalización puede igualar el rendimiento del sistema ideal; sin embargo, algunos de los no lineales (cerca del umbral) se aproximan a él.

7–10 RESUMEN

En la sección 7–6 se hizo ya un resumen del rendimiento de los sistemas digitales, y en la 7–9 del rendimiento de los sistemas analógicos. Se invita al lector a que repase estas secciones como síntesis de este capítulo. Sin embargo, para condensar estas secciones, simplemente se enuncia que no existe "el mejor sistema" que proporcione una solución universal. La solución depende del rendimiento del ruido requerido, del ancho de banda de transmisión disponible y de lo más avanzado en la electrónica que pudiera favorecer la utilización de un tipo de sistema de comunicaciones sobre otro. Además se ha evaluado el rendimiento para el caso de un canal con ruido blanco aditivo gaussiano. Los resultados serían diferentes para otros tipos de distribuciones de ruido o para el ruido multiplicativo.

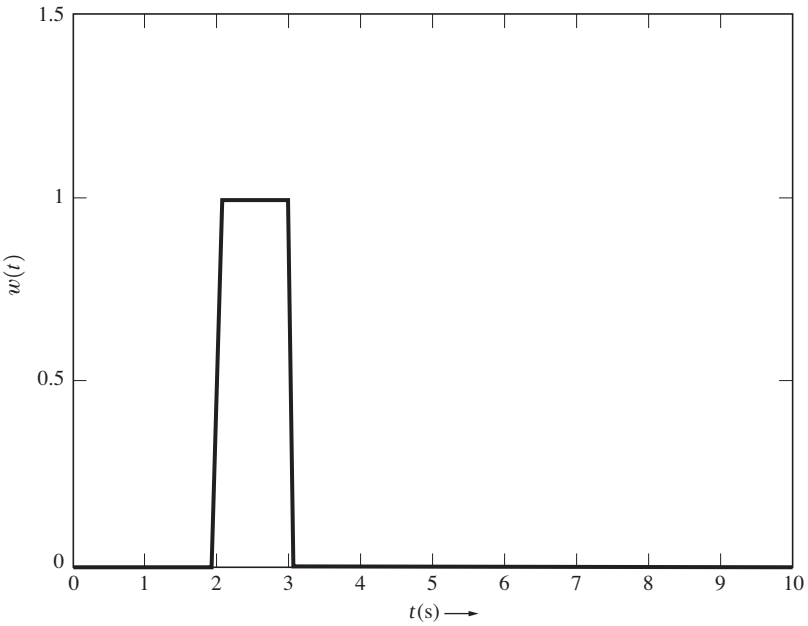
7–11 EJEMPLOS DE ESTUDIO

SA7–1 BER para un receptor con LPF de pared de ladrillo Considerando la sección 7–2 y las partes (a) y (b) de la figura 7–4, sea una señal unipolar con ruido blanco gaussiano a la entrada de un receptor que usa un filtro pasabajas (LPF). Con las suposiciones para llegar a la ecuación (7–24a) se muestra que la BER para los datos a la salida del receptor que emplea un LPF (y no el filtro acoplado óptimo) es de aproximadamente $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{4N_0B}}\right)$, donde A es el valor pico de la señal unipolar de entrada, $N_0/2$ la PSD del ruido y B el ancho de banda equivalente del LPF. Al obtener este resultado se puede discutir que la muestra para una señal filtrada de un 1 binario, $s_{01}(t_0)$, es aproximadamente A, siempre y cuando el ancho de banda equivalente del LPF sea $B > 2/T$, donde T es el ancho del pulso rectangular transmitido cuando se envía un 1 binario. $R = 1/T$ es la velocidad de datos. Si el receptor ocupa un LPF ideal (es decir, un LPF de pared de ladrillos) con

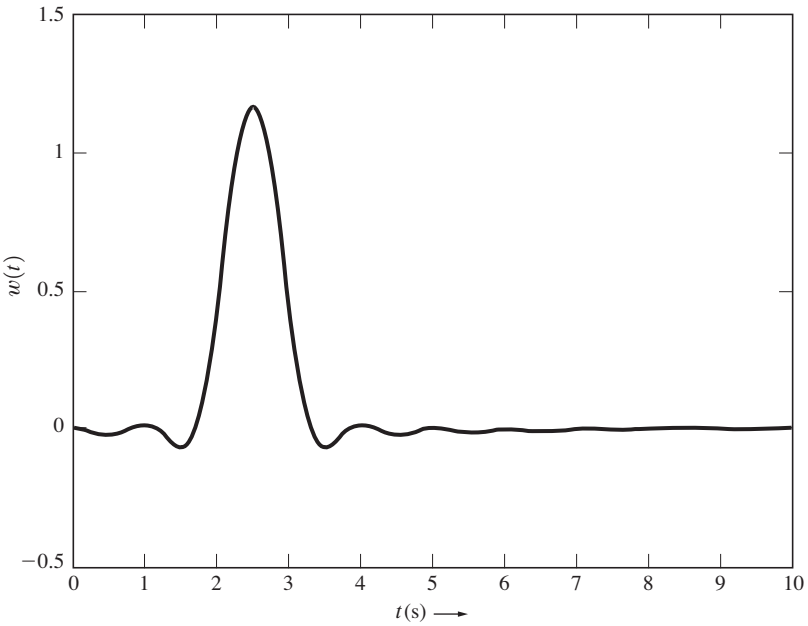
$$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \tag{7–147}$$

muestre que la aproximación $s_{01}(t_0) \approx A$ es válida para $B \geq 2T$.

Solución La solución por MATLAB se da en los gráficos de la figura 7–28. La figura 7–28a muestra el pulso rectangular sin filtrado de amplitud $A = 1$ y ancho $T = 1$. En las figuras 7–28b, 7–28c y 7–28d se ve el pulso filtrado cuando el ancho de banda del LPF de pared de ladrillos es $B = 1/T$, $B = 2/T$ o $B = 3/T$, respectivamente. Para $B \geq 2/T$, se observa que la muestra es aproximadamente A, donde $A = 1$, cuando la muestra se toma cerca de la mitad del intervalo de bit. También note que existe una ISI despreciable siempre y cuando $B \geq 2/T$. Aún más, como se ve en la figura 7–28b para $B = 1/T$, se observa que $s_{01}(t_0) \approx 1.2\,\square\!\!\!\!\square = 1.2A$. En consecuencia, existe la tentación de utilizar $s_{01}(t_0) \approx A$ (lo cual causará una BER más baja) en la fórmula para la BER y especificar el ancho de banda equivalente del filtro de tal forma que éste sea exactamente $B = 1/T$. Sin embargo, si esto se realiza, la fórmula de la BER no será correcta para los casos cuando $B > 1/T$. Además (como se muestra en SA7–2), si se emplea un LPF RC (en lugar de un LPF de pared de ladrillos, el cual es impráctico para construir) no se obtendrá $s_{01}(t_0) = 1.2A$ para $B = 1/T$. Es decir, si se ocupa $s_{01}(t_0) = 1.2A$ para obtener la fórmula de la BER, ésta no será válida para el LPF RC. Por lo tanto, la ecuación (7–24a), que supone una $s_{01}(t_0) \approx A$ para $B \geq 2/T$, será aproximadamente correcta para todo tipo de LPF prácticos que pudieran usarse. Además de esto, si $s_{01}(t_0)$ no es igual a A para un filtro en particular, solamente reemplace A en la ecuación (7–24a) con la muestra correcta para dicho filtro y así se obtendrá el resultado exacto (es decir, no una aproximación).

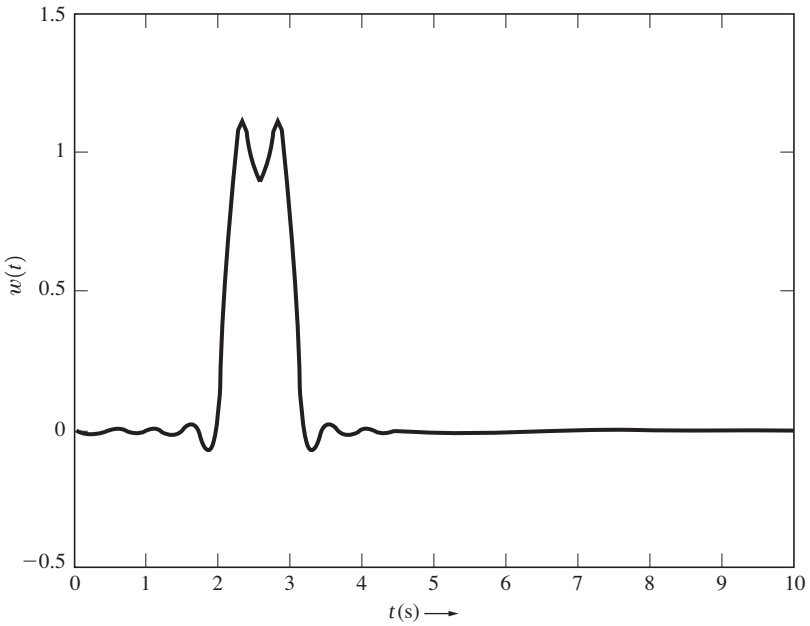


(a) Pulso sin filtrado con amplitud $A = 1$ y ancho de pulso $T = 1$

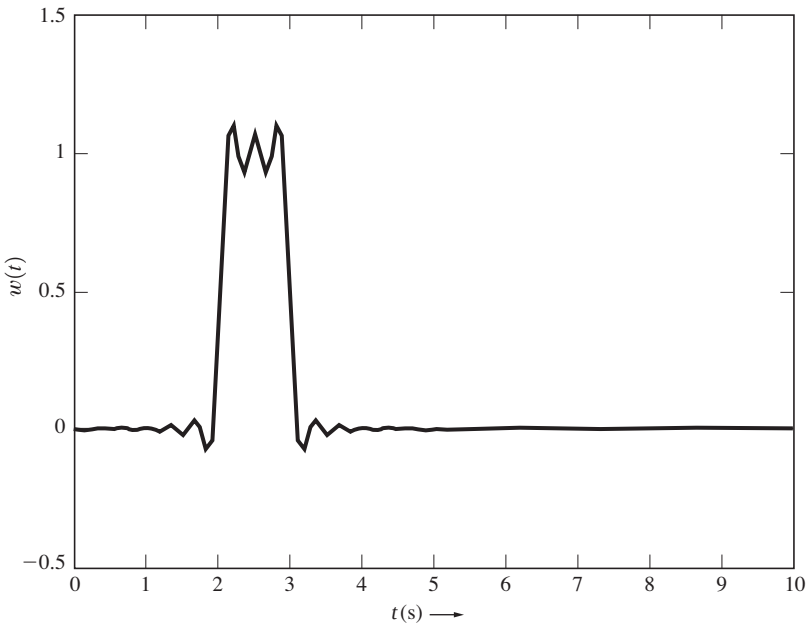


(b) Pulso filtrado con ancho de banda equivalente $B = 1/T = 1$ Hz.

Figura 7–28 Solución para SA7−1, donde se muestra el efecto de un filtrado pasabajas de pared de ladrillos.



(c) Pulso filtrado con ancho de banda equivalente $B = 2/T = 2$ Hz



(d) Pulso filtrado con ancho de banda equivalente $B = 3/T = 3$ Hz

Figura 7–28 (*continuación*)

SA7–2 BER para un receptor con LPF RC Vuelva a desarrollar el problema SA7−1 para el caso cuando el LPF es un filtro RC con

$$H(f) = \frac{1}{1 + j\left(\dfrac{f}{B_{3\text{dB}}}\right)} \tag{7–148}$$

donde $B_{3\text{dB}} = 1/(2\pi RC)$. Note que, utilizando la ecuación (6−104), se observa que el ancho de banda equivalente del LPF RC es $B = (\pi/2)B_{3\text{dB}}$.

Solución La solución por MATLAB se muestra en los gráficos de la figura 7−29. La figura 7−29a muestra al pulso filtrado cuando el ancho de banda del LPF RC es $B = 1/T$, $B = 2/T$ o $B = 3/T$, respectivamente. Para $B = 1/T$, $s_{01}(t_0) = 1 = A$ sólo si el tiempo de muestreo, t_0, puede situarse cerca del fin del pulso precisamente en el punto en el cual el pulso filtrado es un máximo. Esto requiere del uso de un sincronizador de bit exacto. Para $B \geq 2/T$ se observa que $s_{01}(t_0) = 1 = A$ y que el tiempo de muestreo, t_0, no es tan crítico, ya que el pulso filtrado es plano (con un valor de A) sobre una porción significativa del intervalo de bit (pulso). Además la ISI es despreciable cuando $B \geq 2/T$□es decir, la solución al problema de tarea 7−9d demuestra que el peor caso de la razón de señal a ISI es de alrededor de 70 dB. En consecuencia, la ecuación (7−24a), la cual asume que $s_{01}(t_0) \approx A$, es aproximadamente correcta para $B \geq 2/T$.

SA7–3 Comparación de la BER para receptores con RC y MF Compare el rendimiento de un receptor digital que emplea un LPF RC con el de otro que ocupa un filtro acoplado (MF, por sus siglas en inglés). Considerando la figura 7−4a, sea la entrada al receptor una señal unipolar con ruido blanco gaussiano. Suponga que la señal unipolar tiene una velocidad de datos de $R = 9600$ bits/s y un valor pico de $A = 5$. El ruido tiene una PSD de $\mathcal{P}_{\text{n}}(f) = 3 \times 10^{-5}$.

(a) Si el filtro receptor es un LPF RC con un ancho de banda equivalente de $B = 2/T = 2R$, evalúe la SNR a la entrada del filtro RC donde el ancho de banda del ruido se considera el ancho de banda equivalente del LPF RC. Evalúe además la BER para los datos a la salida del receptor.

(b) Repita el inciso (a) para el caso de $B = 1/T = R$.

(c) Si el filtro receptor es un MF, evalúe la SNR a la entrada del MF donde el ancho de banda del ruido es el ancho de banda equivalente del MF. Evalúe además la BER para los datos a la salida del receptor.

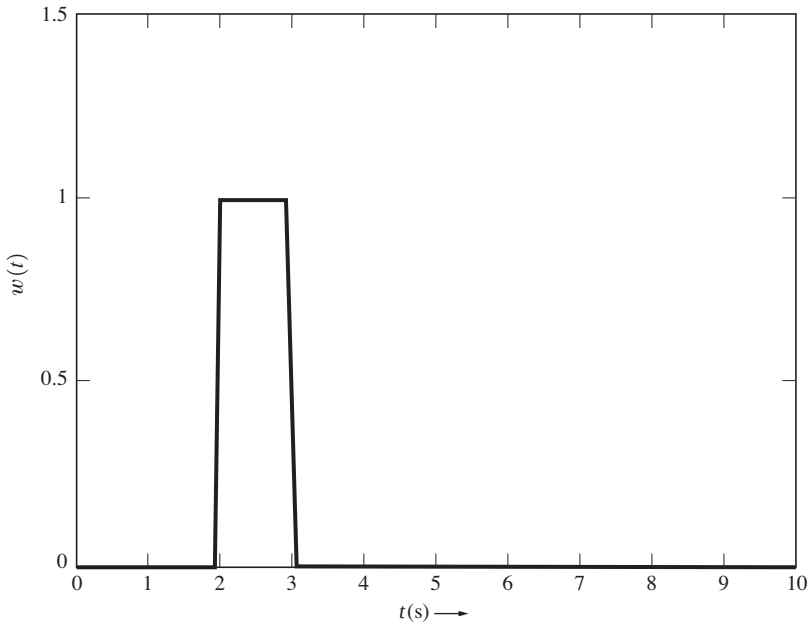
(d) Compare el rendimiento de la BER del receptor que usa el LPF RC con el del receptor con MF.

Solución La energía promedio por bit para la señal a la entrada del receptor es $E_b = (A^2/2)T = A^2/(2\text{R})$. $\mathcal{P}_n(f) = N_0/2 = 3 \times 10^{-5}$ así que $N_0 = 6 \times 10^{-5}$. Por lo tanto,

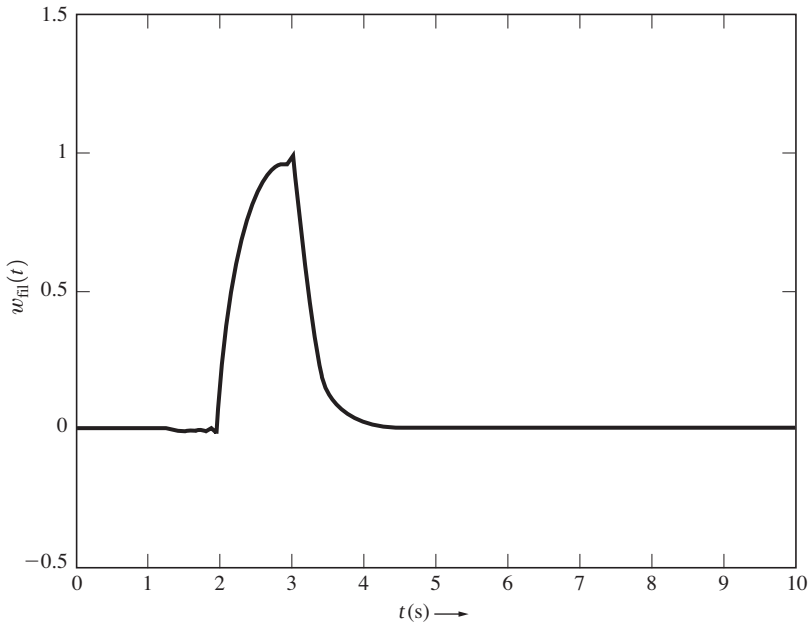
$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\text{dB}} = 10\ \log\left(\frac{A^2}{2N_0R}\right) = 10\ \log\left(\frac{(5)^2}{2(6 \times 10^{-5})\ (9600)}\right) = 13.4\ \text{dB} \tag{7–149}$$

(a) Para un receptor que usa un LPF RC con $B = 2/T = 2R$, la potencia de ruido en el ancho de banda B es $P_n = (N_0/2)(2B)$. El voltaje RMS de la señal o el ruido se relaciona a su potencia promedio a través de $V_{\text{RMS}}^2 = \langle v^2(t) \rangle = P$. Debido a que la potencia promedio de la señal de entrada es $P_s = A^2/2$, el voltaje RMS de la señal a la entrada del receptor es

$$V_s = \sqrt{A^2/2} = A/\sqrt{2} = 5/\sqrt{2} = 3.54\ \text{V RMS de señal}$$

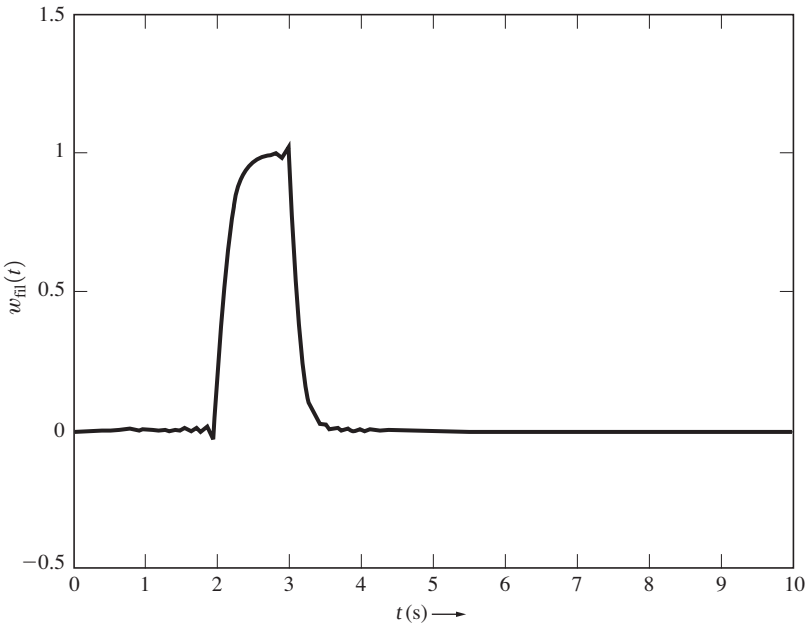


(a) Pulso sin filtrado con amplitud $A = 1$ y ancho de pulso $T = 1$

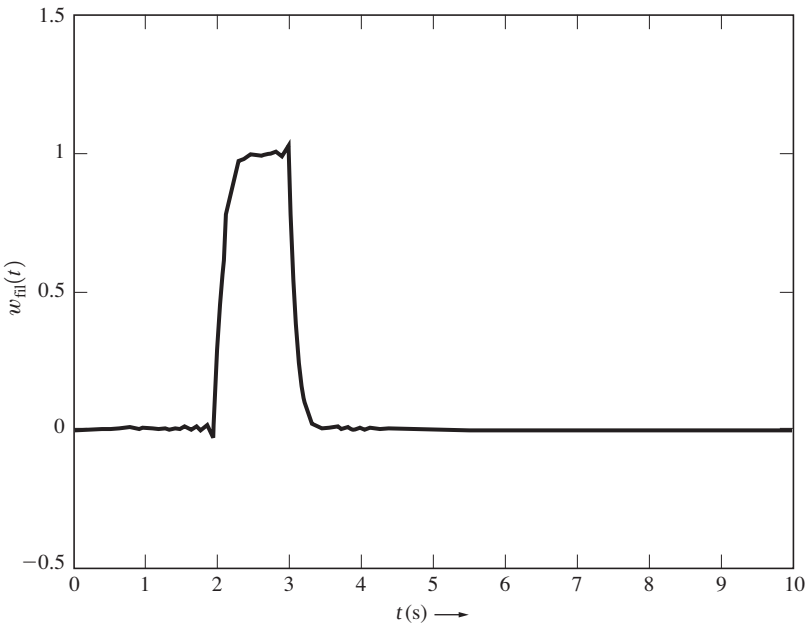


(b) Pulso filtrado con ancho de banda equivalente $B = 1/T = 1$ Hz

Figura 7–29 Solución para SA7−2 donde se muestra el efecto de un filtrado pasabajas RC.



(c) Pulso filtrado con ancho de banda equivalente $B = 2/T = 2$ Hz



(d) Pulso filtrado con ancho de banda equivalente $B = 3/T = 3$ Hz

Figura 7–29 (*conclusión*)

El voltaje RMS de ruido (medido sobre un ancho de banda de $2R$) a la entrada del receptor es

$$V_n = \sqrt{\frac{N_0}{2}(2B)} = \sqrt{2N_0R} = \sqrt{2(6 \times 10^{-5})\,(9600)} = 1.07 \text{ V RMS de ruido}$$

□, por lo tanto, la SNR de entrada es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 20\ \log\left(\frac{V_s}{V_n}\right) = 20\ \log\left(\frac{3.54}{1.04}\right) = 10.4 \text{ dB}$$

Además, la SNR puede evaluarse utilizando

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 10\ \log\left(\frac{P_s}{P_n}\right) = 10\ \log\left(\frac{A^2}{2N_0B}\right) \tag{7–150}$$

la cual, para $B = 2/T = 2R$, se convierte en

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 10\ \log\left(\frac{A^2}{4N_0R}\right) = 10.4 \text{ dB}$$

La BER se obtiene con la ecuación (7–24a) para el caso de un LPF RC, donde $s_{01}(t_0) \approx A$ y $B = 2/T = 2R$. Por lo tanto, se tiene que

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{8N_0R}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(5)^2}{8(6 \times 10^{-5})\,(9600)}}\right) = 9.9 \times 10^{-3}$$

(b) Para un receptor que emplea un LPF RC con $B = 1/T = R$, el voltaje RMS de ruido (medido sobre un ancho de banda de R) a la entrada del receptor es

$$V_n = \sqrt{\frac{N_0}{2}(2B)} = \sqrt{N_0R} = \sqrt{(6 \times 10^{-5})\,(9600)} = 0.76 \text{ V RMS de ruido}$$

Por lo tanto, la SNR de entrada es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 20\ \log\left(\frac{V_s}{V_n}\right) = 20\ \log\left(\frac{3.54}{0.76}\right) = 13.4 \text{ dB}$$

Además, haciendo uso de la ecuación (7–150) con $B = R$, se tiene que

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 10\ \log\left(\frac{A^2}{2N_0R}\right) = 13.4 \text{ dB}$$

La BER se obtiene usando la ecuación (7–24a) con $B = 1/T = R$. Por lo tanto, se tiene que

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{4N_0R}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{(5)^2}{4(6 \times 10^{-5})\,(9600)}}\right) = 4.9 \times 10^{-4}$$

(c) Para llegar a la SNR para el receptor MF, primero se requiere evaluar el ancho de banda equivalente del MF. Utilizando la ecuación (6–155) se observa que la función de transferencia para el MF que se acopla al pulso rectangular $s(t) = 5\Pi(t/T)$ es

$$H(f) = K\frac{S^*(f)}{\mathcal{P}_n(f)}\ e^{-j\omega t_0} = CT\left(\frac{\operatorname{sen} \pi Tf}{\pi Tf}\right) e^{-j\omega t_0}$$

donde $C = 5K/(N_0/2)$. A partir de la ecuación (2–192) se tiene que el ancho de banda equivalente del MF es

$$B = \frac{1}{|H(0)|^2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\,df = \int_0^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}\pi Tf}{\pi Tf}\right)^2 df$$

Para evaluar esta integral, cambie las variables. Sea $x = \pi Tf$, de tal forma que con la ayuda del apéndice A se obtiene

$$B = \frac{1}{\pi T}\int_0^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 dx = \left(\frac{1}{\pi T}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2T} = \frac{1}{2}\,R \tag{7–151}$$

Por lo tanto, el voltaje RMS de ruido (medido sobre un ancho de banda de $B = R/2$) a la entrada del receptor es

$$V_n = \sqrt{\frac{N_0}{2}(2B)} = \sqrt{N_0R/2} = \sqrt{(6\times10^{-5})\,(9600)/2} = 0.54 \text{ V RMS de ruido}$$

Como se obtuvo previamente, el voltaje RMS de la señal es $V_s = 3.54$ V. Por lo tanto, la SNR es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 20\,\log\left(\frac{V_s}{V_n}\right) = 20\,\log\left(\frac{3.54}{0.54}\right) = 16.4 \text{ dB}$$

Además, empleando la ecuación (7–150) con $B = R/2$ se tiene que

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{dB}} = 10\,\log\left(\frac{A^2}{N_0R}\right) = 16.4 \text{ dB}$$

La BER se obtiene con la ecuación (7–24b):

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2T}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{A^2}{2N_0R}}\right)$$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{(5)^2}{2(6\times10^{-5})\,(9600)}}\right) = 1.6\times10^{-6}$$

Este resultado puede verificarse con la figura 7–14 para el caso de señalización unipolar con $(E_b/N_0)_{\text{dB}} = 13.4$ dB.

(d) Como se discutió en la solución para SA7–2, si se usa un LPF RC económico con $B = 2R$, un sincronizador de bit económico (con tiempos de muestreo imprecisos) es adecuado para utilizarse en el receptor. Como se encontró en el inciso (a), esto resulta en una BER de 9.9×10^{-3}.

Si se desea un mejor rendimiento (es decir, una BER más baja), se reduce el ancho de banda del LPF a $B = R$, pero se requiere de un sincronizador de bit preciso (más costoso). Esto reduce la BER a 4.9×10^{-4}, como se encontró en la parte (b).

Si se desea un rendimiento todavía mejor, se opta por un MF (más costoso que un LPF). Éste se implementa con un filtro de integración y descarga, como se mostró previamente en la figura 6–17. Este MF requiere de un sincronizador de bit para suministrar las señales de sincronización que reinicializa al integrador y desecha el valor del muestreador. Este receptor MF proporciona el óptimo rendimiento (BER más baja). En este caso, la BER se reduce a 1.6×10^{-6}, como se encontró en la parte (c). Sin embargo, es importante considerar que en ciertas aplicaciones, como en algunos sistemas de fibra óptica, el ruido es despreciable. En tal caso, el LPF simple de la parte (a) con $B = 2/T = 2R$ es adecuado, ya que la BER se aproximará a cero.

SA7–4 Mejora en la SyN de salida para FM con preénfasis En los sistemas de señalización por FM a menudo se emplea una preénfasis de la modulación a la entrada del transmisor y un deénfasis a la salida del receptor para mejorar la SNR de salida. Para una énfasis de 75 μs, la frecuencia de esquina de 3 dB del LPF de deénfasis en el receptor es $f_1 = 1/(2\pi 75\mu s) = 2.12$ kHz. El ancho de banda de audio es $B = 15$ kHz. Derive una fórmula para la mejora en dB, I_{dB}, para la SNR de un sistema de FM con preénfasis–deénfasis cuando se compara con la SNR para un sistema de FM sin preénfasis–deénfasis. Calcule I_{dB} para $f_1 = 2.12$ kHz y $B = 15$ kHz.

Solución Considerando las ecuaciones (7–121)–(7–127) para el desarrollo de la ecuación de la $(S/N)_{salida}$ para FM sin deénfasis y a las ecuaciones (7–135)–(7–138) para el desarrollo de la ecuación de la $(S/N)_{salida}$ para FM con deénfasis. Entonces,

$$I = \frac{(S/N)_{\text{con deénfasis}}}{(S/N)_{\text{sin deénfasis}}} = \frac{\left(\dfrac{\overline{s_0^2}}{\overline{n_0^2}}\right)_{\text{con deénfasis}}}{\left(\dfrac{\overline{s_0^2}}{\overline{n_0^2}}\right)_{\text{sin deénfasis}}} \tag{7–152}$$

De la sección 5–6 y la figura 5–15 se observa que la inclusión de dos filtros, uno de deénfasis en el receptor, $H_d(f)$, y otro de preénfasis en el transmisor, $H_p(f)$, no tiene algún efecto general sobre la respuesta de frecuencia (o potencia) de la *señal* de audio de salida, $s_0(t)$, debido a que $H_p(f)H_d(f) = 1$ sobre el ancho de banda de audio, B, donde $B < f_2$. Por lo tanto, $(\overline{s_0^2})_{\text{con deénfasis}} = (\overline{s_0^2})_{\text{sin deénfasis}}$, y la ecuación (7–152) se reduce a

$$I = \frac{(\overline{n_0^2})_{\text{sin deénfasis}}}{(\overline{n_0^2})_{\text{con deénfasis}}} \tag{7–153}$$

El ruido de salida es diferente para el receptor con deénfasis (comparado con uno sin él), ya que su filtro atenúa el ruido a audiofrecuencias más altas (el filtro de preénfasis transmisor no tiene efecto alguno sobre el ruido recibido). Utilizando la ecuación (7–126) para $(\overline{n_0^2})_{\text{sin deénfasis}}$ y la ecuación (7–136) para $(\overline{n_0^2})_{\text{con deénfasis}}$, se observa que la ecuación (7–153) se convierte en

$$I = \frac{\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{K}{A_c}\right)^2 N_0 B^3}{2\left(\dfrac{K}{A_c}\right)^2 N_0 f_1^3 \left[\dfrac{B}{f_1} - \tan^{-1}\left(\dfrac{B}{f_1}\right)\right]}$$

o

$$I = \frac{B^3}{3f_1^3 \left[\dfrac{B}{f_1} - \tan^{-1}\left(\dfrac{B}{f_1}\right)\right]} \tag{7–154}$$

Debido a que $I_{dB} = 10 \log(I)$ se tiene que

$$I_{dB} = 30 \log\left(\frac{B}{f_1}\right) - 10 \log\left\{3\left[\frac{B}{f_1} - \tan^{-1}\left(\frac{B}{f_1}\right)\right]\right\} \tag{7–155}$$

Para $f_1 = 2.1$ kHz y $B = 15$ kHz, la ecuación (7–155) resulta en

$$I_{dB} = 13.2 \text{ dB}$$

Esto concuerda con el valor para I_{dB} que se obtiene de la figura 7–26.

PROBLEMAS

★ **7–1** En un sistema de comunicaciones binario la estadística de prueba del receptor, $r_0(t_0) = r_0$, consiste en una señal polar con ruido que tiene valores de $s_{01} = +A$ y $s_{02} = -A$. Suponga que el ruido tiene una distribución *laplaciana*, la cual es

$$f(n_0) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma_0}\, e^{-\sqrt{2}|n_0|/\sigma_0}$$

donde σ_0 es el RMS del ruido.

(a) Encuentre la probabilidad de error P_e como una función de A/σ_0 para el caso de una señalización equiprobable y donde V_T tiene el valor óptimo.

(b) Grafique P_e como una función de A/σ_0 decibeles. Compare este resultado con el obtenido para el ruido gaussiano, como resulta de la ecuación (7–26a).

7–2 Empleando la ecuación (7–8), muestre que el nivel óptimo de umbral para el caso de una señalización antípoda con ruido blanco aditivo gaussiano es

$$V_T = \frac{\sigma_0^2}{2s_{01}} \ln\left[\frac{P(s_2 \text{ enviada})}{P(s_1 \text{ enviada})}\right]$$

En este caso el filtro del receptor tiene una salida con una varianza de σ_0^2 □ s_{01} es el valor de la señal de un 1 binario muestreada a la salida del filtro □ $P(s_1$ enviada) y $P(s_2$ enviada) son las probabilidades de transmitir un 1 binario y un 0 binario, respectivamente.

7–3 Un sistema de comunicaciones digital en banda base ocupa una señalización polar con un filtro acoplado en el receptor. La probabilidad de enviar un 1 binario es p, y la de enviar un 0 binario es $1 - p$.

(a) Para $E_b/N_0 = 10$ dB, grafique P_e como una función de p usando una escala logarítmica.

(b) Remitiéndose a la ecuación (1–8), grafique la entropía, H, como una función de p. Compare las formas de estas dos curvas.

7–4 Un sistema de comunicaciones binario *completo* puede modelarse como un *canal de información*, como se muestra en la figura P7–4. Encuentre ecuaciones para las cuatro probabilidades de transición $P(\tilde{m} \mid m)$, donde tanto $\tilde{m}$ como m pueden ser 1 o 0 binarios. Suponga que la estadística de prueba es una función lineal de la entrada del receptor y que en ésta aparece ruido blanco aditivo gaussiano. [*Sugerencia:* observe la ecuación (7–15).]

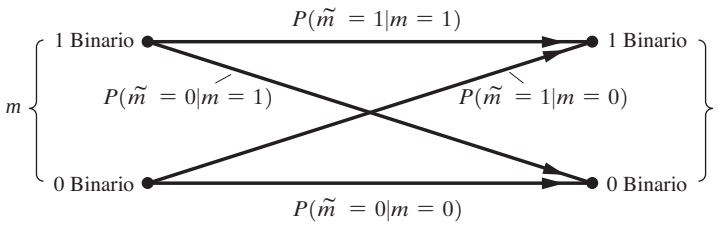


Figura P7–4

★ **7–5** Un sistema de comunicaciones digital en banda base utiliza una señalización unipolar (forma de pulso rectangular) con detección por filtro acoplado. La velocidad de datos es de $R = 9{,}600$ bits/segundo.

(a) Encuentre una expresión para la tasa de error en el bit (BER), P_e, como una función de $(S/N)_{\text{entrada}}$. Esta es la razón de potencia de señal a ruido en la entrada del receptor cuando el ruido se mide sobre un ancho de banda correspondiente al ancho de banda equivalente del filtro acoplado. [*Sugerencia:* encuentre primero una expresión para E_b/N_0 en términos de $(S/N)_{\text{entrada}}$.]

(b) Grafique P_e contra $(S/N)_{\text{entrada}}$ en unidades de dB sobre una escala logarítmica sobre un rango de $(S/N)_{\text{entrada}}$ desde 0 a 15 dB.

7–6 Resuelva el problema 7−5 para el caso de una señalización polar.

7–7 Examine cómo el rendimiento de un sistema de comunicaciones digital en banda base se ve afectado por el filtro receptor. La ecuación (7−26a) describe la BER cuando se emplea un filtro pasabajas y su ancho de banda es lo suficientemente grande para que el nivel de su señal a la salida sea $s_{01} = +A$ o $s_{02} = -A$. En lugar de esto, suponga que se ocupa un filtro pasabajas *RC* con un ancho de banda restringido donde $T = 1/f_0 = 2\pi RC$. T es la duración (ancho de pulso) de un bit y f_0 el ancho de banda a 3 dB del filtro pasabajas *RC*, como se describe en la ecuación (2−147). Suponga que las condiciones iniciales del filtro se reinicializan a cero al inicio de cada intervalo de bit.

(a) Derive una expresión para P_e como una función de E_b/N_0.

(b) En una escala logarítmica, grafique la BER que se obtuvo en la parte (a) para E_b/N_0 sobre el rango de 0 a 15 dB.

(c) Compare este resultado con el del receptor con filtro acoplado (como se muestra en la figura 7−5).

★ **7–8** Considere un sistema de comunicaciones digital en banda base que usa una señalización polar (forma de pulso rectangular) cuando el receptor es el que se muestra en la figura 7−4a. Suponga que el receptor utiliza un filtro Butterworth de segundo orden con un ancho de banda a 3 dB de f_0. La respuesta al impulso del filtro y la función de transferencia son

$$h(t) = \left[\sqrt{2}\omega_0 e^{-(\omega_0/\sqrt{2})t}\,\text{sen}\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}\,t\right)\right]u(t)$$

$$H(f) = \frac{1}{(jf/f_0)^2 + \sqrt{2}(jf/f_0) + 1}$$

donde $\omega_0 = 2\pi f_0$. Sea $f_0 = 1/T$, donde T es el intervalo de bit (es decir, el ancho de pulso), y suponga que las condiciones iniciales del filtro se reinicializan a cero al inicio de cada intervalo de bit.

(a) Derive una expresión para P_e como una función de E_b/N_0.

(b) En una escala logarítmica, grafique la BER que se obtuvo en la parte (a) para E_b/N_0 sobre el rango de 0 a 15 dB.

(c) Compare este resultado con el del receptor con filtro acoplado (como se muestra en la figura 7−5).

7–9 Considere un sistema de comunicaciones unipolar en banda base con señalización equiprobable. Suponga que el receptor emplea un LPF *RC* simple con una constante de tiempo de $RC = \tau$, donde $\tau = T$ y $1/T$ es la tasa de bit. (Por "simple" se entiende que las condiciones iniciales del LPF *no* se reinicializan a cero al inicio de cada intervalo de bit.)

(a) Para la señal a la entrada del receptor solamente evalúe la peor razón señal a ISI (en decibeles) aproximada a la salida del LPF al tiempo de muestreo $t = t_0 = nT$, donde n es un entero.

(b) Evalúe la razón señal a ISI (en decibeles) como una función del parámetro K, donde $t = t_0 = (n + K)T$ y $0 < K \leq 1$.

(c) ¿Cuál es el óptimo tiempo de muestreo que se debe ocupar para maximizar la razón de potencia de señal a ISI a la salida del LPF?

(d) Repita el inciso (a) para el caso cuando el ancho de banda equivalente del LPF *RC* es de $2/T$.

7–10 Examine un sistema de comunicaciones polar en banda base con señalización equiprobable y sin ruido en el canal. Suponga que el receptor usa un LPF *RC* simple con una constante de tiempo $\tau = RC$. (Por "simple" se entiende que las condiciones iniciales del LPF *no* se reinicializan a cero al inicio de cada intervalo de bit.) Evalúe la peor razón señal a ISI (en decibeles) aproximada a la salida del LPF a un tiempo de muestreo $t = t_0 = nT$, donde n es un entero. Este resultado aproximado será válido para $T/\tau > \frac{1}{2}$. grafíquelo como una función de T/τ para $\frac{1}{2} \leq T/\tau \leq 5$.

★ **7–11** Considere el sistema unipolar en banda base que se describe en el problema 7−9d. Suponga que hay ruido blanco gaussiano a la entrada del receptor.

(a) Derive una expresión para P_e como una función de E_b/N_0 para el caso de muestreo a los tiempos de $t = t_0 = nT$.

(b) Compare la BER que se obtuvo en la parte (a) con la característica de BER a que se llega cuando se utiliza un receptor con filtro acoplado. Grafique ambas características de BER como una función de $(E_b/N_0)_{\text{dB}}$ sobre el rango de 0 a 15 dB.

7–12 Resuelva el problema 7−11 para el caso de una señalización *polar* en banda base.

7–13 Para una señalización bipolar, la discusión que resulta en la ecuación (7–28) indica que el umbral óptimo en el receptor es $V_T = \frac{A}{2} + \frac{\sigma_0^2}{A} \ln 2$.

(a) Demuestre que este es el óptimo valor de umbral.

(b) Muestre que $A/2$ se aproxima al óptimo umbral si $P_e < 10^{-3}$.

★ **7–14** Para la señalización unipolar en banda base, como se describe en la ecuación (7–23),

(a) Encuentre la respuesta de frecuencia del filtro acoplado y muestre cómo la operación de filtrado puede implementarse con un filtro de integración y descarga.

(b) Muestre que el ancho de banda equivalente del filtro acoplado es $B_{eq} = 1/(2T) = R/2$.

7–15 Se emplea la señalización polar equiprobable en un sistema de comunicaciones en banda base. A la entrada del receptor hay un ruido gaussiano con una PSD de $N_0/2$ W/Hz con una señal polar con un nivel pico a A volts. El receptor ocupa un circuito de filtro acoplado con una ganancia de voltaje de 1,000.

(a) Encuentre la expresión para P_e como una función de A, N_0, T y V_T, donde $R = 1/T$ es la tasa de bit y V_T el nivel de umbral.

(b) Grafique P_e como una función de V_T para el caso de $A = 8 \times 10^{-3}$ V, $N_0/2 = 4 \times 10^{-9}$ W/Hz y $R = 1{,}200$ bits/segundos.

★ **7–16** Considere un sistema de comunicaciones polar en banda base con detección por filtro acoplado. Suponga que el ruido en el canal es blanco y gaussiano con una PSD de $N_0/2$. La probabilidad de enviar un 1 binario es $P(1)$ y la de enviar un 0 binario es $P(0)$. Encuentre la expresión para P_e como una función del nivel de umbral V_T cuando el nivel de la señal a la salida del filtro acoplado es de A y la varianza del ruido a la salida del filtro acoplado es de $\sigma^2 = N_0/(2T)$, donde $R = 1/T$ es la tasa de bit.

7–17 Diseñe un receptor para detectar los datos en una señal bipolar RZ que tiene un valor pico de $A = 5$ volts. En su diseño suponga que se usará un filtro pasabajas RC y la velocidad de datos es de 2,400 (bits/segundos).

(a) Dibuje un diagrama a bloques de su diseño y explique cómo funciona.

(b) Proporcione los valores para los parámetros de diseño R, C y V_T.

(c) Calcule el nivel de la PSD para el ruido N_0 que se permite si P_e debe ser menor a 10^{-6}.

7–18 Se desea una BER de 10^{-5} o menor para un sistema de comunicaciones de OOK donde la tasa de bit es $R = 10$ Mb/s. La entrada al receptor consiste en la señal OOK con ruido blanco gaussiano.

(a) Encuentre el mínimo ancho de banda de transmisión requerido.

(b) Halle el valor mínimo de E_b/N_0 requerido a la entrada del receptor para una detección coherente por filtro acoplado.

(c) Resuelva la parte (b) para el caso de detección no coherente.

7–19 Resuelva el problema 7–18 para el caso en que se utiliza una señalización por FSK. Sea $\Delta = f_2 - f_1 = 1.5R$.

★ **7–20** En este capítulo se derivó la BER para un receptor de BPSK bajo la suposición de que la referencia coherente del receptor (vea la figura 7–7) estaba exactamente en fase con la señal BPSK recibida. Suponga que existe un error en fase de θ_e entre la señal de referencia y la BPSK entrante. Obtenga nuevas ecuaciones que resulten en la P_e en términos de θ_e, así como los otros parámetros. En particular,

(a) Obtenga una nueva ecuación que reemplace la (7–36).

(b) Llegue a una nueva ecuación que reemplace la (7–38).

(c) Grafique los resultados de la parte (b) donde el gráfico logarítmico de P_e se presenta como una función de θ_e sobre un rango de $-\pi < \theta_e < \pi$ para el caso cuando $E_b/N_0 = 10$ dB.

★ **7–21** Se transmiten datos digitales a través de un sistema de comunicaciones que ocupa nueve repetidores y un receptor, y se emplea señalización por BPSK. La P_e de cada uno de los repetidores regenerativos (consulte la sección 3–5) es de 5×10^{-8}, asumiendo un ruido aditivo gaussiano.

(a) Encuentre la P_e general para el sistema.

(b) Si cada repetidor se reemplaza con un amplificador ideal (sin ruido ni distorsión), ¿cuál es la P_e del sistema en general?

★ **7–22** Se transmiten datos digitales sobre un sistema telefónico de paga con BPSK. Existen repetidores regenerativos con un espacio de 50 millas entre ellos a lo largo del sistema, cuya longitud total es de 600 millas. Las líneas telefónicas entre las ubicaciones de los repetidores se ecualizan sobre una banda de 300 a 2,700 Hz y suministran un E_b/N_0 (ruido gaussiano) de 15 dB a la entrada del repetidor.
(a) Encuentre la tasa de bit R más grande que puede soportarse sin ISI.
(b) Halle la P_e general para el sistema (asegúrese de incluir el receptor al final del sistema).

7–23 Una señal BPSK está dada por

$$s(t) = A \operatorname{sen}[\omega_c t + \theta_c + (\pm 1)\beta_p], \qquad 0 < t \leq T$$

Los datos binarios se representan con (± 1), donde $(+1)$ se usa para transmitir un 1 binario y (-1) para un 0 binario. β_p es el índice de modulación de fase, como se define en la ecuación (5–47).
(a) Para $\beta_p = \pi/2$, muestre que esta señal BPSK se vuelve la BPSK que se describe en la ecuación (7–34).
(b) Para $0 < \beta_p < \pi/2$, muestre que un término de portadora discreta está presente además de la señal BPSK que se describe en la ecuación (7–34).

7–24 Remitiéndose a la señal BPSK del problema 7–23, encuentre P_e como una función del índice de modulación β_p, donde $0 < \beta_p \leq \pi/2$.
(a) Halle P_e como una función de A, β_p, N_0 y B para el receptor que utiliza un filtro de banda estrecha.
(b) Encuentre P_e como una función de E_b, N_0 y β_p para el receptor que ocupa un filtro acoplado (E_b es la energía promedio de la señal BPSK que se recibe durante un bit).

7–25 Remitiéndose a la señal BPSK del problema 7–23, sea $0 < \beta_p < \pi/2$.
(a) Muestre un diagrama a bloques para la detección de la señal BPSK cuando se usa un PLL para recuperar la señal de referencia coherente a partir de la BPSK.
(b) Explique por qué a menudo se utilizan datos codificados por Manchester cuando el receptor emplea un PLL para la recuperación de la portadora, como en la parte (a). (*Sugerencia:* observe el espectro de la señal PSK codificada por Manchester.)

7–26 Al obtener la P_e para la señalización FSK con recepción coherente se requiere la energía en la señal de diferencia E_d, como se muestra en la ecuación (7–46). Para la señalización FSK *ortogonal* se encontró que la integral del producto cruzado era igual a cero. Suponga que f_1, f_2 y T se escogen para que se maximice E_d.

(a) Encuentre la razón como una función de f_1, f_2 y T para una E_d máxima.
(b) Halle la P_e como una función de E_b y N_0 para la señalización con esta señal FSK.
(c) Haga un diagrama de la P_e para este tipo de señal FSK y compárela con un diagrama para la P_e para la señal FSK ortogonal que se obtiene de la ecuación (7–47).

★ **7–27** Se transmite una señal FSK con $R = 110$ bits/segundo a través de un canal de RF que presenta ruido blanco gaussiano. El receptor ocupa un detector no coherente y tiene una figura de ruido de 6 dB. La impedancia de entrada de la antena en el receptor es de 50 Ω. El nivel de la señal a la entrada del receptor es de 0.05 μV y el del ruido es de $N_0 = kT_0$, donde $T_0 = 290$ K y k es la constante de Boltzmann (consulte la sección 8–6). Encuentre la P_e para la señal digital a la salida del receptor.

7–28 Resuelva el problema 7–27 para el caso de una señalización por DPSK.

7–29 Un análisis del ruido asociado con los dos canales de un receptor de FSK precede a la ecuación (7–44). En dicho análisis se establece que $n_1(t)$ y $n_2(t)$ son independientes cuando surgen de un proceso de ruido blanco gaussiano común, ya que no tienen traslape en sus espectros. Demuestre que este enunciado es correcto. [*Sugerencia*: $n_1(t)$ y $n_2(t)$ pueden modelarse como las salidas de dos filtros lineales que no tienen traslape en sus funciones de transferencia y que tienen el mismo proceso de ruido blanco, $n(t)$, en sus entradas.]

7–30 En la mayoría de las aplicaciones, los sistemas de comunicaciones se diseñan para tener una BER de 10^{-5} o menor. Encuentre la mínima E_b/N_0 en decibeles requeridos para lograr una tasa de error de 10^{-5} para los siguientes tipos de señalización:
(a) Banda base polar.
(b) OOK.
(c) BPSK.
(d) FSK.
(e) DPSK.

★ **7–31** Se transmiten datos digitales sobre un canal de línea telefónica. Suponga que ésta se ecualiza sobre una banda de 300 a 2,700 Hz y que la razón señal a ruido gaussiano (de potencia) a la salida (terminal de recepción) es de 25 dB.
(a) De todas las técnicas de señalización estudiadas en este capítulo, escoja aquella que proporcionará la tasa de bit más grande para una P_e de 10^{-5}. ¿Cuál es la tasa de bit R para este sistema?
(b) Compare este resultado con la tasa de bit R que es posible cuando se usa una técnica de señalización digital ideal, como se obtiene de la capacidad en el canal de Shannon establecida por la ecuación (1–10).

★ **7–32** Una señal analógica en banda base tiene una PDF uniforme y un ancho de banda de 3,500 Hz. Esta señal se muestrea a una velocidad de 8 muestras/s, uniformemente cuantificada y codificada en una señal PCM que cuenta con palabras de 8 bits. Esta señal PCM se transmite a través de un sistema de comunicaciones de DPSK que posee ruido blanco aditivo gaussiano en el canal. La razón señal a ruido a la entrada del receptor es de 8 dB.
(a) Encuentre la P_e de la señal PCM recuperada.
(b) Halle la razón señal pico a ruido promedio (en decibeles) a la salida del sistema de PCM.

7–33 Una señal de espectro ensanchado (SS) a menudo se usa para combatir la interferencia de banda estrecha y para la seguridad en la comunicación. La señal SS con ensanchado de secuencia directa es (consulte la sección 5–13)

$$s(t) = A_c c(t)\, m(t)\, \cos(\omega_c t + \theta_c)$$

donde θ_c es la fase de inicialización de portadora, $m(t)$ la modulación polar binaria en banda base de los datos y $c(t)$ una forma de onda de ensanchado polar en banda base que generalmente consiste en código de seudoruido (PN). El código de PN es una secuencia binaria de N bits de largo. Los "bits" se llaman *chips*, ya que no contienen datos y debido a que se transmiten muchos chips durante el tiempo que se toma en transmitir 1 bit de datos [en $m(t)$]. La misma palabra código de N bits se repite una y otra vez, pero N es un número grande, así que la secuencia de chips en $c(t)$ se asemeja a un ruido digital. La secuencia de PN puede generarse con un registro de corrimiento de r etapas sincronizado y que cuenta con retroalimentación de tal forma que $N = 2^r - 1$. La autocorrelación de una secuencia larga es aproximadamente

$$R_c(\tau) = \Lambda\left(\frac{\tau}{T_c}\right)$$

donde T_c es la duración de un chip (el tiempo que se toma en enviar un chip del código de PN). $T_c \ll T_b$, donde T_b es la duración de un bit de datos.
(a) Encuentre la PSD para la señal SS $s(t)$. [*Sugerencia:* suponga que $m(t)$, $c(t)$ y θ_c son independientes. Además, note que la PSD de $m(t)$ puede aproximarse mediante una función delta, ya que el ancho espectral de $m(t)$ es muy pequeño comparado con el de la forma de onda de ensanchado $c(t)$.]
(b) Dibuje un diagrama de bloques para un receptor coherente óptimo. Note que $c(t)m(t)$ primero se detecta coherentemente y después los datos, $m(t)$, se recuperan utilizando un procesador de correlación.
(c) Halle la expresión para P_e.

★ **7–34** Examine el rendimiento de un sistema de comunicaciones de AM donde el receptor utiliza un detector de producto. Para el caso de una señal moduladora de onda senoidal, grafique la razón de $[(S/N)_{\text{salida}}/(S/N)_{\text{entrada}}]$ como una función del porcentaje de modulación.

★ **7–35** Un transmisor de AM se modula a 40□ mediante un tono de prueba de audio de onda senoidal. Esta señal se transmite a través de un canal con ruido blanco aditivo gaussiano. Evalúe el rendimiento del ruido para este sistema y determine por cuántos decibeles es inferior a un sistema de DSB−SC.

7–36 En la figura P7−36 se muestra un receptor del tipo de puesta en fase para señales SSB (este fue el tema del problema 5−18).
(a) Muestre si este receptor es o no un sistema lineal.
(b) Derive la ecuación para la SNR a la salida de este receptor cuando la entrada es una señal SSB con ruido blanco con una PSD de $N_0/2$.

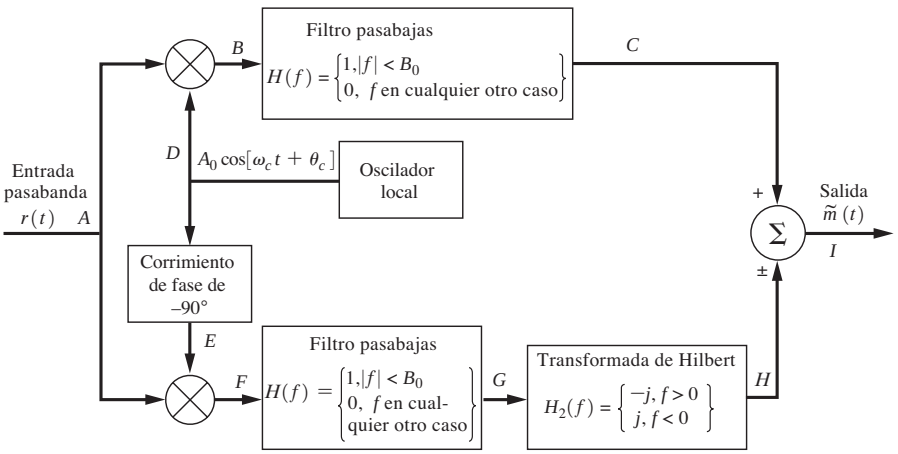


Figura P7–36

7–37 Remitiéndose a la figura P7−36, suponga que el receptor sólo consiste en la parte superior de la figura, de tal forma que el punto C es la salida. Sea la entrada una señal SSB con ruido blanco con una PSD de $N_0/2$. Encuentre $(S/N)_{\text{salida}}$.

7–38 Considere el receptor que se muestra en la figura P7−38. Sea la entrada una señal DSB−SC con ruido blanco con una PSD de $N_0/2$. La media de la modulación es igual a cero.
(a) Para una A_0 grande, muestre que este receptor actúa como un detector de producto.
(b) Encuentre la ecuación para $(S/N)_{\text{salida}}$ como una función de A_c, $\overline{m^2}$, N_0, A_0 y B_T cuando A_0 es grande.

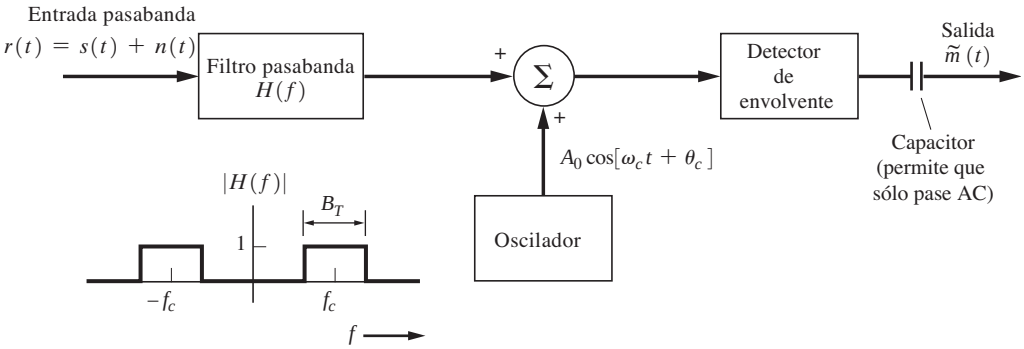


Figura P7–38

7–39 Compare el rendimiento de sistemas de AM, DSB−SC y SSB cuando la señal moduladora $m(t)$ es un proceso gaussiano aleatorio. Suponga que la modulación gaussiana tiene una media de cero y que el valor pico de $V_p = 1$, donde $V_p \approx 4\sigma_m$. Compare el rendimiento del ruido para estos tres sistemas graficando $(S/N)_{\text{salida}}/(S/N)_{\text{banda base}}$ para
(a) El sistema de AM.
(b) El sistema de DSB−SC.
(c) El sistema de SSB.

7–40 Si se comparan sistemas lineales de modulación con base en una potencia *pico* igual (es decir, todas tienen valores iguales de señal pico), muestre que
(a) La SSB tiene una $(S/N)_{\text{salida}}$ que es 3 dB mejor que la DSB.
(b) La SSB tiene una $(S/N)_{\text{salida}}$ que es 9 dB mejor que la AM.
(*Sugerencia:* consulte el problema 5−8).

7–41 Utilizando la ecuación (7−132), grafique la característica de umbral de SNR de salida de un discriminador para los parámetros de un sistema convencional auditivo de TV por FM. ($\Delta F = 25$ kHz y $B = 15$ kHz.) Compare los gráficos de la $(S/N)_{\text{salida}}$ contra $(S/N)_{\text{banda base}}$ para este sistema con los que se muestran en la figura 7−24.

★ **7–42** Un receptor de FM tiene un ancho de banda de IF de 25 kHz y un ancho de banda en banda base de 5 kHz. La figura de ruido del receptor es de 12 dB y emplea una red de deénfasis de 75 μsegundos. Hay una señal FM con ruido blanco a la entrada del receptor, donde la PSD del ruido es $N_0/2 = kT/2$□ $T = 290$ K (consulte la sección 8−6). Encuentre el mínimo nivel de la señal de entrada (en dBm) que resultará en una SNR de 35 dB a la salida cuando se ocupa una modulación de onda senoidal como prueba.

7–43 Consultando la tabla 5−4, note que un sistema de radio móvil bidireccional de FM usa los parámetros $\beta_f = 1$ y $B = 5$ kHz.
(a) Encuentre $(S/N)_{\text{salida}}$ para el caso donde no existe deénfasis.
(b) Halle $(S/N)_{\text{salida}}$ si se utiliza deénfasis con $f_1 = 2.1$ kHz. Se observa que B no es mucho más grande que f_1 en esta aplicación.
(c) Grafique $(S/N)_{\text{salida}}$ contra $(S/N)_{\text{banda base}}$ para este sistema y compare el gráfico con los resultados para la difusión por FM que se muestran en la figura 7−26.

7–44 Compare el rendimiento de dos sistemas de FM que emplean diferentes características de deénfasis. Suponga que $\beta_f = 5$, $\overline{(m/V_p)^2} = \frac{1}{2}$, $B = 15$ kHz y que se ocupa un canal con ruido blanco aditivo gaussiano. Encuentre $(S/N)_{\text{salida}}/(S/N)_{\text{banda base}}$ para:
(a) Deénfasis de 25 μsegundos.
(b) Deénfasis de 75 μsegundos.

7–45 Una señal en banda base $m(t)$ que tiene una distribución gaussiana (amplitud) modula por frecuencia a un transmisor. Suponga que la modulación tiene una media de cero y que el valor pico de $V_p = 4\sigma_m$. La señal FM se transmite a través de un canal con ruido blanco aditivo gaussiano. Sea $\beta_f = 3$ y $B = 15$ kHz. Encuentre $(S/N)_{\text{salida}}/(S/N)_{\text{banda base}}$ cuando
(a) No se usa deénfasis.
(b) Se utiliza deénfasis de 75 μsegundos.

7–46 En la difusión por FM se emplea un filtro de preénfasis a la entrada de audio del transmisor y un filtro de deénfasis a la salida del receptor para mejorar la SNR de salida. Para una énfasis de 75 μsegundos, el ancho de banda a 3 dB del LPF de deénfasis del receptor es $f_1 = 2.1$ kHz. El ancho de banda de audio es $B = 15$ kHz. Defina el factor de mejora I como una función de B/f_1 como

$$I = \frac{(S/N)_{\text{salida}} \text{ para un sistema con preénfasis-deénfasis}}{(S/N)_{\text{salida}} \text{ para un sistema sin preénfasis-deénfasis}}$$

Para $B = 15$ kHz, grafique la mejora en decibeles que se logra como una función del parámetro de diseño f_1, donde 50 Hz $< f_1 <$ 15 kHz.

★ **7–47** En la difusión por FM se ocupa la preénfasis, y sin embargo $\Delta F = 75$ kHz se define como una modulación al 100□. Examine la incompatibilidad de estos dos estándares. Por ejemplo, suponga que la amplitud de un tono de prueba de audio de 1 kHz se ajusta para producir una modulación a 100□ (es decir, $\Delta F = 75$ kHz).

(a) Si la frecuencia se cambia a 15 kHz, encuentre la ΔF que se obtendrá ($f_1 = 2.1$ kHz). □Cuál es el porcentaje de modulación?

(b) Explique por qué este fenómeno no causa mucha dificultad cuando se difunde material de un programa típico de audio (modulación).

7–48 La transmisión de FM en estéreo se estudió en la sección 5–7. En el transmisor, el audio del canal izquierdo, $m_L(t)$, y el audio del canal derecho, $m_R(t)$, se preenfatizan mediante una red de $f_1 = 2.1$ kHz. Estas señales de audio preenfatizadas se convierten después en la señal compuesta moduladora en banda base $m_b(t)$, como se muestra en la figura 5–17. En el receptor, el detector de FM envía como salida a la señal compuesta en banda base que se ha distorsionado a causa de ruido (suponga que el ruido proviene de un canal con ruido blanco gaussiano). Se realiza una demultiplexión de esta señal deformada compuesta en banda base en señales distorsionadas de los canales izquierdo y derecho, $\tilde{m}_L(t)$ y $\tilde{m}_R(t)$, donde cada una se ha deenfatizado mediante un filtro de 2.1 kHz. El ruido en estas salidas proviene del ruido a la salida del detector de FM que ocurre en las bandas de 0 a 15 kHz y de 23 a 53 kHz. La frecuencia de subportadora es de 38 kHz. Suponiendo que la SNR de entrada del receptor de FM es grande, muestre que el sistema de FM en estéreo es 22.2 dB más ruidoso que el de FM monofónico correspondiente.

★ **7–49** Una señal FDM, $m_b(t)$, consiste en cinco canales de 4 kHz de ancho denotados por C1, C2, . . ., C5, como se muestra en la figura P7–49. La señal FDM se obtuvo al modular las cinco señales de audio (cada una de 4 kHz de ancho de banda) en subportadoras de USSB (banda lateral única superior). Esta señal FDM, $m_b(t)$, modula a un transmisor de DSB–SC. La señal DSB–SC se transmite a través de un canal con ruido blanco aditivo gaussiano. En el receptor la potencia promedio de la señal DSB–SC es P_s y el ruido tiene una PSD de $N_0/2$.

(a) Dibuje un diagrama a bloques para un sistema receptor con cinco salidas, una para cada canal de audio.

(b) Calcule la SNR de salida para cada uno de los cinco canales de audio.

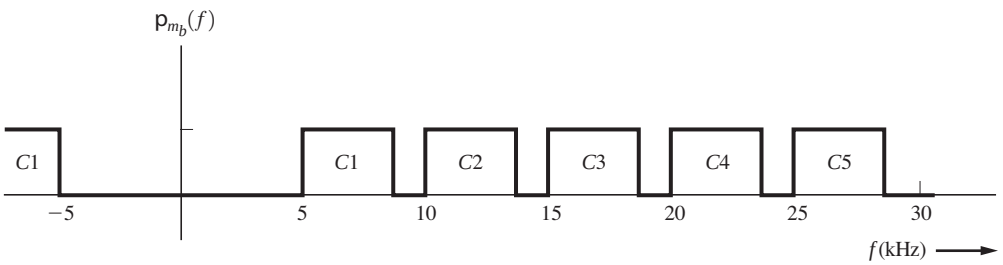


Figura P7–49

7–50 Resuelva el problema 7–49 para cuando la señal FDM se modula por frecuencia con una portadora principal. Suponga que la desviación RMS de la portadora se denota con ΔF_{rms} y que los cinco canales de audio son independientes. No se usa deénfasis.

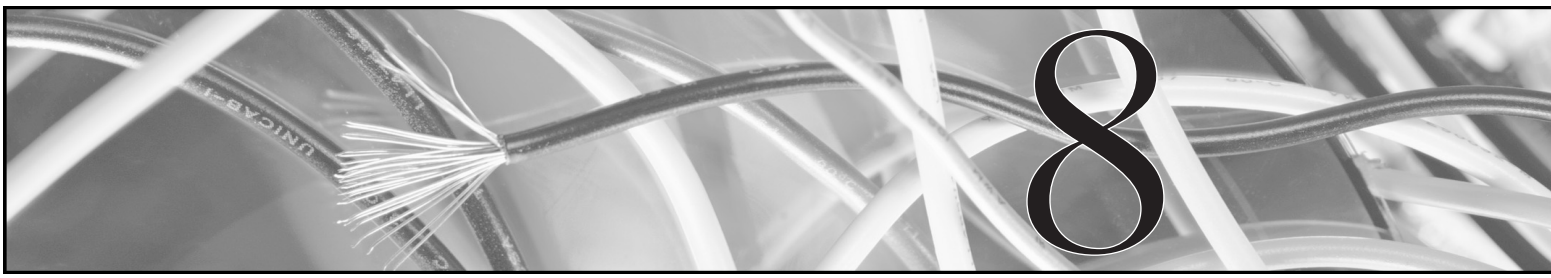
7–51 En relación con la figura 7–27 y

(a) Verifique que la curva de PCM es correcta.

(b) Encuentre la ecuación para la curva de PCM para el caso de una señalización por QPSK a través del canal.

(c) Compare el rendimiento del sistema de PCM/QPSK con el de PCM/BPSK y para el caso ideal mediante un diagrama de la característica $(S/N)_{\text{salida}}$.

Capítulo



8

SISTEMAS DE COMUNICACIONES ALÁMBRICOS E INALÁMBRICOS

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Sistemas telefónicos, líneas de suscriptor digital, módems DSL y enlaces de fibra óptica
- Sistemas de comunicaciones vía satélite y radio vía satélite
- Análisis y diseño del balance de un enlace
- Sistemas de comunicaciones celulares y personales
- Televisión digital y analógica
- Módems para datos por cable
- Redes inalámbricas de datos

8–1 EL DESARROLLO EXPLOSIVO DE LAS TELECOMUNICACIONES

La necesidad para la comunicación personal de voz, video y datos, y de la disponibilidad de circuitos integrados y procesadores baratos impulsó el desarrollo vertiginoso de las telecomunicaciones tanto alámbricas como inalámbricas. Existe un empuje implacable para transmitir datos a más altas velocidades a través de sistemas alámbricos e inalámbricos originado no sólo por el desarrollo de los sistemas tradicionales para voz, video y datos, sino también por la conveniencia que otorgan los teléfonos celulares personales, máquinas de fax, correo electrónico con archivos adjuntos y el uso de Internet.

El objetivo de este capítulo es examinar el diseño de algunos sistemas prácticos de comunicaciones, mismos que se basan en los principios desarrollados en capítulos anteriores. También se verá cómo los diseños modernos han influenciado los estándares de la industria y cómo algunos sistemas sofisticados son la evolución de los sistemas históricos. Este capítulo está planeado para ser "divertido" al lector.

Se presentan resultados para sistemas telefónicos, vía satélite, de fibra óptica, de telefonía celular, sistemas de comunicaciones personal (PCS) y de televisión (incluyendo la TV digital), así

como el análisis del balance de enlace para sistemas inalámbricos. Este último se encarga de que el diseño de un sistema cumpla con una especificación requerida en cuanto a su rendimiento como una función de la transacción entre la potencia transmitida, la ganancia de antena y la figura de ruido del sistema receptor. Esta especificación del rendimiento es la máxima probabilidad de error permitida para los sistemas digitales y la mínima SNR de salida para los analógicos.

8–2 SISTEMAS TELEFÓNICOS

Los sistemas telefónicos modernos han evolucionado a partir de los sistemas telegráficos y telefónicos del siglo XIX. Las compañías telefónicas que proveen servicios para un gran número de usuarios sobre sus *redes telefónicas públicas conmutadas* (PSTN, por sus siglas en inglés) bajo alquiler se conocen como *portadoras comunes*. El término se aplica a muy diversas industrias, como el servicio postal, de aerolíneas, transporte terrestre, telefonía y de datos. El gobierno generalmente regula las portadoras comunes para el bienestar del público y, en algunos países, suministra ciertos servicios de portadora común. La información de múltiples usuarios se transmite a través de dichos sistemas, principalmente mediante multiplexión por división de tiempo (TDM, por sus siglas en inglés) o por paquetes de datos.

Históricamente, los sistemas telefónicos fueron diseñados sólo para reproducir señales de voz con origen distante, pero en la actualidad son muy sofisticados, pues utilizan grandes computadoras digitales en la *oficina central* (CO, por sus siglas en inglés) para conmutar las llamadas y monitorear el rendimiento del sistema. La CO moderna rutea datos de voz TDM PCM, de video y por computadora a terminales remotas y a otras oficinas centrales.

El servicio digital se suministra al cliente de tres maneras: (1) un *circuito dedicado alquilado*, como un circuito T1, que está disponible a toda hora sin la necesidad de marcación o conmutación□(2) un *servicio de circuito conmutado*, que está disponible en una base de marcación, y (3) un *servicio por paquetes conmutados*, como la DSL —que se discute en la sección 8-3— que siempre está "activada" y se usa sólo cuando se intercambian paquetes.

Base histórica

Los sistemas telefónicos modernos han evolucionado a partir del circuito analógico relativamente simple que Alexander Graham Bell inventó en 1876. Este circuito se muestra en la figura 8-1, donde dos aparatos telefónicos se conectan mediante una línea telefónica de par trenzado (es decir, de dos hilos) y están energizados por una batería ubicada en la CO. (Históricamente, la conexión de hilos telefónicos entre dos usuarios se realizaba mediante un operador de panel de conmutación telefónica.) La batería produce una corriente DC alrededor del lazo del hilo telefónico. Un micrófono de carbón se emplea en cada aparato telefónico, y consiste en gránulos de carbón empacado de manera holgada en una caja que posee un lado flexible llamado diafragma. Conforme las ondas de presión de sonido chocan contra el diafragma, los gránulos de carbón se comprimen y descomprimen, lo que crea una resistencia variable que causa la modulación de la corriente DC del lazo. Por lo tanto, se produce una señal de corriente de audio AC, como se muestra en la figura. El auricular del aparato telefónico consta de un electroimán con un diafragma paramagnético colocado dentro del campo magnético. La corriente AC que fluye a través del electroimán provoca que el diafragma del auricular vibre, y esto reproduce el sonido.

El sistema telefónico de dos hilos simple que se muestra en la figura 8-1 posee tres ventajas importantes: (1) es económico□(2) la CO energiza los aparatos vía la línea telefónica, así que no se

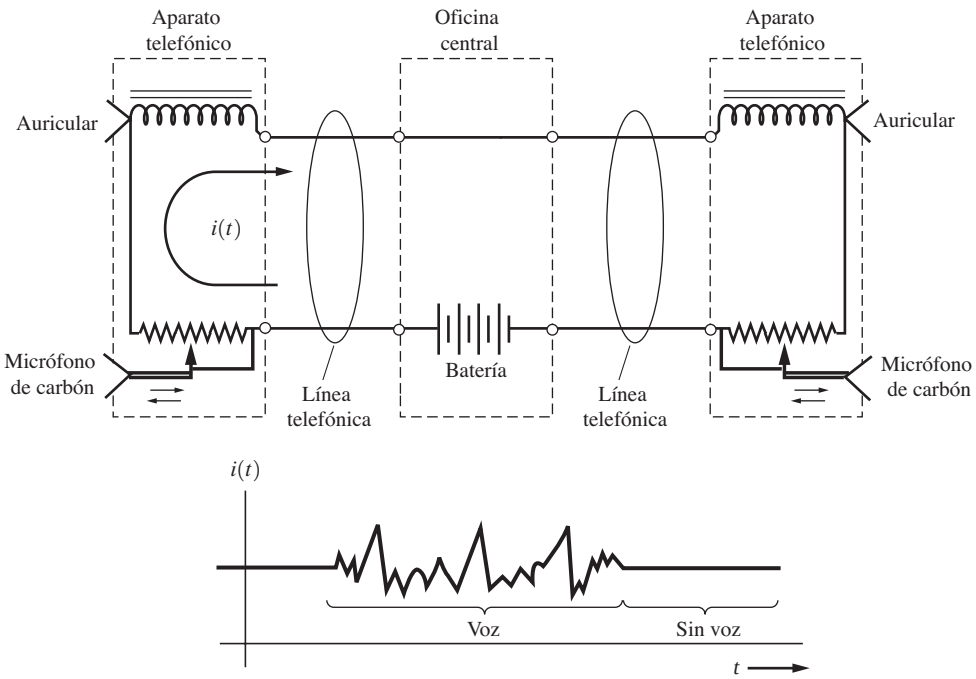


Figura 8–1 Sistema telefónico histórico.

requiere de una fuente de poder en la ubicación del usuario y (3) el circuito es *full duplex*.[1] Este sistema posee una desventaja principal: no se pueden ocupar amplificadores, ya que sólo amplifican la señal en una dirección. En consecuencia, para las conexiones telefónicas distantes, se requiere de una técnica más avanzada, llamada circuito de cuatro hilos. En él, un par (o una fibra óptica) se utiliza para las señales enviadas en la dirección de transmisión y otro para las entrantes en la dirección de recepción.

Sistemas telefónicos modernos y terminales remotas

La figura 8-2 muestra un diagrama simplificado para un sistema analógico de lazo local que se emplea en la actualidad. La oficina local de conmutación conecta a los dos usuarios mediante una conexión cableada entre los dos lazos locales apropiados. Esto es esencialmente una conexión en serie, donde el auricular y el micrófono de carbón de cada aparato se conectan en serie con una batería (ubicada en la planta telefónica). La figura 8-2 ilustra este sistema analógico de lazo local, el cual proporciona un *servicio telefónico simple* (POTS, por sus siglas en inglés). El hilo con voltaje positivo de la CO se conoce como terminal de *punta*, y su color código es *verde*. El hilo con voltaje negativo se conoce como terminal de *anillo* y su color código es *rojo*. Los términos *punta y anillo* vienen de la era cuando se ocupaba un panel de conmutación de enchufe en la CO. Estas terminales se conectaban a un enchufe con contactos de punta y de anillo. Este enchufe es parecido al de un auricular en estéreo que posee contactos de punta, de anillo y de manguito. La terminal de tierra se conectaba al contacto de manguito.

[1] Con circuitos *full-duplex*, ambos usuarios pueden hablar y escuchar simultáneamente con la otra persona.

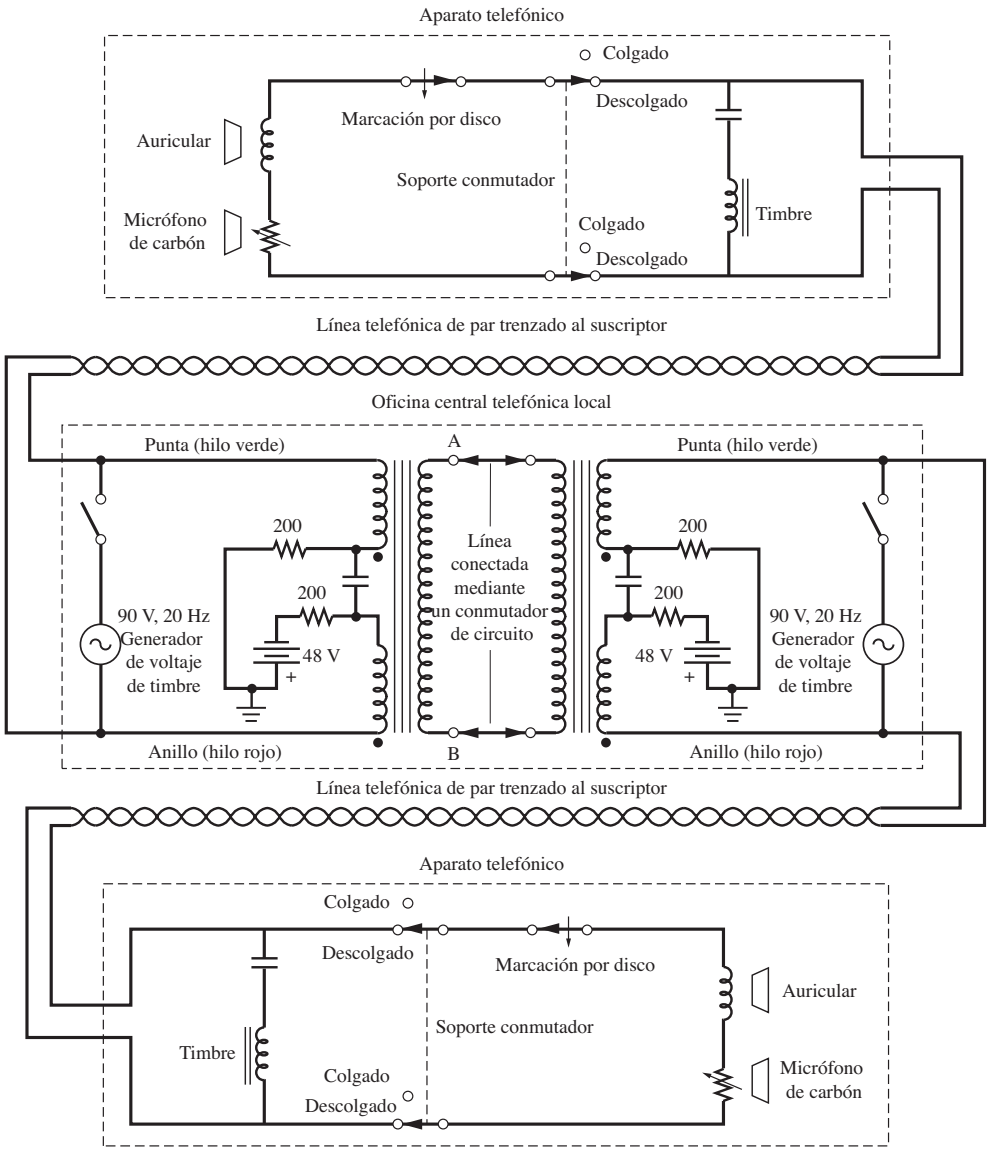


Figura 8–2 Sistema telefónico analógico local (simplificado).

La secuencia de eventos que ocurre cuando se establece una llamada telefónica local se describirá a continuación, con la ayuda de la figura 8-2 y la tabla 8-1. El usuario que originó la llamada, el aparato telefónico superior en la figura 8-2, descuelga el aparato. Esta acción cierra el contacto del soporte conmutador (descolgado) para que así fluya corriente DC a través de la línea telefónica del llamador. La corriente, de alrededor de 40 mA, se reconoce en la CO y causa que ésta envíe una señal de tono de marcación (aproximadamente 400 Hz) en la línea del usuario llamador. Este marca

TABLA 8–1 ESTÁNDARES TELEFÓNICOS PARA EL LAZO DE SUSCRIPTOR

Elemento	Estándar
Colgado (estado en reposo)	Circuito de línea abierta, mínima resistencia de DC de 30 kΩ
Descolgado (estado en ocupado)	Circuito de línea cerrada, máxima resistencia de DC de 200 Ω
Voltaje de batería	48 V
Corriente de operación	20–80 mA, 40 mA típicamente
Resistencia de lazo de suscriptor	0–1300Ω, 3600Ω (máx)
Pérdida de lazo	8 dB (típicamente), 17 dB (máx)
Voltaje de timbre	90 V RMS, 20 Hz (típicamente) (generalmente pulsado mediante 2 s encendido y 4 s apagado)
Número de equivalencia de timbre (REN)[a]	0.2 REN (mínimo), 5.0 REN (máximo)
Marcación por pulsos	Lazo de circuito abierto momentáneo
Velocidad de pulsación	10 pulsos/segundo ±10□
Ciclo de trabajo	58-64□ abierto
Tiempo entre dígitos	600 ms como mínimo
Código de pulso	1 pulso = 1, 2 pulsos = 2, . . . , 10 pulsos = 0
Marcación por tonos[b]	Utiliza dos tonos: uno de baja frecuencia y otro de alta frecuencia, para especificar cada dígito:

	Tono alto (Hz)		
Tono bajo	**1209**	**1336**	**1477**
697 Hz	1	2	3
770	4	5	6
852	7	8	9
941	*	0	#

Nivel de cada tono	−6 a −4 dBm
Máxima diferencia entre niveles	4 dB
Máximo nivel (par)	+2 dBm
Tolerancia de frecuencia	±1.5□
Ancho de pulso	50 ms
Tiempo entre dígitos	45 ms como mínimo
Tono de marcación	350 más 440 Hz
Señal de ocupado	480 más 620 Hz, con 60 interrupciones por minuto
Tono de señal de timbre	440 más 480 Hz, 2 s encendido, 4 s apagado
Identificador de llamada[c]	Señal FSK de 1.2 kbit/s entre el primero y segundo timbres (estándar del módem Bell 202)[d]

[a] Indica la carga de impedancia causada por el timbre telefónico. Un REN de 1.0 equivale a 8 kΩ, 0.2 REN equivale a 40 kΩ y 5.0 REN equivalen a 1.6 kΩ.

[b] El término *touch tone* que se usa para la marcación por tonos era una marca registrada de AT□T. También se conoce como señalización por *frecuencia múltiple de tono dual* (DTMF, por sus siglas en inglés).

[c] También se proponen otros servicios de presentación [Schwartz, 1993].

[d] [Lancaster, 1991].

el número con una marcación por pulsos o por tonos. Si utiliza la primera, la corriente de línea DC se interrumpe un número de veces igual al dígito marcado (a una velocidad de 10 pulsos/s). Por ejemplo, existen cinco interrupciones de la corriente de línea cuando se marca el número 5. Cuando se recibe la secuencia completa para el llamador, la CO coloca el generador de timbre (90 V RMS, 20 Hz, 2 s encendido, 4 s apagado) en la línea que corresponde al número marcado. Esto timbra el teléfono. Cuando quien recibe la llamada contesta, la corriente DC fluye en esa línea para enviar una señal a la CO para que ésta desconecte al generador de timbre y conecte a los dos usuarios vía el conmutador de circuito de la CO. En este momento fluye corriente directa en las líneas tanto del llamador como del contestador, y existe una conexión entre ambos a través de un acoplamiento de transformador,[2] como se muestra en la figura 8-2. Cuando alguna de las personas habla, las vibraciones de sonido causan que la resistencia del elemento del micrófono de carbón cambie en sincronización con las vibraciones de tal forma que la corriente de línea DC se modula (varía). Esto produce la señal de audio de AC que se acopla al auricular del teléfono del otro usuario. Note que ambos usuarios pueden hablar y escuchar simultáneamente al otro. Esta es una operación *full-duplex*.

En los aparatos telefónicos modernos, el elemento de carbón del micrófono se reemplaza con un electreto o un elemento de micrófono dinámico y se energiza un amplificador de IC asociado mediante el voltaje de la batería de la CO, pero el principio de la operación es el mismo que el descrito anteriormente.

El sistema telefónico presentado en la figura 8-2 es satisfactorio siempre y cuando la resistencia de los lazos de par trenzado sea de 1,300 Ω o menor. Esto limita la distancia a la que se pueden ubicar los teléfonos entre ellos y la CO a alrededor de 15,000 pies para hilos de calibre 26, 24,000 pies para un calibre 24, y 38,000 pies o casi 7 millas si se emplea hilo de par trenzado de calibre 22. Históricamente se usó hilo de calibre 19 en áreas rurales para que los teléfonos pudieran ubicarse hasta a 20 millas de la CO sin terminales remotas (RT, por sus siglas en inglés).

El suministro de un par de hilos dedicado desde cada suscriptor hasta la CO es muy caro. En las aplicaciones donde se agrupa un gran número de suscriptores a cierta distancia de la CO, los costos pueden reducirse sustancialmente con *terminales remotas* (vea la figura 8-3). Éstas permiten que los teléfonos se ubiquen a cualquier distancia de la CO, como se describirá más adelante.

El circuito para una RT típica se ilustra en la figura 8-4. La tarjeta de línea de POTS suministra el voltaje de batería y la corriente de timbre al teléfono del suscriptor. El *circuito de dos hilos* que porta las señales de VF duplex hacia y desde el suscriptor se convierte a un *circuito de cuatro hilos* que porta dos señales unidireccionales (simplex) de transmisión y recepción mediante un circuito *híbrido*, que es un circuito de trasformador balanceado (o su circuito electrónico equivalente) que proporciona un aislamiento para las señales de transmisión y recepción. Como se muestra en la figura 8-4b, el circuito híbrido actúa como puente de Wheatstone balanceado donde $Z_1/Z_3 = Z_2/Z_4$. Por lo tanto, el voltaje en la línea de recepción (que se muestra a la derecha inferior de la figura 8-4b) se balancea y no aparece en la línea de transmisión (derecha superior). En consecuencia, esto previene autooscilación (retroalimentación de timbre), aun cuando todavía puede existir algún acoplamiento de la señal transmitida amplificada con la línea de recepción a la terminal distante de la línea de cuatro hilos o un acoplamiento de la línea de transmisión a la de recepción a lo largo de la trayectoria de cuatro hilos. Como se muestra en la figura 8-4a, la señal de VF de transmisión se convierte a una señal DS-0 PCM, en la cual se hace una multiplexión por división de tiempo con las señales PCM de los otros suscriptores conectados a la RT. La señal TDM se envía sobre un enlace

[2] Los transformadores se conocen como *bobinas de repetición* en el ámbito de la telefonía.

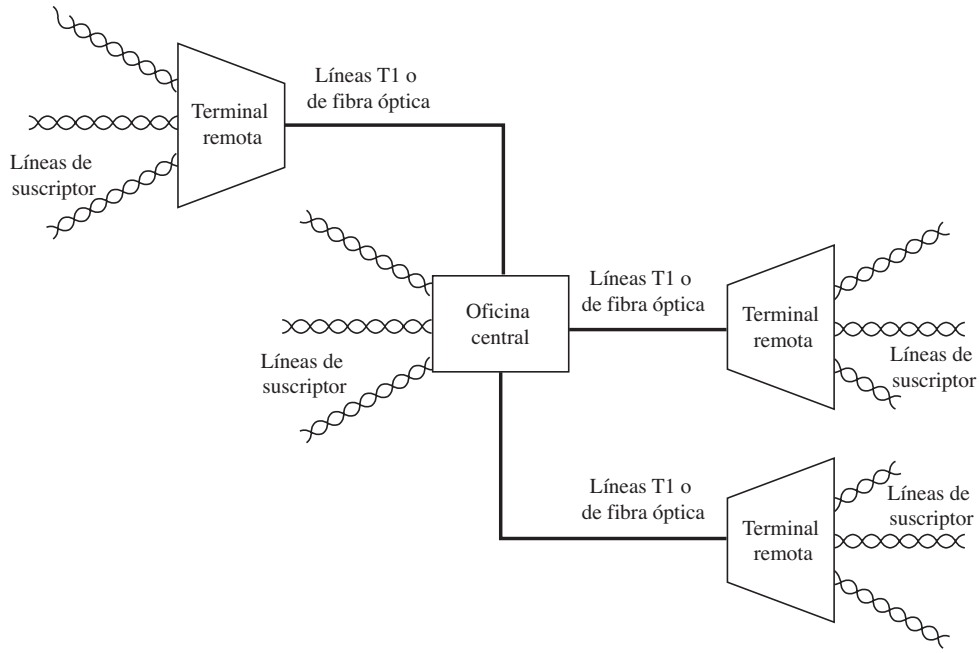
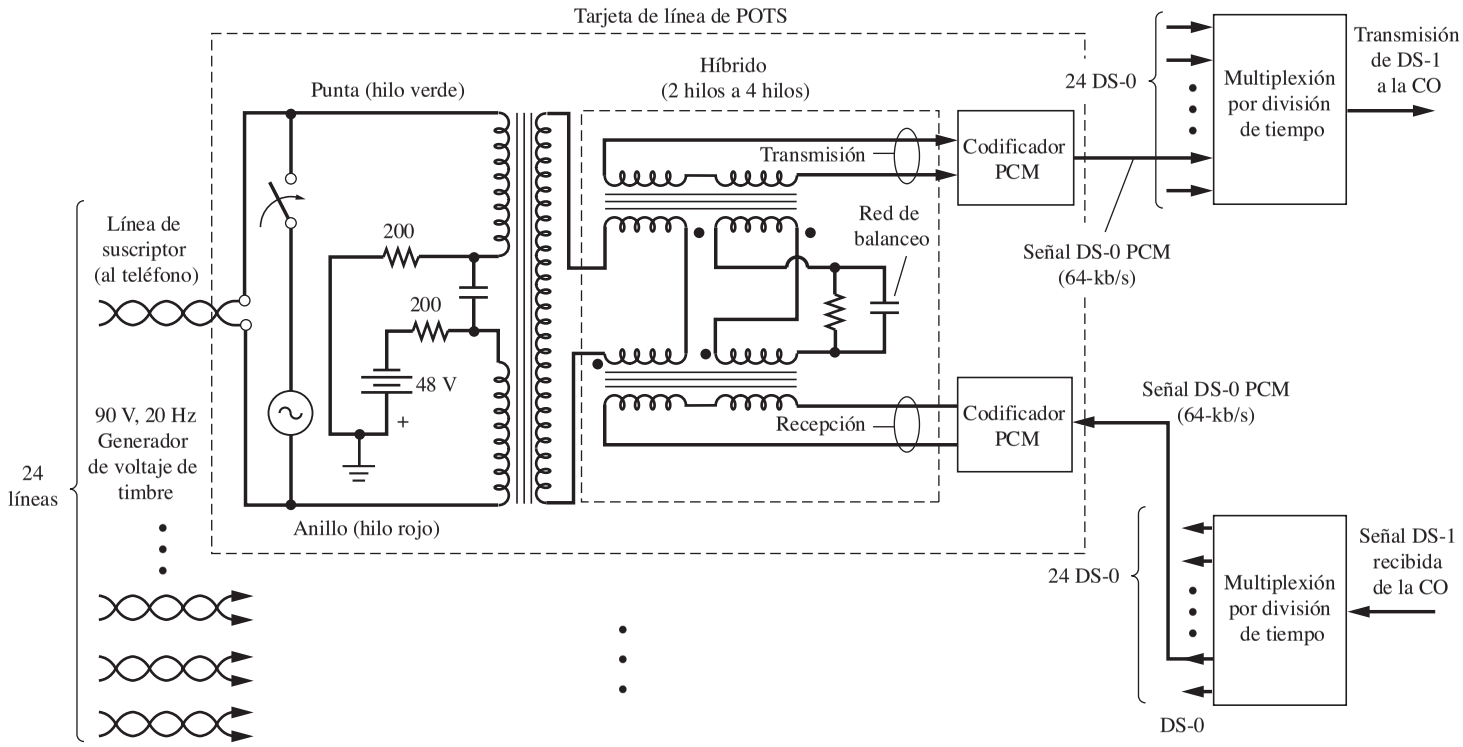


Figura 8–3 Sistema telefónico con terminales remotas.

DS-1 a la CO. De manera similar, se hace una demultiplexión de la señal DS-1 recibida de la CO y se decodifica para obtener el audio de VF recibido para el suscriptor. En un sistema de RT popular fabricado por AT□T llamado SLC-96, se digitalizan 96 líneas de suscriptor de VF y se hace una multiplexión de ellas en cuatro líneas T1, y una de éstas adicional está en reserva en caso de que alguna de las otras falle [Chapman, 1984]. Del capítulo 3 puede recordar que una línea T1 requiere dos pares trenzados (uno para los datos de transmisión y otro para los de recepción) y que cada línea T1 (1.544 Mb/s) porta el equivalente a 24 señales de VF.

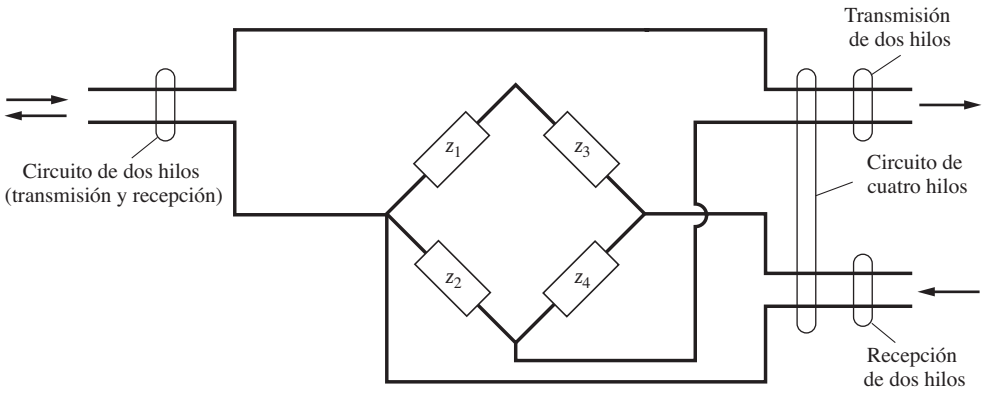
A continuación se comparan los requisitos de par trenzado para sistemas con y sin RT. Si no se utilizan RT se requerirán 96 pares a la CO para 96 suscriptores, pero si se emplea una SLC-96 RT, sólo se requieren de 10 pares (5 líneas T1) a la CO. Esto proporciona un ahorro en pares (también conocido como ganancia de par) de 9.6 a 1. Aún más, la RT puede ubicarse a cualquier distancia de la CO (no existe el límite de 1,300 Ω) porque los pares se ocupan para una señalización DS-1 con repetidores separados casi cada milla. Por supuesto que pueden también usarse líneas de fibra óptica para conectar la RT a la CO. Por ejemplo, si se utilizan dos líneas de fibra óptica de 560 Mb/s (una para los datos enviados en cada dirección), esto tendrá una capacidad de 8064 canales de VF para la señalización DS-5. (Consulte la tabla 3-8 y la figura 3-40). Por lo tanto, una RT con un enlace de fibra óptica de 560 Mb/s a la CO podrá servir a 8 064 suscriptores. Aún más, en la sección 8-7 se observará que no se requerirán repetidores ópticos si la RT se ubica dentro de 35 millas (típicamente) de la CO.

Las compañías telefónicas han reemplazado sus conmutadores analógicos a la CO con conmutadores digitales. Históricamente se empleó un conmutador analógico de circuito en la CO para conectar los pares de hilos del llamador y el contestador (como se muestra en la figura 8-2). Estos



(a) Tarjeta de línea de POTS en una RT.

Figura 8–4 (a) (*continuación*).



(b) Modelo de puente de Wheatstone balanceado para un circuito híbrido

Figure 8–4 (b) Terminal remota (RT).

conmutadores se controlaban mediante una lógica cableada de difusión. En la actualidad las oficinas de telefonía ocupan *sistemas de conmutación electrónicos* (ESS, por sus siglas en inglés). Con ESS, una computadora digital controla la operación de conmutación con dirección del software llamado *control de programa almacenado*. Aún más, los conmutadores ESS modernos usan *conmutación digital* en lugar de *conmutación analógica*. Ejemplos de estos nuevos conmutadores son el ESS núm. 5 de AT□T y los conmutadores DMS-100 de Northern Telcom. En una CO digitalmente conmutada, la señal de VF del cliente se convierte a PCM y se hace una multiplexión por división de tiempo con otras señales PCM a una línea digital de alta velocidad. (Cuando se utilizan RT, la conversión de la señal de VF a PCM se lleva a cabo en la RT.) La CO digital conmuta una llamada colocando los datos PCM del llamador a una ranura de tiempo de TDM que se ha asignado para el usuario destino (contestador). A esto se le conoce como *intercambio de ranura de tiempo* (TSI, por sus siglas en inglés). El conmutador digital es menos costoso con base en cada cliente que el conmutador analógico (para un gran número de clientes), y éste permite la conmutación de datos y de video digitalizado, así como audio PCM.

Para llamadas por cobro, la CO local ocupa líneas de enlace que se conectan a una CO distante. Se soportan múltiples llamadas con TDM o paquetes. Una CO digital local actúa casi como una RT conectada a una CO distante. Es interesante que los enlaces de larga distancia representen menos de 5□ del costo total de la red telefónica□la mayoría del costo proviene del equipo de conmutación.

8–3 LÍNEAS DE SUSCRIPTOR DIGITAL (DSL)

□Cómo puede suministrarse económicamente un servicio de datos y video de alta velocidad mediante tecnología alámbrica? Los datos de alta velocidad pueden transportarse fácilmente de la CO a la RT vía cables de fibra óptica. El problema es en el transporte de los datos del cliente sobre la "última milla". Generalmente no es económico instalar una línea dedicada de fibra o coaxial desde la RT directamente a cada cliente. Sin embargo, en la mayoría de los casos ya existen líneas de par trenzado instaladas y líneas cortas de, por ejemplo, hasta 1,500 pies que poseen anchos de banda útiles tan grandes como 30 MHz. En las aplicaciones convencionales, las tarjetas de línea de POTS en la RT restringen el ancho de banda al rango de VF de 3.3 kHz. Esto limita la velocidad de datos a cerca de

50 kb/s para una SNR de 50 dB (módem V.90). Sin embargo, peor aún, la línea puede tener una SNR más baja, así que el módem de VF típicamente se reduce a una velocidad de operación de cerca de 24 kb/s en la práctica (como se demostró en el ejemplo SA1-3). Sin embargo, las tarjetas de *línea de suscriptor digital* (DSL) pueden usarse en la RT para tomar ventaja del ancho de banda ancho de líneas de par trenzado cortas para la "última milla" y proporcionar velocidades de datos del orden de 6 Mb/s. Existen muchos métodos para DSL, así que esta familia de métodos se denotará mediante la nomenclatura xDSL. Todas utilizan uno o dos pares trenzados para servir al cliente en la "última milla" desde una RT.

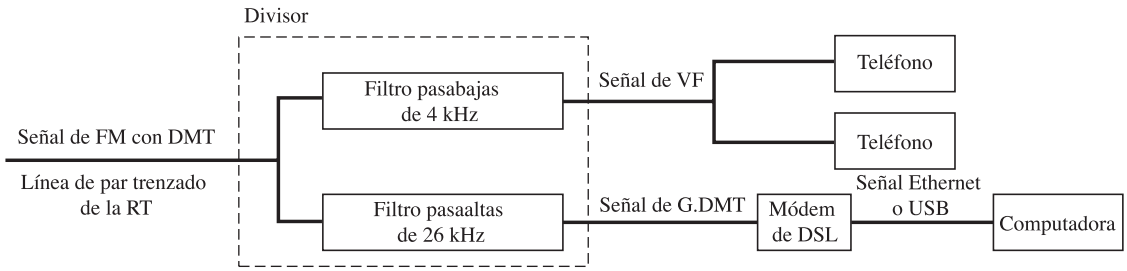
1. *HDSL* (*línea de suscriptor digital de alta velocidad de bit*, de sus siglas en inglés) utiliza dos pares trenzados (uno para transmisión y otro para recepción) para soportar 1.544 Mb/s en *full duplex* a lo largo de una distancia de hasta 12,000 pies desde la RT. Ésta emplea un código de línea 2B1Q de ISDN (que se describe más adelante) o una versión de portadora suprimida de QAM llamada *fase de amplitud sin portadora* (CAP, por sus siglas en inglés).
2. *SDSL* (*línea de suscriptor digital simétrica*, de sus siglas en inglés) es una versión de un par de HDSL que proporciona *full duplex* para soportar 768 kb/s en cada dirección con un híbrido o un cancelador de eco para separar los datos transmitidos de los recibidos.
3. *ADSL* (*línea de suscriptor digital asimétrica*, de sus siglas en inglés) ocupa un par trenzado para soportar 6 Mb/s enviados al cliente y 640 kb/s enviados por éste sobre una distancia de hasta 12,000 pies. El espectro de ADSL está por encima de 25 kHz. La banda por debajo de 4 kHz se usa para una señal de POTS de VF. Dos variaciones de ADSL, llamadas G.DMT y G.Lite, se discutirán en la siguiente sección.
4. *VDSL* (*línea de suscriptor digital de muy alta velocidad de bit*, de sus siglas en inglés) utiliza un par de hilos para soportar 25 Mb/s de bajada para distancias de hasta 3,000 pies desde la RT o 51 Mb/s de bajada para distancias de hasta 1,000 pies de la RT. Puede soportar hasta 3.2 Mb/s de subida.
5. *ISDN* (*red digital de servicios integrados*, de sus siglas en inglés) emplea una línea de par trenzado para suministrar una velocidad de datos al suscriptor de hasta 144 kb/s en cada dirección para distancias de hasta 18,000 pies desde la RT. Esta tecnología ha estado disponible desde 1990 y ha sido popular en Europa y Japón, pero no en Estados Unidos. En una sección posterior se discutirán más detalles acerca de la ISDN.

Líneas de suscriptor digital G.DMT y G.Lite

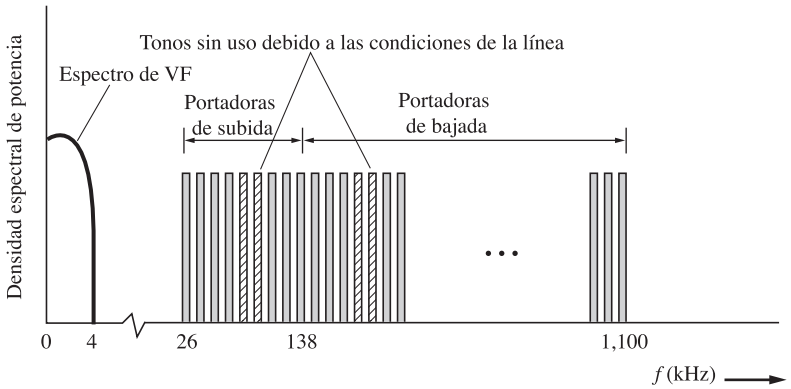
G.DMT y G.Lite ocupan tecnología ADSL "siempre activa" (paquetes) con un espectro por encima de la banda de voz de 4 kHz. Esto permite que una señal de VF de POTS pueda soportarse con la señal de datos en una sola línea de par trenzado.

Como se muestra en la figura 8-5a, G.DMT usa un divisor para que los aparatos telefónicos no causen un "cortocircuito" en la señal de datos y viceversa, y una modulación multitono discreta (DMT, por sus siglas en inglés) con hasta 256 portadoras y hasta 15 bits de datos, 32,768 QAM, modulados en cada portadora.[3] Esto proporciona una máxima tasa de datos de 6.1 Mb/s de bajada y 640 kb/s de subida para una longitud de línea de hasta 12,000 pies. Como se muestra en la figura 8-5b, el espacio entre portadoras DMT es de 4.3125 kHz. Los datos de subida están sobre portadoras en la banda de 26-138 kHz y las portadoras de bajada se colocan en la banda de 138-1,100 kHz.

[3] DMT es la multiplexión por división de frecuencia ortogonal (OFDM), y se describió en la sección 5-12.



(a) Equipo de instalación de suscriptor (CPE, por sus siglas en inglés)



(b) Espectro de VF con DMT

Figura 8–5 Línea de suscriptor digital G.DMT.

En una implementación alterna, las portadoras tanto de subida como de bajada se colocan en la banda de 26-1,100 kHz, y un híbrido (o cancelador de eco) se utiliza para separarlas. DMT tiene la ventaja de permitir que la modulación se configure para soportar las características de transmisión y de ruido de una línea en particular. Es decir, las portadoras se remueven a frecuencias donde existen nulos en la respuesta de frecuencia de la línea causada por reflexión y a frecuencias donde el ruido es grande. Esto permite alcanzar una BER de 10^{-7} a la velocidad de datos que la línea puede soportar.

G.Lite no utiliza un divisor (el teléfono y los hilos de datos se cablean directamente en paralelo). Esto tiene la ventaja de no requerir una instalación de un divisor para la TELCO, pero la desventaja de que teléfonos viejos descarguen (hagan un cortocircuito) la señal de datos y de tener nulos en la transmisión en el espectro causados por las reflexiones de las tomas de puente de la línea telefónica (es decir, teléfonos de extensión). En consecuencia, G.Lite puede no funcionar para algunos clientes a menos que los teléfonos problemáticos se reemplacen o se instale un divisor. G.Lite emplea menos portadoras que G.DMT para evitar los impedimentos espectrales a las altas frecuencias. G.Lite tiene una velocidad de datos de 1.5 Mb/s de bajada y 512 kb/s de subida sobre una línea de 18,000 pies. Ocupa también 128 portadoras DMT con hasta 8 bits, 256 QAM, modulados en cada portadora.

G.DMT y G.Lite pueden resolver el problema de cómo suministrar acceso a Internet de alta velocidad y económico. G.DMT se describe en el estándar de ANSI T.413 y el documento de ITU G.992.1□G.Lite se describe en el documento de ITU G.992.2.

Video sobre demanda (VOD)

La tecnología de VDSL permitirá a las compañías telefónicas (TELCO) suministrar un tipo de TV por cable de servicio de programa al consumidor usando líneas de par trenzado. Una señal de HDTV (TV de alta definición) requiere de una velocidad de datos de 20 Mb/s para video comprimido, y la SDTV (TV de definición estándar) puede suministrarse con una velocidad de datos de 6 Mb/s (consulte la sección 8-9 sobre TV digital para más detalles). Con el VOD, el suscriptor selecciona el programa deseado con un módulo de conexión (STB, por sus siglas en inglés). La TELCO entonces envía los datos para el programa seleccionado al usuario mediante VDSL, y el STB convierte los datos a la señal de video que se presenta en el aparato televisor. También pueden suministrarse películas nuevas y otros programas de pago por evento. El suscriptor de VOD puede tener acceso a un número casi ilimitado de canales de TV (un canal a la vez) y otros servicios de video.

Red digital de servicios integrados (ISDN)

La *red digital de servicios integrados* (ISDN) utiliza una DSL para suministrar datos digitales (sin señal de VF) al suscriptor. El suscriptor de ISDN puede hacer una demultiplexión de los datos para proporcionar cualquiera de las siguientes aplicaciones simultáneamente: (1) decodificar datos para producir señales de VF para aparatos telefónicos, (2) decodificar datos para una presentación de video o (3) procesar datos para aplicaciones de telemetría o PC.

Existen dos categorías de ISDN: (1) ISDN de *banda estrecha* o "*velocidad básica*", denotada por N-ISDN, y (2) ISDN de *banda amplia*, o "*velocidad primaria*", denotada por B-ISDN, que tiene una velocidad agregada de datos de 1.536 Mb/s (aproximadamente la misma velocidad que para las líneas T1), y consiste en 23 canales B (64 kb/s cada uno) y un canal D (64 kb/s). Los canales B portan datos del usuario, los cuales pueden ser PCM para video o audio codificado. El canal D se emplea como señalización para establecer y desconectar llamadas, o rutear datos para los 23 canales B.

La implementación estándar de la N-ISDN se muestra en la figura 8-6□su suscriptor se conecta a la RT de la compañía telefónica mediante líneas telefónicas de par trenzado. Para su servicio, la línea no debe ser más larga que 18 kft (3.4 millas) para la velocidad agregada de datos de 160 kb/s de la N-ISDN (si el suscriptor se ubica dentro de 18 kft de la CO, entonces una RT no será necesaria). La velocidad de datos disponible al suscriptor de N-ISDN es de 144 kb/s, la cual consiste en datos divididos en dos canales B de 64 kb/s cada uno y un canal D de 16 kb/s. Además de los datos 2B + D, la compañía telefónica agrega 12 kb/s para los cuadros/sincronización más 4 kb/s para gastos generales para soportar operaciones de red. Esto proporciona una velocidad de datos general de 160 kb/s en la DSL en ambas direcciones de transmisión y dirección (simultáneamente) para una operación *full duplex*. La DSL se termina a la terminal del suscriptor en la interfaz U, como se muestra en la figura 8-6. La NT1 (terminación de red) incorpora un circuito híbrido para convertir la interfaz U de dos hilos a una interfaz T de cuatro hilos que tiene dos buses de dos hilos, uno para la transmisión y otro para la recepción de señales de datos. La NT1 es un transreceptor esclavo que deriva sus señales de sincronización de la señal DSL que se transmite desde la RT□pasa los datos 2B + D entre las interfases U y T, y también procesa bits adicionales que aparecen en las líneas de transmisión y recepción en la interfaz T. Los bits adicionales se requieren para el direccionamiento, control y supervisión de equipo de terminal. La velocidad de datos en cada línea T de transmisión y recepción es de 192 kb/s. Se puede o no requerir de la NT2□cuando se ocupa, proporciona los protocolos de un nivel más alto apropiados para un controlador de grupo de terminales o para un nodo de acceso a una red de área local (LAN, por sus siglas en inglés). Si no se usa, la interfaz NT1 de cuatro hilos se convierte a la interfaz S/T. Las interfases S y T son eléctricamente idénticas y utilizan

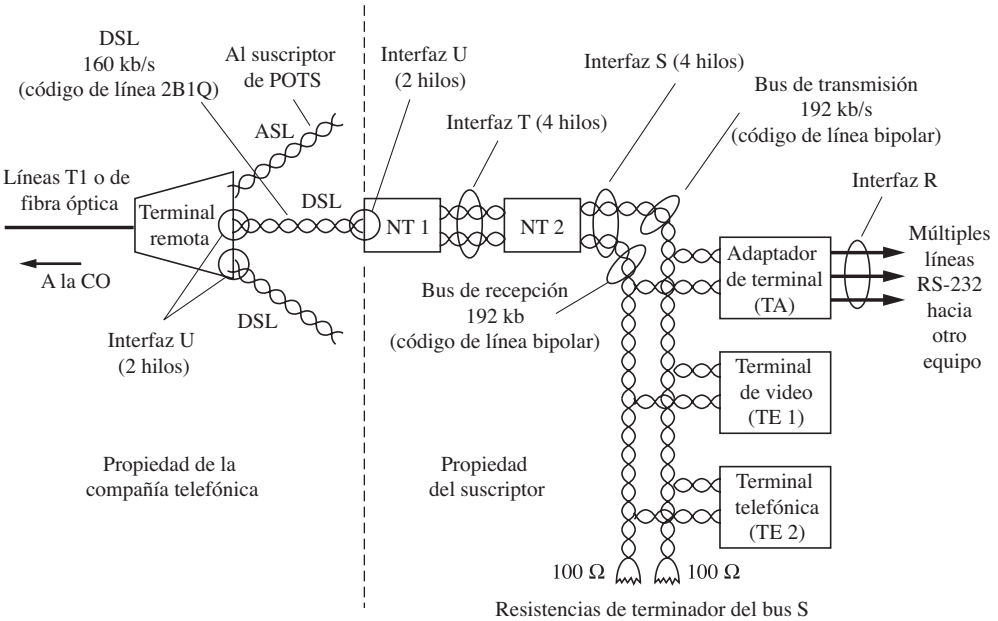


Figura 8–6 Sistema N-ISDN con equipo de suscriptor conectado.

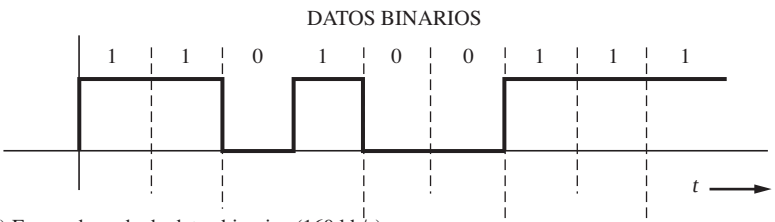
un conector modular RJ-45 de 8 terminales. El bus de interfaz S/T suministra el medio de conexión para las terminales ISDN (video, audio y datos) o un adaptador de terminal (TA, por sus siglas en inglés). Hasta ocho terminales pueden puentearse dentro del bus S/T. El TA permite que terminales no ISDN con puertos RS-232 se empleen en la red ISDN. Por ejemplo, se puede conectar una computadora personal (PC) a la red N-ISDN a través de su puerto serial y una interfaz R al TA. Además, con un enfoque alterno, se puede ocupar una tarjeta adaptadora de PC con una NT1 incorporada a un codec telefónico. Es decir, el conector modular de la interfaz U de DSL se conecta directamente a esta tarjeta adaptadora en la PC, que actúa como una terminal de video de ISDN con un teléfono incorporado. Para detalles acerca de los protocolos usados en las interfases U, S y T, se remite al lector a las notas de aplicación para los chips de ISDN, como el *transceiver de* interfaz U MC 145472 de Motorola, la interfaz S/T MC 145474 y el codec telefónico MC 145554.

El servicio N-ISDN al suscriptor a través de una DSL de par trenzado de dos hilos de hasta 18 kft desde una RT es posible gracias a la señalización multinivel. Considerando la figura 5-33 con $R = 160$ kb/s, un código de línea de cuatro niveles (es decir, $\ell = 2$ bits) de 80 kbauds tiene un ancho de banda nulo de sólo 80 kHz en lugar del ancho de banda nulo de 160 kHz para un código de línea binario ($\ell = 1$). El ancho de banda de 80 kHz se soporta mediante un cable de par trenzado de calibre 26 si éste mide menos de 18 kft. La señal de cuatro niveles en particular utilizada es el código de línea 2B1Q (para dos dígitos binarios codificados en un símbolo cuaternario) que se muestra en la figura 8-7. Note que el código de línea 2B1Q es un código diferencial de símbolo. Por lo tanto, si (debido a un error en el cableado) se "hace una vuelta" en el par trenzado y el hilo de punta se conecta a la terminal de anillo y el anillo a la punta de tal forma que la polaridad de la señal 2B1Q se invierte, entonces los datos binarios decodificados tendrán todavía la polaridad correcta (es decir, no complementada).

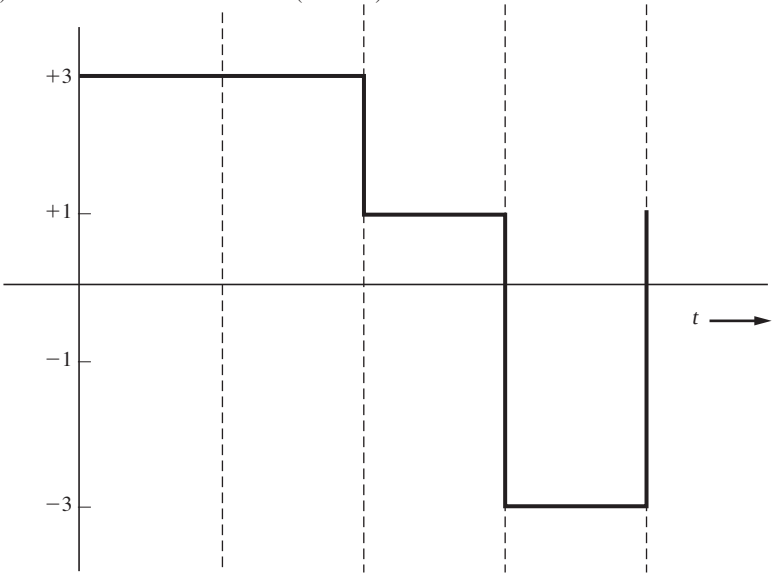
La principal ventaja de la ISDN es obvia: proporciona canales de datos TDM directamente al suscriptor. También posee desventajas: por ejemplo, debido a que el equipo del suscriptor de ISDN

Nivel 2B1Q previo	Palabra binaria actual	Nivel 2B1Q actual
+1 o +3	00	+1
	01	+3
	10	−1
	11	−3
−1 o −3	00	−1
	01	−3
	10	+1
	11	+3

(a) Tabla de código diferencial 2B1Q



(b) Forma de onda de datos binarios (160 kb/s)



(c) Forma de onda 2B1Q (80 kbauds)

Figura 8–7 Código de línea 2B1Q.

no se energiza por la DSL, éste no funcionará cuando la potencia AC local falla a menos que el suscriptor suministre una fuente de poder de respaldo. Si sólo se requiere de POTS, entonces el teléfono analógico convencional es generalmente más económico y confiable.

La ISDN se utiliza en los hogares y oficinas en Europa, pero no es muy popular en Estados Unidos.

8–4 CAPACIDADES DE LAS REDES PÚBLICAS TELEFÓNICAS CONMUTADAS

Los canales de banda ancha empleados para conectar las oficinas de cobro consisten en un tipo predominante: cable de fibra óptica. La tabla 8-2 presenta una lista de algunos de los sistemas de banda ancha que se ocupan, o que se han ocupado en el pasado, e indica la capacidad de dichos sistemas en términos del número de canales de VF que pueden soportar y de su velocidad de bit.

Históricamente, los pares de hilo abierto, los cuales consisten en hilos desnudos individuales soportados por aislantes de vidrio en los brazos cruzados de los postes telefónicos, proporcionaban servicio de banda ancha a través de la señalización por FDM/SSB. Ocasionalmente algunas líneas de hilo abierto todavía pueden verse a lo largo de vías de ferrocarril.

El cable de fibra óptica con señalización por OOK ha sobrepasado al de par trenzado, al coaxial y a la difusión por microondas debido a su tremenda capacidad y su costo relativamente económico. Como se muestra en la tabla 8-2, las velocidades de datos en los enlaces de fibra óptica continúan incrementándose conforme la tecnología avanza. Típicamente, una velocidad de 2.5 Gb/s se emplea en una portadora óptica de OOK, como es el caso en el sistema FT-2000. Esto es equivalente a 32,000 circuitos telefónicos de VF (consulte la sección 8-7 para una descripción del sistema FT-2000). Las velocidades de datos de 10 Gb/s en cada portadora también son posibles. Para una capacidad aún mayor se usan múltiples portadoras a diferentes longitudes de onda sobre una sola fibra. Los sistemas de *multiplexión por división de longitud de onda densa* (DWDM, por sus siglas en inglés) incluyen hasta 176 portadoras ópticas sobre una sola fibra. Por ejemplo, el sistema FlashWave7700 de DWDM alcanza una capacidad de 1.76 Tb/s, o 27.5 millones de circuitos de VF, utilizando 176 portadoras. Sin embargo, el cable de fibra óptica suministra servicio sólo desde un punto fijo a otro. Recíprocamente, los satélites de comunicaciones proporcionan conexiones de banda ancha a cualquier punto en el planeta. Se puede suministrar servicio a ubicaciones aisladas casi instantáneamente mediante estaciones terrestres portátiles. Esto se describe con mayor detalle en la siguiente sección.

8-5 SISTEMAS DE COMUNICACIONES VÍA SATÉLITE

El número de sistemas de comunicaciones vía satélite ha aumentado en los últimos años. Los satélites han hecho posible la difusión de señales de televisión transoceánicas. Las comunicaciones vía satélite proporcionan la difusión de señales de datos, de telefonía y de televisión, y en la actualidad permiten la transmisión nacional de televisión directamente al hogar vía satélite.

La tecnología satelital ha cambiado drásticamente durante los últimos 15 años. El mayor avance ha sido la transición de la señalización analógica a la digital. Además, el tipo de información transmitida también ha cambiado. En Estados Unidos, los satélites se emplean en la actualidad principalmente para la distribución de TV y para establecer enlaces de comunicaciones con áreas aisladas. Los sistemas vía satélite están equipados idealmente para las aplicaciones del sistema de posicionamiento global (GPS, por sus siglas en inglés), donde la señal del satélite se ocupa por el receptor para determinar las coordenadas geométricas (latitud, longitud y altitud) exactas del usuario sobre la Tierra [Pratt *et al.*, 2003□Kaplan, 2005].

Como se indica en la tabla 8-2, los sistemas modernos de fibra óptica tienen una capacidad mucho mayor que los satélites modernos. El sistema de fibra óptica WaveStar tiene cerca de 40 veces el número de canales de VF equivalentes que el sistema Intersat X. Se pueden instalar grupos de fibra con muy poco aumento en su costo y, por lo tanto, la capacidad del cable de fibra inicial puede expandirse a casi cualquier capacidad imaginable. El costo/mantenimiento por canal de un sistema

TABLA 8–2 CAPACIDAD DE REDES PÚBLICAS TELEFÓNICAS CONMUTADAS

Medio de transmisión	Nombre	Desarrollador	Años en servicio	Número de canales de frecuencia de voz	Velocidad de bit (Mb/s)	Espacio entre repetidores (millas)	Frecuencia de operación (MHz)	Modulación[a]	
								D/A	Método
Par de hilo abierto	A	Bell	1918	4			0.005–0.025	A	FDM/SSB
	C	Bell	1924	3		150	0.005–0.030	A	FDM/SSB
		CCITT		12		50	0.036–0.140		
	□	Bell	1938	12		50	0.036–0.143	A	FDM/SSB
		CCITT		28			0.003–0.300	A	FDM/SSB
Cable de par trenzado	K	Bell	1938	12		17	0.012–0.060	A	FDM/SSB
		CCITT		12		19	0.012–0.060	A	FDM/SSB
	N1	Bell	1950	12			0.044–0.260	A	FDM/SSB
	N3	Bell	1964	24			0.172–0.268	A	FDM/SSB
	T1[b]	Bell	1962	24	1.544 (DS-1)	1		D	Bipolar
	T1G[b]	AT□T	1985	96	6.312 (DS-2)			D	Cuatro niveles
	T2[b]	Bell		96	6.312 (DS-2)	2.3		D	B6ZS
Cable coaxial	L1	Bell	1941	600		8	0.006–2.79	A	FDM/SSB
	L3	Bell	1953	1,860		4	0.312–8.28	A	FDM/SSB
	L4	Bell	1967	3,600		2	0.564–17.55	A	FDM/SSB
	L5	Bell	1974	10,800		1	3.12–60.5	A	FDM/SSB
	T4[b]	Bell		4,032	274.176 (DS-4)	1		D	Polar
	T5[b]	Bell		8,064	560.16 (DS-5)	1		D	Polar
Cable de fibra óptica	FT3	Bell	1981	672	44.763 (DS-3)	4.4	0.82 μm	D	TDM/OOK
		Brit. Telcom	1984		140	6	1.3 μm	D	TDM/OOK
		Sask. Telcom	1985		45	6–18	0.84 y 1.3 μm	D	TDM/OOK
	F-400M	Nippon	1985		400	12	1.3 μm	D	TDM/OOK
	FT3C-90	AT□T	1985	1,344	90.254 (DS-3C)	16	1.3 μm	D	TDM/OOK
	FT4E-432	AT□T	1986	6,048	432 (DS-432)	16	1.3 μm	D	TDM/OOK
	LaserNet	Microtel	1985	6,048	417.79 (9DS-3)	25	1.3 μm	D	TDM/OOK
	FTG1.7	AT□T	1987	24,192	1,668 (36DS-3)	29	1.3 μm	D	TDM/OOK
	FT-2000	AT□T	1995	32,256	2,488 (OC-48)	100	1.5 y 1.3 μm	D	TDM/OOK
	WaveStar	Lucent	1999	6,250,000	400,000	25	40 longitudes de onda	D	DWDM[d]
	FlashWave	Fujitsu	2002	27,500,000	1,760,000		176 longitudes de onda	D	DWDM

Transoceánico	TAT-1 (SB)	Bell	1956	48		20	0.024–0.168	A	FDM/SSB
	TAT-3 (SD)	Bell	1963	138		11	0.108–1.05	A	FDM/SSB
	TAT-5 (SF)	Bell	1970	845		6	0.564–5.88	A	FDM/SSB
	TAT-6 (SG)	Bell	1976	4,200		3	0.5–30	A	FDM/SSB
	TAT-8 (3 fibras)		1988	8,000	280		1.3 μm	D	TDM/OOK
	TAT-9 (3 fibras)		1991	16,000	565		1.55 μm	D	TDM/OOK
	TAT-10 (6 fibras)		1992	80,000[e]	565		1.55 μm	D	TDM/OOK
	TAT-12 (6 fibras)	Alcatel	1995	200,000	5,000	30	1.48 μm	D	TDM/OOK
	OALW160	Alcatel	2000		160,000	35	1.55 μm	D	DWDM
	TAT-14 (4 fibras)		2001		640,000		1.55 μm	D	DWDM
Difusor por microondas	TD-2	Bell	1948	600 (1954)	más 1.544[c]	30	3700–4200	A	FDM/FM
	TH-1	Bell	1961	2,400 (1979)	más 1.544[c]	30	5925–6245	A	FDM/FM
	TD-3	Bell	1967	1,800 (1979)	más 1.544[c]	30	3700–4200	A	FDM/FM
	TN-1	Bell	1974	1,800	más 1.544[c]	30	Banda K, 18 GHz	A	FDM/FM
	AR6A	Bell	1980	6,000		30	5925–6425	A	FDM/SSB
	18G274	NEC	1974	4,032	274.176 (DS-4)	7	18 GHz	D	4 PSK
	6G90	NEC	1979	1,344	90 (2DS-3)	30	6 GHz	D	16 QAM
	11G135	NEC	1980	2,016	135 (3 DS-3)	30	11 GHz	D	16 QAM
	6G135	NEC	1983	2,016	135 (3 DS-3)	30	6 GHz	D	64 QAM
	MDR-2306	Collins	1983	2,016	135 (3 DS-3)	30	6 GHz	D	64 QAM
	RD-6A	Nortel	1984	2,016	135 (3 DS-3)	30	6 GHz	D	64 QAM
	TN-X/40	Nortel	1996	4,032	310 (2 STS-3)	30	6 GHz	D	512 QAM
Satélite de comunicaciones	Intelsat IV	COMSAT	1971	8,000		22,300	6 GHz de subida/4 GHz de bajada	A/D	FDM/FM, QPSK/ SCPC
	Intelsat V	COMSAT	1980	25,000		22,300	6/4 y 14/11 GHz	A/D	FDM/FM, QPSK/ SCPC
	Intelsat VI	Intelsat	1990	120,000		22,300	6/4 y 14/11 GHz	A/D	FDM/FM, QPSK/ SCPC
	Intelsat VIII	Intelsat	1998	121,000		22,300	6/4 y 14/11 GHz	A/D	FDM/FM, QPSK/ SCPC
	Intelsat X	Intelsat	2004	170,000			6/4 y 14/11 GHz	A/D	FDM/FM, QPSK/ SCPC

[a] A-analógico□D-digital□DWDM-multiplexión por división de longitud de onda densa.

[b] Consulte la tabla 3-9 para más detalles acerca del sistema de portadora T.

[c] Desde 1974 los datos bajo la voz se añadieron para proporcionar un canal de datos de 1.544 Mb/s (DS-1) además de la capacidad FDM de VF mencionada.

[d] 40 canales de longitud de onda a 10 Gb/s cada uno.

[e] Capacidad de VF con multiplexión estadística.

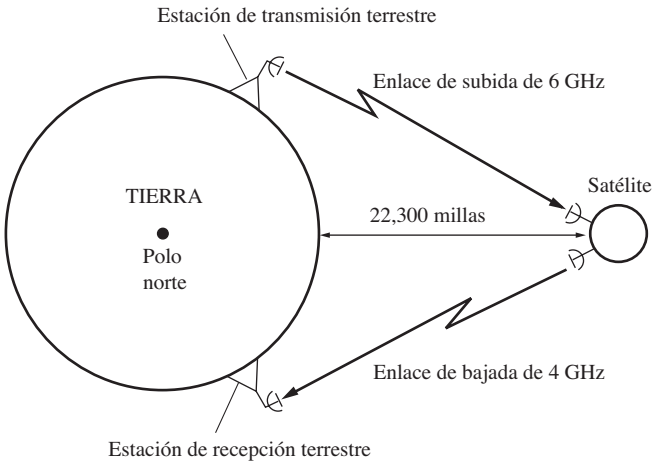


Figura 8–8 Satélite de comunicaciones en órbita geosíncrona.

de fibra en órdenes de magnitud es menor que para un sistema vía satélite. Como consecuencia, en Estados Unidos casi todos los datos de telefonía e Internet se portan mediante sistemas de fibra óptica. Los sistemas vía satélite se usan para distribuir programas de TV a compañías de TV por cable y directamente al hogar (por ejemplo, DirectTV), para radio vía satélite (XM y Sirius) y para proporcionar redes de VSAT (terminales de muy pequeña apertura, de sus siglas en inglés) privadas para compañías. Los satélites se utilizan también en las aplicaciones del tipo GPS. En el ámbito internacional, los satélites se emplean para la distribución de TV, para GPS y para enlaces telefónicos y de Internet para áreas aisladas.

En resumen, los satélites son muy eficientes en cuanto a costo para las aplicaciones del tipo de difusión donde la misma información se transmite desde una fuente a muchos receptores, aunque son menos eficientes en cuanto al costo para aplicaciones de comunicaciones de punto a punto.

La mayoría de los satélites de comunicaciones se coloca en *órbita geosíncrona* (GEO), que es una órbita circular en el plano ecuatorial de la Tierra. La órbita se ubica a 22,300 millas sobre el ecuador, de tal forma que el periodo orbital sea el mismo que el de la Tierra. Por lo tanto, desde el punto de vista de la Tierra estos satélites parecen estar ubicados en un punto estacionario en el cielo, como se muestra en la figura 8-8. Esto permite que las antenas de una estación terrestre se simplifiquen, ya que estarán apuntadas en una dirección fija y no tendrán que rastrear a un objeto en movimiento. (Para la comunicación a las regiones polares de la Tierra se utilizan satélites en órbitas polares, los cuales requieren de estaciones terrestres con antenas rastreadoras.) Para prevenir que el satélite caiga se emplea una de las dos siguientes técnicas de estabilización de giro: la estabilización de giro o la estabilización en tres ejes. Para la primera, el cilindro exterior del satélite se gira para crear un efecto giroscópico que estabiliza al satélite. Para la segunda, se ocupan giroscopios internos para sentir el movimiento del satélite, y éste se estabiliza al disparar los propulsores apropiados.

La banda de frecuencia más deseada para los sistemas de comunicaciones vía satélite es la de 6 GHz para el enlace de subida (transmisión de la Tierra al satélite) y de 4 GHz para el enlace de bajada (transmisión del satélite a la Tierra). En este rango de frecuencia, el equipo es relativamente económico, el ruido cósmico es pequeño y la frecuencia es suficientemente baja para que la precipitación no atenúe a las señales de manera apreciable. Otras pérdidas, como el centelleo ionosférico y la absorción atmosférica, son pequeñas a estas frecuencias [Spilker, 1977]. (La absorción ocurre en bandas de frecuencia específicas y es causada por la excitación debido a la señal de gases atmosféricos y de vapor de agua). Sin embargo, enlaces difusores de radio por microondas terrestres exis-

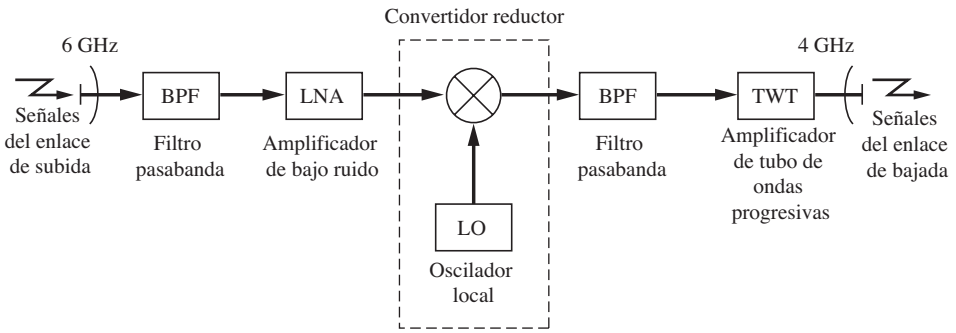


Figura 8–9 Diagrama de bloques simplificado de un transpondedor de un satélite de comunicaciones.

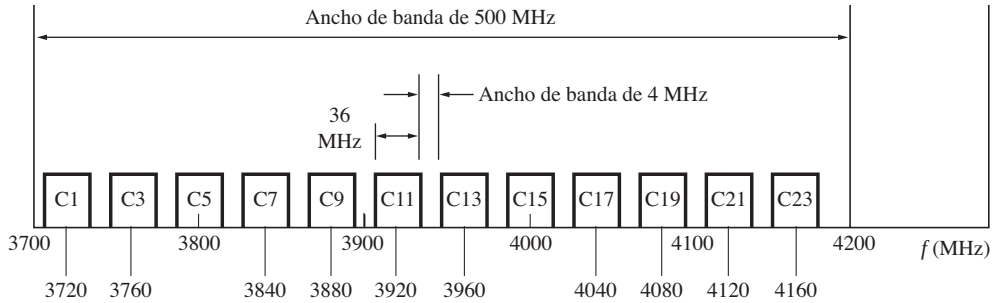
tentes ya se han asignado para su operación dentro de las bandas de 6 y 4 GHz (consulte la tabla 8-2), así que la FCC limita la densidad de potencia en la Tierra proveniente de los transmisores vía satélite. Se debe tener cuidado en ubicar las antenas de recepción vía satélite de la estación terrestre de tal forma que no reciban señales interferentes de los enlaces de radio por microondas terrestres que usan la misma asignación de frecuencia. En la banda de 6/4 GHz, los satélites síncronos se asignan a un espacio orbital de 2° (estándar estadounidense).

Los satélites más recientes operan sobre bandas de frecuencia más altas, debido a que existen muy pocas asignaciones espectrales vacantes en la banda de 6/4 GHz (banda C). Los satélites de banda Ku utilizan 14 GHz en el enlace de subida y 12 GHz en el enlace de bajada, con un espacio orbital de 3°. Algunos satélites recientes de banda Ku cuentan con amplificadores de alta potencia que alimentan con 120 a 240 W a sus antenas de transmisión, comparados con los 20 a 40 W para los satélites de baja o media potencia. Los satélites de alta potencia, llamados satélites de difusión directa (DBS, por sus siglas en inglés), proporcionan servicio de TV directamente al hogar, el cual tiene una pequeña antena receptora (de 2 ft o menos de diámetro).

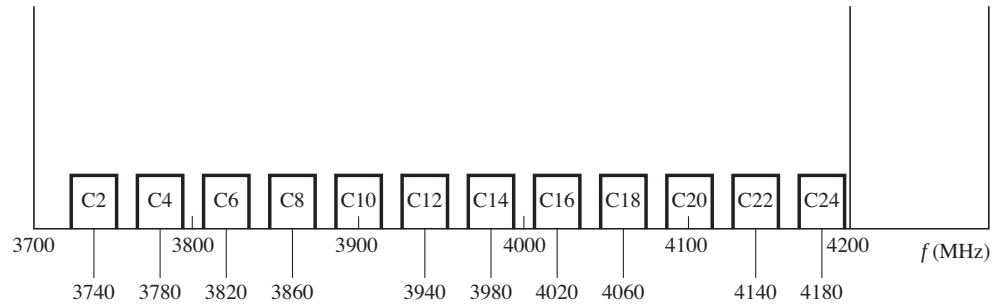
Cada satélite tiene un número de *transpondedores* (receptor a transmisor) para amplificar la señal recibida a partir del enlace de subida y para realizar una conversión reductora de la señal para transmitirla a través del enlace de bajada (consulte la figura 8-9). La figura 8-9 muestra un "transpondedor de guía ondas acodado" que no demodula la señal recibida ni realiza procesamiento de la señal pero actúa como un convertidor reductor con una ganancia de alta potencia. La mayoría de los transpondedores se diseña para un ancho de banda de 36, 54 o 72 MHz, donde 36 MHz es el estándar usado para el servicio de difusión de televisión de banda C (6/4 GHz). Conforme la tecnología lo permita, los transpondedores procesadores empezarán a emplearse, ya que se puede mejorar el rendimiento de error (para la señalización digital).

A cada satélite se le asigna una posición de órbita síncrona y una banda de frecuencia bajo la cual operará. En la banda de 6/4 GHz se permite que cada satélite ocupe una asignación espectral de 500 MHz de ancho, y un satélite típico tiene 24 transpondedores, donde cada uno de ellos usa 36 MHz de la asignación del ancho de banda de 500 MHz. Los satélites reutilizan la misma banda de frecuencia al tener 12 transpondedores operando con señales radiadas polarizadas verticalmente 12 transpondedores con señales polarizadas horizontalmente.[4] Una asignación típica de frecuencia de 6/4 GHz para satélites se muestra en la figura 8-10. Los transpondedores se denotan con C1 para el canal 1, C2 para el canal 2, y así sucesivamente. Estos satélites se emplean principalmente para enviar señales a los sistemas de CATV.

[4] Una señal de satélite verticalmente polarizada tiene un campo E que está orientado verticalmente (en paralelo al eje de rotación de la Tierra). En la polarización horizontal, el campo E es horizontal.



(a) Polarización horizontal[a]



(b) Polarización vertical[a]

[a]Estas son las polarizaciones ocupadas para los satélites Galaxy. Algunos de los otros satélites usan asignaciones opuestas de polarización.

Figura 8–10 Plan de frecuencia de transpondedor de satélite de 6/4 GHz para los canales del enlace de bajada. (Para el plan de frecuencia del enlace de subida, agregue 2225 MHz a los números dados aquí).

Transmisión de televisión digital y analógica

La TV puede enviarse vía satélite con técnicas digitales o analógicas.

Para la transmisión digital, la señal de video en banda base se muestrea y se digitaliza. Los datos generalmente se comprimen para conservar el ancho de banda de la señal modulada del satélite. Los datos se comprimen removiendo muestras de video redundantes dentro de cada cuadro de la imagen y las que ocurren de cuadro a cuadro. Por ejemplo, el sistema Hughes Digital Satellite System (DSS)[5] proporciona más de 200 canales directamente al suscriptor en el hogar en Estados Unidos utilizando dos satélites Hughes HS601. Estos satélites geoestacionarios están ubicados por encima del ecuador a una longitud de 101° al oeste. Cada satélite DSS contiene 16 transpondedores de alta potencia (120 W) operando en la banda Ku (12.2-12.7 GHz). El ancho de banda de cada transpondedor es de 24 MHz□la potencia radiada efectiva de cada transpondedor que se emite de la antena del satélite es de 48 a 53 dBw dirigidos sobre la parte continental de Estados Unidos y la parte sur de Canadá. Por lo tanto, un suscriptor puede recibir la señal de satélite con una antena de recepción relativamente pequeña que consiste en un reflector parabólico de 18 pulgadas. El video en banda base para cada canal de TV se digitaliza y se comprime con el estándar de Motion Pictures Experts Group (MPEG) [Pancha y Zarki, 1994]. Esta compresión proporciona una velocidad de datos

[5] DSS es una marca registrada de DirecTV, Inc., una subsidiaria de GM Hughes Electronics, El Segundo, CA.

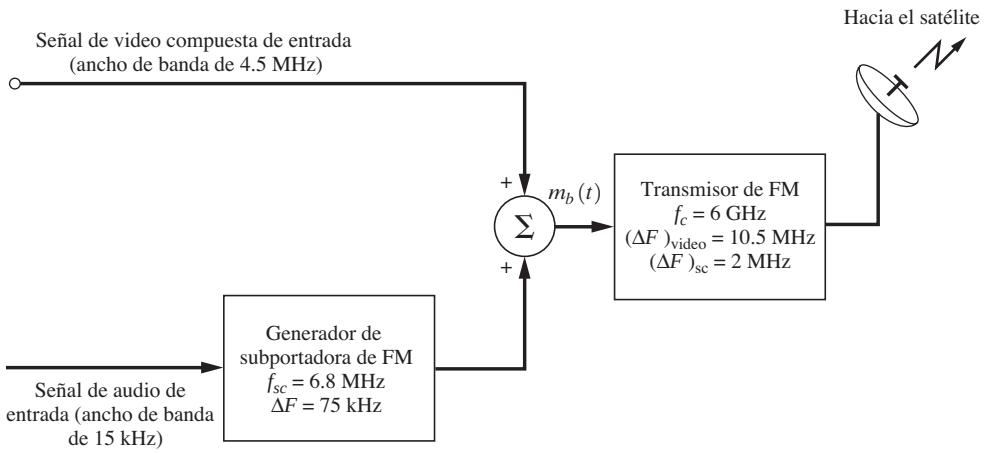


Figura 8–11 Transmisión de señales de TV con calidad de difusión desde una estación terrestre.

de video de 3 a 6 Mb/s para cada canal, dependiendo de la cantidad de movimiento en el video. Los datos para cerca de seis canales de TV (video más audio multicanal) se realizan mediante la TDM para su transmisión a través de cada transpondedor del satélite empleando QPSK [Thomson, 1994]. Aún más, se ocupa la compresión adaptable de datos para minimizar la velocidad de datos de la señal TDM, ya que la información de otros de los canales de TV en el flujo de datos TDM pueden estar codificados a una velocidad de datos más baja que otros, dependiendo de la cantidad de movimiento (y de otras propiedades) de cada fuente de video. En los ejemplos de estudio SA8-1 y SA8-2 se presentan más detalles acerca del sistema DSS. La codificación para la TV digital (DTV) se discutirá en la sección 8-9.

Para la transmisión de TV analógica vía satélite, el video en banda base para un solo canal de TV se modula por frecuencia dentro de una portadora. Por ejemplo, para enviar señales de TV al centro distribuidor de los sistemas de CATV a menudo se usan satélites de banda C con 24 transpondedores (como se muestra en la figura 8-10). Para cada transpondedor, la señal de video compuesta en banda base de ancho de banda de 4.5 MHz de un solo canal de TV se modula por frecuencia dentro de una portadora de 6 GHz, como se muestra en la figura 8-11. La señal visual compuesta consiste en la señal de blanco y negro de video, las señales de la subportadora de color y la señal de pulso sincronizadora, como se discutirá en la sección 8-9. La señal auditiva también se envía sobre el mismo transpondedor mediante modulación de frecuencia dentro de una subportadora de 6.8 MHz sobre la cual se realiza una multiplexión por división de frecuencia junto con la señal de video compuesta. La señal de banda ancha resultante modula por frecuencia al transmisor.

El ancho de banda de la señal FM de 6 GHz puede evaluarse con la regla de Carson. La desviación pico del video compuesto es de 10.5 MHz y la de la subportadora es de 2 MHz, lo cual resulta en una desviación pico general de $\Delta F = 12.5$ MHz. El ancho de banda en banda base es de aproximadamente 6.8 MHz. El ancho de banda de transmisión es

$$B_T = 2(\Delta F + B) = 2(12.5 + 6.8) = 38.6 \text{ MHz} \tag{8–1}$$

el cual es aceptado por el transpondedor de 36 MHz. Además, pueden también difundirse otras señales auditivas de banda ancha (de 0 a 15 kHz) utilizando subportadoras de FM. Algunas frecuencias típicas de subportadora que se emplean son de 5.58, 5.76, 6.2, 6.3, 6.48, 6.8, 7.38 y 7.56 MHz.

Acceso múltiple de datos y de señal telefónica

Los difusores de satélite proporcionan un canal para datos y señalización de VF (teléfono) parecido a los enlaces de radio por microondas terrestres convencionales. Es decir, se puede hacer una multiplexión por división de tiempo de los datos dentro de los tipos de señal DS-1, DS-2 y así sucesivamente y se modulan (digitalmente) dentro de una portadora para su transmisión vía satélite.

Los sistemas de comunicaciones vía satélite difieren de los enlaces de microondas terrestres en las técnicas empleadas para el *acceso múltiple* de un solo transpondedor por múltiples estaciones del enlace de subida y de bajada. Los cuatro métodos principales que se ocupan para acceso múltiple son:

1. *Acceso múltiple por división de frecuencia* (FDMA, por sus siglas en inglés), el cual es similar a la FDM.
2. *Acceso múltiple por división de tiempo* (TDMA, por sus siglas en inglés), el cual es similar a la TDM.[6]
3. *Acceso múltiple por división de código* (CDMA, por sus siglas en inglés) o *acceso múltiple por espectro ensanchado* (SSMA, por sus siglas en inglés).
4. *Acceso múltiple por división de espacio* (SDMA, por sus siglas en inglés) donde patrones de antena de haz de rayos se conmutan de una dirección a otra.

Además se puede usar cualquiera de los siguientes:

1. Un modo de *acceso múltiple asignado fijamente* (FAMA, por sus siglas en inglés) con técnicas de FDMA, TDMA o CDMA.
2. Un modo de *acceso múltiple asignado por demanda* (DAMA, por sus siglas en inglés) con técnicas de FDMA, TDMA o CDMA.

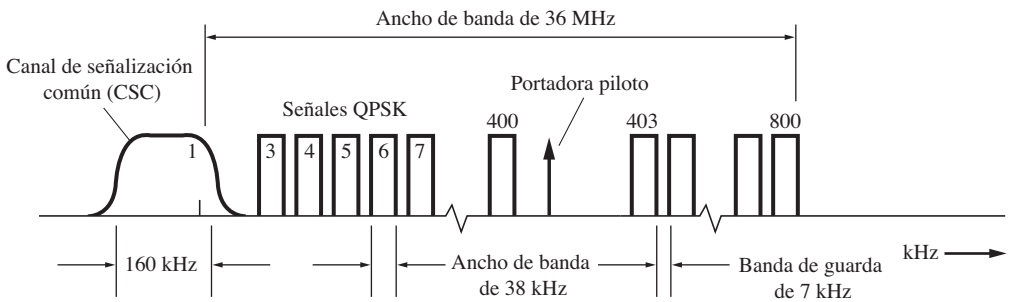
En el modo de FAMA, el formato de FDMA, TDMA o CDMA no cambia, aun cuando cambie la subida de tráfico entre varias estaciones terrestres. Por ejemplo, existe más tráfico telefónico entre las estaciones terrestres durante las horas diurnas (tiempo local) que entre las estaciones en las horas después de la medianoche. En el modo de FAMA, un gran número de canales vía satélite estarían en reposo durante las horas tempranas de la mañana, ya que son asignadas fijamente. En el modo de DAMA, los formatos de FDMA y TDMA se cambian conforme se requiera, dependiendo de la demanda de tráfico de las estaciones terrestres involucradas. En consecuencia, el modo de DAMA ocupa la capacidad del satélite más eficientemente, pero a menudo es más costoso de implementar y mantener.

En el CDMA los diferentes usuarios comparten la misma banda de frecuencia simultáneamente en el tiempo, a diferencia del FDMA y TDMA, donde se asignan diferentes ranuras de frecuencia o de tiempo a los usuarios. Con el CDMA, a cada usuario se le asigna una forma de onda digitalmente codificada en particular $\varphi_j(t)$, la cual es (casi) ortogonal a la forma de onda usada por los otros (consulte las secciones 2-5 y 5-13). Los datos pueden modularse en esta forma de onda, transmitirse a través del sistema de comunicaciones y recuperarse. Por ejemplo, si un bit de datos, m_j, se modula en una forma de onda, la señal transmitida desde el j-ésimo usuario podrá ser $m_j\ \varphi_j(t)$, y la señal CDMA compuesta de todos los usuarios sería $w(t) = \sum_j\ m_j\ \varphi_j(t)$. Los datos del j-ésimo usuario se podrían recuperar a partir de la forma de onda CDMA evaluando $\int_0^t w(t)\varphi_j(t)\ dt = m_j$, donde T es la longitud de la forma de onda codificada $\varphi_j(t)$. A menudo se utilizan códigos Gold para obtener las formas de onda codificadas.

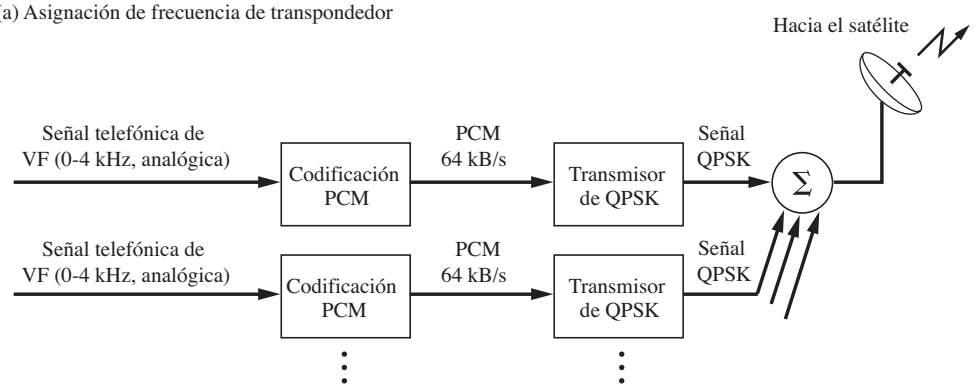
[6] También es factible emplear el *acceso múltiple por división de tiempo conmutado por satélite* (SS-TDMA, por sus siglas en inglés). Con satélites SS-TDMA, se conmutan diferentes antenas de haz de rayos estrecho al tiempo apropiado en el periodo de cuadro de TDMA para dirigir los haces de rayos de transmisión y recepción a la dirección deseada. Por lo tanto, con múltiples haces de rayos SS-TDMA se pueden reutilizar las mismas frecuencias para la transmisión y recepción simultáneamente, de tal forma que la capacidad del satélite de SS-TDMA es mucho mayor que para un satélite de TDMA. El *Intelstat* VIII es un satélite de SS-TDMA.

Ejemplo 8–1 SISTEMA SPADE

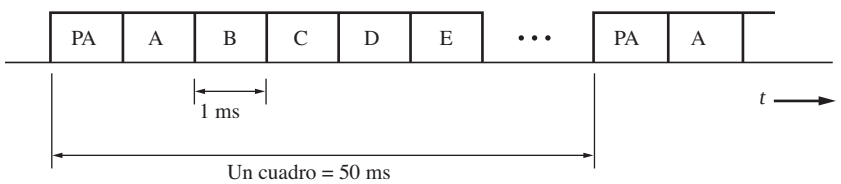
Los satélites serie *Intelstat* pueden operarse también en el modo de DAMA con un formato de FDMA que consista en una sola portadora de QPSK para cada canal telefónico (VF). Este tipo de señalización se conoce como *un solo canal por portadora* (SCPC, por sus siglas en inglés), en donde 800 señales QPSK pueden soportarse en el ancho de banda de 36 MHz del transpondedor, como se muestra en la figura 8-12a. Por lo tanto, se pueden transmitir los 800 mensajes de VF simultáneamente a través de un solo transpondedor del satélite, donde cada señal QPSK se modula por una señal PCM (digitalizada) de



(a) Asignación de frecuencia de transpondedor



(b) Posible configuración para el transmisor de QPSK SCPC



(c) Formato de señalización por TDMA CSC

Figura 8–12 Sistema de comunicaciones vía satélite SPADE para la transmisión de mensajes telefónicos de VF.

voz de 64 kb/s (estudiada previamente en el ejemplo 3-1 y ocupada como entrada a la jerarquía digital estadounidense que se mostró en la figura 3-40.) Esta técnica de SCPC-DAMA, ilustrada en la figura 8-12, se conoce como *sistema SPADE*, el cual es un acrónimo para un solo canal por portadora, modulación por código de *p*ulso, *a*cceso múltiple y asignación por *demanda* de *e*quipo [Edelson y Werth, 1972].

La asignación por demanda de la frecuencia de portadora de la señal QPSK a un enlace de una estación terrestre en particular se lleva a cabo mediante la señalización por TDM en el *canal de señalización común* (CSC, por sus siglas en inglés) (vea la figura 8-12a). El CSC consiste en una señal PSK de 128 kb/s que se comparte en tiempo entre las estaciones terrestres usando un formato TDMA, como se muestra en la figura 8-12c. PA denota al preámbulo de sincronización que ocurre al inicio de cada cuadro, y A, B, C y así sucesivamente denotan las ranuras de tiempo de 1 msegundo que se reservan para la transmisión a través de las estaciones terrestres A, B, C y así sucesivamente. De esta manera se pueden soportar 49 estaciones terrestres diferentes en el cuadro de 50 msegundos. Por ejemplo, si la estación terrestre B desea iniciar una llamada a la estación terrestre D, la B selecciona una frecuencia de portadora de QPSK de forma aleatoria de entre los canales en reposo que están disponibles y transmite esta información de frecuencia a través de la dirección de la estación D (el destino de la llamada) en la ranura de tiempo TDMA de la estación B. Si se asume que la frecuencia no ha sido seleccionada por otra estación para otra llamada, la estación D enviará un acuse de recibo de la requisición dentro de su ranura de tiempo TDMA. La estación B escucharía este acuse de recibo cerca de 600 msegundos después de su requisición para la señalización por TDMA, ya que el retraso de tiempo de ida y retorno al satélite es de 240 ms, más los retrasos del equipo y el retraso de tiempo a la ranura exacta asignada a la estación D con respecto a la de la estación B. Si otra estación, por ejemplo la C, hubiera seleccionado la misma frecuencia durante el tiempo de requisición, la B hubiera recibido una señal de ocupado y seleccionaría aleatoriamente otra frecuencia disponible e intentaría de nuevo. Cuando la llamada se termina se transmiten señales de desconexión en la ranura de tiempo de TDMA y esa frecuencia de portadora se regresa para volver a utilizarse. Debido a que la velocidad de señalización CSC es de 128 kb/s y cada ranura de tiempo tiene una duración de 1 ms, 128 bits están disponibles para que cada estación que requiere acceso la emplee para transmitir información de dirección, información de requisición de frecuencia y señalización de desconexión.

En la práctica, debido a que sólo 49 ranuras de tiempo están disponibles para el modo de TDMA, un número de frecuencias de SCPC se asignan en una base fija.

En el FDMA, tal como el sistema SPADE, cuando las portadoras se encienden y apagan por demanda, existe una modulación de amplitud en la señal compuesta de 36 MHz de ancho que se amplifica por el TWT del transpondedor. En consecuencia, el nivel controlador del TWT debe "retirarse" para que el amplificador no se sature y sea lo suficientemente lineal. Entonces, los productos de intermodulación serán lo suficientemente bajos. Por otra parte, si se hubiese ocupado una sola señal con amplitud constante (como una señal FM de una sola banda ancha usada en la difusión de señales de televisión), entonces los productos de IM no serían una consideración, y el amplificador hubiese podido controlarse más firmemente para proporcionar el nivel de potencia de salida completamente saturado.

Como se indicó anteriormente, el TDMA es similar a la TDM, donde las diferentes estaciones terrestres envían ráfagas de energía de RF que contienen paquetes de información. Durante la ranura de tiempo designada para una estación terrestre en particular, la señal de dicha estación utiliza el ancho de banda de todo el transpondedor (vea la figura 8-13). □a que las estaciones terrestres emplean una técnica de modulación de envolvente constante, como la QPSK, y debido a que sólo una señal modulada de alta velocidad se pasa a través del transpondedor durante cualquier intervalo de tiempo, no se generan productos de IM interferentes (si se compara con la técnica de FDMA descrita anteriormente). Por lo tanto, el amplificador final del TWT en el satélite puede controlarse hasta

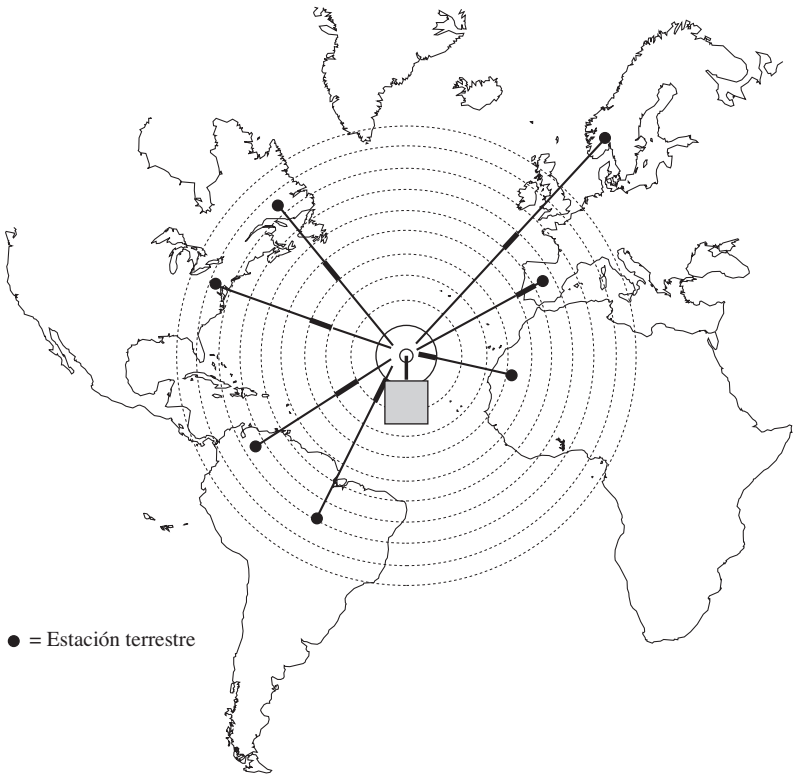


Figura 8–13 Entrelazado de ráfagas en un satélite de TDMA.

la saturación para mayor salida de potencia. Esta ventaja del TDMA sobre FDMA puede compararse con la principal desventaja de la técnica de TDMA: se requiere de una sincronización estricta de ráfaga en la estación terrestre para prevenir una colisión de las ráfagas en el satélite. En otras palabras, la ráfaga de una estación terrestre en particular tiene que llegar al satélite en la ranura de tiempo exacta designada para dicha estación, de tal forma que su señal no interfiera con las ráfagas que provienen de otras estaciones terrestres que tienen asignadas ranuras de tiempo adyacentes. Debido a que las estaciones terrestres están ubicadas a diferentes distancias del satélite y pueden ocupar diferentes configuraciones de equipo, el retraso de tiempo desde cada estación terrestre al satélite será diferente, y esto se debe tomar en cuenta cuando se calcula el tiempo de transmisión para cada estación terrestre. Además, el satélite puede moverse con respecto a la estación terrestre, lo que significa que el retraso de hecho cambia con el tiempo. Otra desventaja del TDMA es que las estaciones terrestres probablemente están transmitiendo datos que llegaron de líneas terrestres síncronas□por lo tanto, el equipo de la estación terrestre debe contener una memoria grande que puede funcionar como búfer para los datos, los cuales se leen a altas velocidades cuando el paquete de información se envía al satélite.

Un formato típico para el cuadro de TDMA para los datos que se difunden a través de un satélite se muestra en la figura 8-14. En este ejemplo, la estación B envía datos a las estaciones A, E, G y H. Un cuadro consiste en los datos provenientes de cada estación terrestre. En cualquier tiempo, sólo una estación terrestre proporciona la señal de referencia de tiempo para que las otras

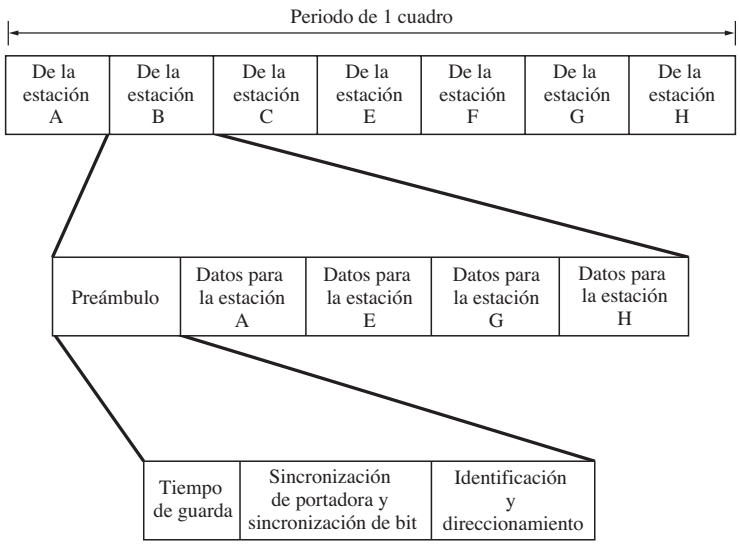

Periodo de 1 cuadro
De la estación A
De la estación B
De la estación C
De la estación E
De la estación F
De la estación G
De la estación H
Preámbulo
Datos para la estación A
Datos para la estación E
Datos para la estación G
Datos para la estación H
Tiempo de guarda
Sincronización de portadora y sincronización de bit
Identificación y direccionamiento

Figura 8–14 Formato típico de cuadro de TDMA.

estaciones la usen en el cálculo de sus tiempos de transmisión para sus ráfagas de datos (sincronización de cuadros). La longitud de ráfagas desde las varias estaciones puede ser diferente dependiendo del volumen de tráfico. La segunda parte de esta figura muestra una vista detallada de un formato típico de ráfaga que se transmite de la estación B. Éste consiste en dos partes principales, el preámbulo y los datos que se envían a las otras estaciones terrestres desde la estación B. El preámbulo incluye un tiempo de guarda antes del inicio de la transmisión. Entonces se transmite una cadena de caracteres de sincronización que otorgan tiempo a los lazos de recuperación de sincronización de portadora y los lazos de recuperación de sincronización de bit (en los receptores de la estación terrestre) para que se enganchen a esta ráfaga de la estación B. El fin del preámbulo a menudo contiene una palabra única que identifica la fuente de la ráfaga como la estación B y puede también indicar las direcciones (estaciones) destino de los datos.

Otro método de acceso múltiple que es similar al TDMA es la técnica *ALOHA* [Lam, 1979], en la que los múltiples usuarios envían ráfagas de datos, llamados *paquetes*, cuando deseen. Cuando dos o más de las ráfagas se solapan sobre el tiempo, existe una *colisión*. Cuando ésta ocurre, los usuarios involucrados retransmiten sus paquetes después de un retraso de tiempo aleatorio y, con optimismo, no habrá una segunda colisión. Si se presenta, el proceso de retransmisión se repite hasta que cada fuente es exitosa. Esta técnica posee la ventaja de ser relativamente económica en su implementación, pero no funcionará si existe una subida pesada de tráfico en el satélite, en cuyo caso éste se satura con paquetes en colisión, y las colisiones se pueden evitar sólo al detener todas las nuevas transmisiones e incrementando el retraso aleatorio requerido antes de la retransmisión. Una técnica más elaborada se llama *ALOHA a intervalos*. Con este método, los paquetes se retransmiten aleatoriamente, pero sólo durante ciertas ranuras de tiempo. Esto evita colisiones debido al solape parcial de paquetes.

Las *terminales de muy pequeña apertura* (VSAT, por sus siglas en inglés) se han popularizado con la disponibilidad de satélites de banda Ku y con los avances recientes, que han hecho posible las terminales de bajo costo. El término “muy pequeña apertura” implica que estos sistemas

utilizan antenas de terminales terrestres que son relativamente pequeñas (cerca de 1 o 2 m de diámetro). Los amplificadores de potencia de estado sólido (1 a 2 W), convertidores de frecuencia de bajo costo, procesamiento digital y los circuitos VLSI han hecho posibles las VSAT. El objetivo de los sistemas VSAT es proporcionar una transmisión de datos y voz de bajo costo directamente a los usuarios, como concesionarias de automóviles, bancos (cajeros automáticos), sociedades mediadoras de mercado, compañías de oleoductos (monitoreo y control), hoteles y aerolíneas (reservaciones), tiendas departamentales (redes de datos) y corporaciones (transmisión de punto a multipunto). Típicamente, las VSAT ofrecen una transmisión de alta calidad (BERs menores a 10^{-7} para 99.5% del tiempo) a velocidades de datos desde 100 b/s hasta 64 kb/s [Chakraborty, 1988; Maral, 1995]. Muchos usuarios comparten un solo transpondedor de satélite mediante SCPC, TDMA o CDMA, así que el costo al usuario puede ser sustancialmente menor que para el mismo tipo de servicio suministrado por la red pública telefónica de larga distancia [Dorf, 1993, p. 2201; Maral, 1995; Rana, McCoskey y Check, 1990]. Para mayor información acerca de los sistemas VSAT, consulte [Pratt *et al*., 2003].

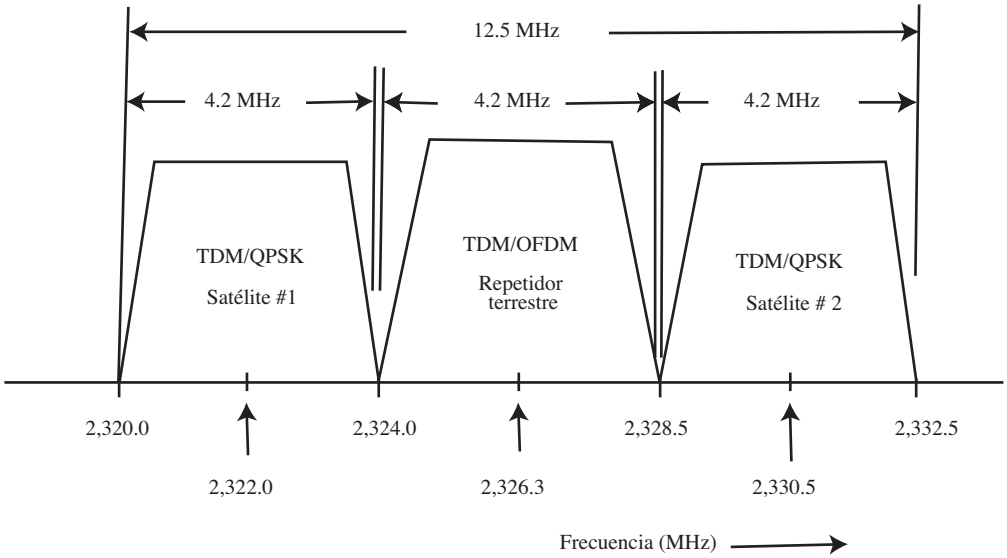
Radiodifusión vía satélite

El servicio de radio de audio digital vía satélite (SDARS, por sus siglas en inglés) es el término de la FCC para el uso de satélites para difundir múltiples flujos de audio digital a suscriptores. Típicamente el costo al suscriptor es de alrededor de 13 dólares mensuales para cerca de 100 canales de audio. El audio consiste en música, noticias, deportes, el tiempo y otros canales de entretenimiento. En Estados Unidos la FCC ha otorgado licencias a dos proveedores: Sirius Radio y XM Radio. Algunos de los parámetros técnicos para estos sistemas de SARS se muestran en la tabla 8-3.

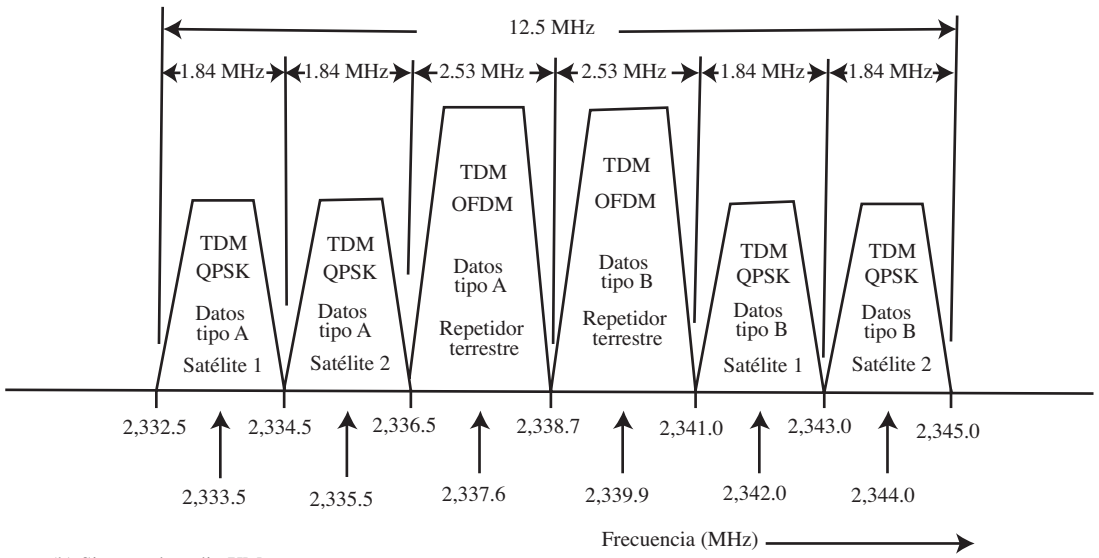
Sirius emplea tres satélites colocados en órbitas *elípticas* cada una con un periodo de 24 horas, así que un satélite individual permanece sobre un sitio cerca de 16 horas a la vez. A cualquier hora, dos de los satélites aparecen encima, de tal forma que se reciben datos de ambos simultáneamente. Esto suministra redundancia (es decir, recepción por diversidad de trayectorias). También se proporciona la diversidad de frecuencia al transmitir los datos redundantemente sobre dos bandas de enlaces de bajada diferentes, como se muestra en la figura 8-15a. La diversidad de tiempo se suministra por un retraso de datos de 4 segundos en uno de los satélites. Ocupando estas técnicas de diversidad se minimizan los efectos de interrupción de servicio y los errores de datos.

XM usa dos satélites *geoestacionarios* (GEO) ubicados a una longitud de 85° al Oeste y 115° al Oeste sobre el ecuador. En Estados Unidos se pueden recibir señales simultáneamente de ambos satélites. La diversidad de trayectoria, frecuencia y de tiempo también se utilizan para minimizar los efectos de interrupción de servicio y los errores de datos.

Los sistemas de SDARS tienen frecuencias de enlace de bajada en la banda de 2.3 GHz (consulte la tabla 8-3) y a cada sistema de SDARS se le asigna un canal con un ancho de banda de 12.5 MHz, como se muestra en la figura 8-15. Se realiza una multiplexión por división de tiempo (TDM) de los flujos de bit de los múltiples canales de audio para suministrar una velocidad de datos compuesta de alrededor de 4 Mb/s. Además se agrega una codificación de corrección directa de errores concatenada (FEC) a este flujo de datos por TDM. Este flujo codificado de datos se modula por QPSK en la señal del enlace de bajada provista al suscriptor. Desafortunadamente, estas señales TDM/QPSK de satélite recibidas se bloquearán intermitentemente (es decir, se atenuarán) por edificios altos, túneles y metros subterráneos. También pueden existir efectos de múltiples trayectorias debido a las reflexiones de los edificios y otros objetos. Estos efectos ocurren principalmente en ciudades y no en áreas rurales, y para contrarrestarlos se colocan repetidores terrestres en y alrededor de áreas urbanas y de ciudades. Los parámetros para estos repetidores se muestran en la



(a) Sistema de radio Sirius



(b) Sistema de radio XM

Figura 8–15 Asignaciones espectrales para los sistemas de audio digital vía satélite en Estados Unidos.

TABLA 8–3 SISTEMAS DE AUDIO DIGITAL VÍA SATÉLITE EN ESTADOS UNIDOS

Parámetros del satélite	**Sistema de radio vía satélite Sirius**	**XM Radio Satellite System**
Número de satélites	3	2
Potencia de transmisión del satélite	3kW EIRP	228W (salida de TWT)
Órbita del satélite	Elíptica, 16 horas por encima	Geoestacionaria, satélites a longitud de 85° y 115° al Oeste
Ángulo de elevación al satélite	>60° típicamente	>45° típicamente
Frecuencias de enlace de subida	7,060.0–7,072.5 MHz	7,050.0–7,075.0 MHz
Frecuencias de enlace de bajada	2,320.0–2,324.0 MHz y 2,328.5–2,332.5 MHz	2,332.5–2,336.5 MHz y 2,341.0–2,345.0 MHz
Señal de amplitud de banda con enlaces de bajada	4.2 MHz	2×1.84 MHz
Modulación de salida del satélite	TDM/QPSK	TDM/QPSK
Velocidad de datos TDM[a]	4.4 Mb/s	4.0 Mb/s
Codificación de datos fuente	Lucent PAC[b]	Lucent PAC[b]
Número de canales de música TDM	alrededor de 50	alrededor de 50
Velocidad de datos de canal de música	64 kb/s (variable)	64 kb/s (variable)
Número de canales de voz TDM	alrededor de 50	alrededor de 50
Velocidad de datos de canal de voz	24 kb/s	24 kb/s
Parámetros de repetidores terrestres		
Número de repetidores	alrededor de 105 en 46 ciudades	alrededor de 1,500 en 70 ciudades
EIRP de repetidores	5 kW por sector de antena	la mayoría a 2kW pero ≤10 kW
Frecuencias de salida	2,324.0–2,328.5 MHz	2,336.5–2,341.0 MHz
Modulación de repetidor	TDM/OFDM	TDM/OFDM
Retraso de modulación[c]	4–5 segundos	4–5 segundos

[a] Antes de FEC. Se añade codificación concatenada para FEC: código exterior de Reed-Solomon, tasa de 1/2□código interior convolucional

[b] PAC=codec de percepción de audio, de sus siglas en inglés

[c] con respecto a la modulación de satélite

tabla 8-3. □stos emplean OFDM y tienen asignaciones de frecuencia, como se muestran en la figura 8-15. Los datos en los repetidores se retrasan alrededor de 4 segundos con respecto a los recibidos de los satélites. Estos repetidores proporcionan una recepción por diversidad de espacio, tiempo y frecuencia adicional para mayor confiabilidad en el sistema.

Para mayor información acerca de los sistemas de comunicaciones vía satélite se remite al lector a un libro excelente [Pratt *et al.*, 2003].

8–6 ANÁLISIS DE BALANCE DE ENLACE

En esta sección se desarrollarán fórmulas para la relación señal a ruido a la entrada del detector como una función de la *potencia radiada isotrópica efectiva* (EIRP, por sus siglas en inglés) transmitida, la pérdida de espacio libre, la ganancia de la antena receptora y la figura de ruido del sistema receptor. Estos resultados permitirán la evaluación de la calidad de la salida del receptor (como se mide mediante la probabilidad de error en bit para los sistemas digitales y la relación de señal a ruido

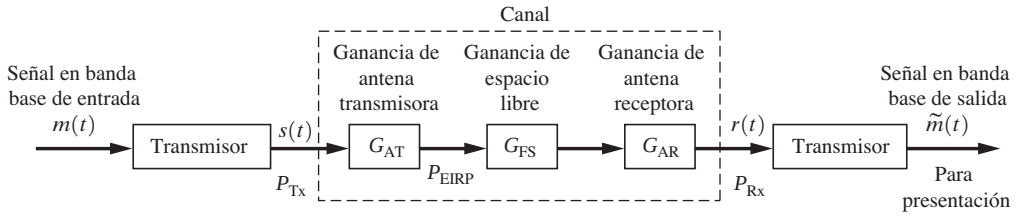


Figura 8–16 Diagrama de bloques de un sistema de comunicaciones con un canal de transmisión de espacio libre.

de salida para los sistemas analógicos), siempre y cuando se conozcan las características del ruido en el circuito detector del receptor.

Potencia de señal recibida

En los sistemas de comunicaciones la potencia de la señal recibida, a diferencia del nivel de voltaje o de corriente, es la cantidad importante. La *potencia* de la señal recibida es de suma importancia cuando se intenta *minimizar* el efecto de las *fuentes de ruido* que se alimentan al sistema y se amplifican. La ganancia de voltaje, la ganancia de corriente y los niveles de impedancia tienen que ser de un valor tal que se logre la ganancia de potencia requerida. En circuitos FET esto se logra con niveles relativamente grandes de voltaje y pequeñas corrientes (circuitería de alta impedancia). Con transistores bipolares, la ganancia de potencia se logra con voltajes relativamente pequeños y corrientes grandes (circuitería de baja impedancia).

En la figura 8-16 se muestra un diagrama de bloques de un sistema de comunicaciones con un canal de transmisión de espacio libre. La ganancia de potencia general (o función de transferencia de potencia) del canal es

$$\frac{P_{Rx}}{P_{Tx}} = G_{AT} G_{FS} G_{AR} \tag{8–2}$$

donde P_{Tx} es la potencia de la señal a la antena transmisora, G_{AT} la ganancia de potencia de la antena receptora, G_{FS} la ganancia de potencia de espacio libre[7] (la cual es órdenes de magnitud menor a uno en sistemas típicos de comunicaciones), G_{AR} la ganancia de potencia de la antena receptora y P_{Rx} la potencia de la señal al receptor.

Para usar esta relación dichas ganancias deben expresarse en términos de parámetros útiles de antena y de espacio libre [Kraus, 1986]. En este caso, G_{AT} y G_{AR} se toman como las ganancias de potencia con respecto a una antena isotrópica.[8] La EIRP es

$$P_{EIRP} = G_{AT} P_{Tx} \tag{8–3}$$

La ganancia de potencia de la antena se define como

$$G_A = \frac{\text{Densidad de potencia de radiación de la antena actual en la dirección de máxima radiación}}{\text{Densidad de potencia de radiación de una antena isotrópica con la misma potencia de entrada}}$$

[7] Una función de transferencia de ganancia es la cantidad de salida dividida entre la cantidad de entrada, mientras que una función de transferencia de pérdida es la cantidad de entrada dividida entre la cantidad de salida.

[8] Una antena isotrópica es una antena teórica no realizable que radia igualmente bien en todas las direcciones y es una referencia útil para comparar antenas prácticas.

TABLA 8–4 GANANCIAS DE ANTENA Y ÁREAS EFECTIVAS

Tipo de antena	Ganancia de potencia, G_A (unidades absolutas)	Área efectiva, A_e (m^2)
Isotrópica	1	$\lambda^2/4\pi$
Dipolo o lazo infinitesimal	1.5	$1.5\lambda^2/4\pi$
Dipolo de media onda	1.64	$1.64\lambda^2/4\pi$
Cornete (optimizada), área de boca, A	$10A/\lambda^2$	$0.81A$
Parabólica o "reflectora" con área de carátula, A	$7.0A/\lambda^2$	$0.56A$
Torniquete (dos dipolos cruzados alimentados 90° fuera de fase)	1.15	$1.15\lambda^2/4\pi$

donde la densidad de potencia (medida en W/m^2) se evalúa a la misma distancia, d, para ambas antenas. Las ganancias para algunas antenas prácticas se presentan en la tabla 8-4.

La densidad de potencia (W/m^2) de una antena isotrópica a una distancia d de la antena es

$$\text{Dendidad de potencia a } d = \frac{\text{Potencia transmitida}}{\text{Área de una esfera con radio } d} = \frac{P_{\text{EIRP}}}{4\pi d^2} \tag{8–4}$$

La FCC y otros a menudo especifican la fuerza de un campo electromagnético mediante la intensidad de campo, $\mathscr{E}$ (V/m), en lugar de la densidad de potencia (W/m^2). Las dos se relacionan mediante

$$\text{densidad de potencia} = \frac{\mathscr{E}^2}{377} \tag{8–5}$$

donde la densidad de potencia y la fuerza de campo se evalúan en el mismo punto en el espacio y 377 Ω es la *impedancia intrínseca de espacio libre*. Si la antena receptora se coloca a d metros de la antena transmisora, entonces actuará como un guante de receptor e interceptará la potencia en un área efectiva de $(A_e)_{\text{Rx}}$ (m^2), por lo tanto la potencia recibida será

$$P_{\text{Rx}} = G_{\text{AT}} \left(\frac{P_{\text{Tx}}}{4\pi d^2} \right) (A_e)_{\text{Rx}} \tag{8–6}$$

donde se ha incluido la ganancia de la antena transmisora (con respecto a una antena isotrópica), G_{AT}. La tabla 8-4 también presenta el área efectiva para varios tipos de antena. La ganancia y el área efectiva de una antena se relacionan mediante

$$G_A = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2} \tag{8–7}$$

donde $\lambda = c/f$ es la longitud de onda, c la velocidad de la luz (3×10^8 m/s) y f la frecuencia de operación en Hz. Una antena es un *elemento recíproco*. Es decir, tiene las mismas propiedades de ganancia cuando transmite o recibe. Sustituyendo la ecuación (8-7) en la ecuación (8-6) se obtiene que

$$\frac{P_{\text{Rx}}}{P_{\text{Tx}}} = G_{\text{AT}} \left(\frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2 G_{\text{AR}} \tag{8–8}$$

donde la ganancia de espacio libre es

$$G_{FS} = \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 = \frac{1}{L_{FS}} \tag{8–9}$$

y L_{FS} es la pérdida en trayectoria de espacio libre (unidades absolutas). La ganancia del canal, expresada en dB, se obtiene tomando 10 log $[\cdot]$ de ambos lados de la ecuación (8-2):

$$(G_{canal})_{dB} = (G_{AT})_{dB} - (L_{FS})_{dB} + (G_{AR})_{dB} \tag{8–10}$$

En la ecuación (8-10) la pérdida de espacio libre[9] es

$$(L_{FS})_{dB} = 20 \log \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right) \text{ dB} \tag{8–11}$$

Por ejemplo, la pérdida de espacio libre a 4 GHz para la trayectoria más corta a un satélite síncrono desde la Tierra (22,300 millas) es de 195.6 dB.

Note que a partir de la ecuación (8-8) se tiene que la potencia recibida disminuye en función al cuadrado de la longitud de onda (condición de espacio libre). Es decir, si la frecuencia de portadora se reduce por un factor de 2, la potencia recibida aumentará por un factor de 4. Esto es equivalente a la disminución de la pérdida por 6 dB, como se muestra en la ecuación (8-11).

Fuentes de ruido térmico

Se estudiará la potencia de ruido generada por una fuente de ruido térmico, ya que el ruido del receptor se evalúa en términos de este fenómeno. Un elemento conductivo con dos terminales puede caracterizarse por sus resistencias, R ohms. Este elemento resistivo, o con pérdida, contiene electrones libres que poseen algún movimiento aleatorio si la temperatura de la resistencia está por encima del cero absoluto. Este movimiento aleatorio causa la generación de un voltaje de ruido en las terminales de la resistencia. Aunque el ruido es pequeño, cuando éste se amplifica mediante un receptor de alta ganancia esto puede convertirse en un problema. (Si no existiera ruido pudieran hacerse comunicaciones hasta los límites del universo con una potencia infinitamente pequeña, ya que la señal siempre estaría amplificada sin la introducción de ruido.)

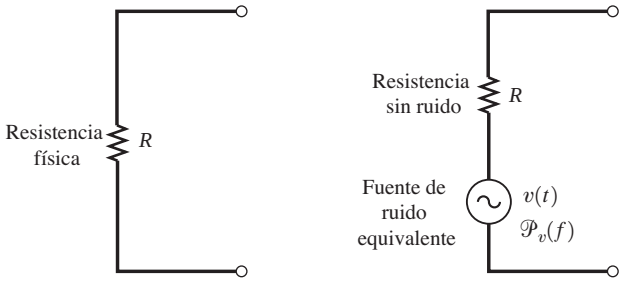
El elemento con pérdida física, o la resistencia física, puede modelarse mediante un circuito equivalente que consiste en una resistencia sin ruido en serie con una fuente de voltaje de ruido (vea la figura 8-17). A partir de la mecánica cuántica se puede mostrar que el espectro de potencia (normalizada) correspondiente a la fuente de voltaje es [Van der Ziel, 1986]

$$\mathcal{P}_v(f) = 2R\left[\frac{h|f|}{2} + \frac{h|f|}{e^{h|f|/(kT)} - 1}\right] \tag{8–12}$$

donde

$R =$ valor de la resistencia física (ohms).

[9] Esta expresión para la pérdida en trayectoria de espacio libre puede modificarse para incluir los efectos de un canal de múltiples trayectorias dentro de un ambiente de algún edificio urbano [vea la ecuación (8-67)].



(a) Elemento de circuito con pérdida caracterizado por su resistencia

(b) Modelo de circuito equivalente de Thevenin del elemento de circuito con pérdida

Figura 8–17 Fuente de ruido térmico.

$h = 6.63 \times 10^{-34}$ □segundos es la constante de Planck,

$k = 1.38 \times 10^{-23}$ □/K es la constante de Boltzmann, donde K es kelvin.

$T = (273 + C)$ es la temperatura absoluta de la resistencia (kelvin).

A la temperatura ambiental para las frecuencias menores a 1,000 GHz, $[h|f|/(kT)] < 1/5$, así que $e^x = 1 + x$ es una buena aproximación. Entonces, la ecuación (8-12) se reduce a

$$\mathcal{P}_v(f) = 2RkT \tag{8–13}$$

Esta ecuación se utilizará para desarrollar otras fórmulas en este texto, ya que las frecuencias de RF de interés están generalmente por debajo de 1,000 GHz y porque no se trata con temperaturas cercanas al cero absoluto.

Si se lee el voltaje de ruido de circuito abierto que aparece a través de la resistencia física mediante un voltímetro de RMS verdadero con un ancho de banda de B hertz, entonces, empleando la ecuación (2-67), la lectura sería

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{2 \int_0^B \mathcal{P}_v(f)\, df} = \sqrt{4kTBR} \tag{8–14}$$

Caracterización de fuentes de ruido

Las fuentes de ruido pueden caracterizarse por la máxima cantidad de potencia de ruido o la PSD que puede pasarse a una carga.

DEFINICIÓN. La *potencia de ruido disponible* es la potencia *máxima*[10] real (es decir, no normalizada) que puede extraerse de una fuente. La *PSD disponible* es la PSD *máxima* real (es decir, no normalizada) que puede obtenerse de una fuente.

Por ejemplo, la PSD disponible para una fuente de ruido térmico puede evaluarse fácilmente ocupando la figura 8-18 y la ecuación (2-142):

[10] La potencia máxima o la PSD máxima se obtiene cuando $Z_L(f) = Z_s^*(f)$, donde $Z_L(f)$ es la impedancia de carga y $Z_s^*(f)$ el conjugado de la impedancia de la fuente.

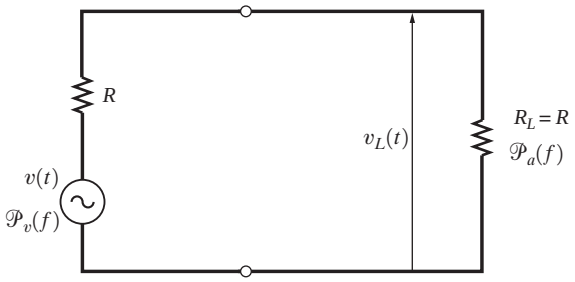


Figura 8–18 Fuente térmica con una carga acoplada.

$$\mathcal{P}_a(f) = \frac{\mathcal{P}_v(f)|H(f)|^2}{R} = \tfrac{1}{2}kT \quad \text{W/Hz} \tag{8–15}$$

donde $H(f) = \frac{1}{2}$ para la red divisora de resistencia. La potencia disponible de una fuente térmica en un ancho de banda de B hertz es

$$P_a = \int_{-B}^{B} \mathcal{P}_a(f)\, df = \int_{-B}^{B} \frac{1}{2}\, kT\, df$$

o

$$P_a = kTB \tag{8–16}$$

Esta ecuación indica que la potencia de ruido disponible de una fuente térmica *no* depende del valor de R, aun cuando el voltaje RMS de circuito abierto sí depende de éste.

La potencia de ruido disponible de una fuente (no necesariamente térmica) puede especificarse mediante un número llamado temperatura de ruido.

DEFINICIÓN. La *temperatura de ruido* de una fuente se obtiene mediante

$$T = \frac{P_a}{kB} \tag{8–17}$$

donde P_a es la potencia disponible de la fuente en un ancho de banda de B hertz.

Al usar esta definición se nota que si la fuente resulta ser de origen térmico, T será la temperatura del dispositivo en kelvin, pero si la fuente no es de origen térmico, el número que se obtiene para T puede no tener ninguna relación con la temperatura física del dispositivo.

Caracterización del ruido de dispositivos lineales

Un dispositivo lineal con generadores internos de ruido puede modelarse como se muestra en la figura 8-19. Cualquier dispositivo que se puede construir tendrá algunas fuentes internas de ruido. Como se muestra en la figura, el dispositivo puede modelarse como un dispositivo libre de ruido con una ganancia de potencia $G_a(f)$ y una fuente de ruido de exceso a la salida para tomar en cuenta el ruido interno del dispositivo real. Algunos ejemplos de dispositivos lineales que tienen que caracterizarse en sistemas receptores son las líneas de transmisión con pérdida, los amplificadores de RF, los convertidores reductores y los amplificadores de IF.

La ganancia de potencia de estos dispositivos es la ganancia de potencia disponible.

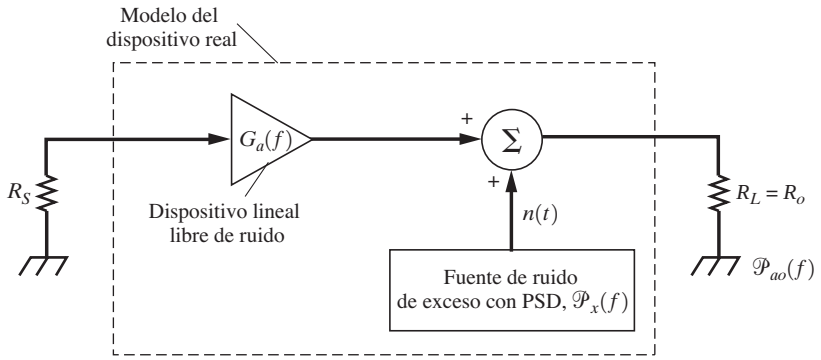


Figura 8–19 Modelo de ruido para un dispositivo real.

DEFINICIÓN. La *ganancia de potencia disponible* de un dispositivo lineal es

$$G_a(f) = \frac{\text{PSD disponible a la salida del dispositivo}}{\text{PSD disponible a la salida de la fuente}} = \frac{\mathcal{P}_{ao}(f)}{\mathcal{P}_{as}(f)} \tag{8–18}$$

Cuando se mide $\mathcal{P}_{ao}(f)$ para obtener $G_a(f)$, la potencia de ruido de la fuente se hace lo suficientemente grande para que el ruido de la *fuente* amplificado que aparece a la salida domine cualquier otro ruido. Además, note que $G_a(f)$ se define en términos de la PSD real (es decir, no normalizada). En general, $G_a(f)$ dependerá de la impedancia de control de la fuente, así como de los elementos dentro del mismo dispositivo, pero *no* de la impedancia de carga. Si la impedancia de la fuente y la impedancia de salida del dispositivo son iguales, $G_a(f) = |H(f)|^2$, donde $H(f)$ es el voltaje o la función de transferencia corriente del dispositivo lineal.

Para caracterizar las ventajas de un dispositivo se requiere de una figura del mérito que compare al dispositivo real (ruidoso) con un dispositivo ideal (es decir, sin fuentes internas de ruido). Universalmente se manejan dos figuras de mérito, y ambas proporcionan la misma información, principalmente qué tan malo es el rendimiento de ruido del dispositivo actual. Éstas son la figura de ruido y la temperatura efectiva de ruido de entrada.

DEFINICIÓN. La *figura del ruido puntual* de un dispositivo lineal se obtiene terminando el dispositivo con una fuente de ruido térmico de temperatura T_0 en la entrada y una carga acoplada en la salida, como se indica en la figura 8-19. La figura de ruido puntual es

$$F_s(f) = \frac{\text{PSD disponible medida a la salida del dispositivo real}}{\text{PSD disponible a la salida de un dispositivo ideal con la misma ganancia disponible}}$$

o

$$F_s(f) = \frac{\mathcal{P}_{ao}(f)}{(kT_0/2)G_a(f)} = \frac{(kT_0/2)G_a(f) + \mathcal{P}_x(f)}{(kT_0/2)G_a(f)} > 1 \tag{8–19}$$

El valor de R_s es el mismo que el de la resistencia de fuente que se ocupó cuando se evaluó $G_a(f)$. Se usa una temperatura estándar de $T_0 = 290$ K, ya que este es el valor adoptado por el IEEE [Haus, 1963].

$F_s(f)$ se conoce como la *figura de ruido puntual*, ya que se refiere a la caracterización del ruido en un "punto" en particular o una frecuencia en el espectro. Note que $F_s(f)$ siempre es mayor que la unidad para un dispositivo real, pero es casi igual a la unidad si el dispositivo se aproxima a un dispositivo ideal. $F_s(f)$ es una función de la temperatura de fuente, T_0. En consecuencia, cuando se evalúa una figura de ruido, se maneja una temperatura estándar de $T_0 = 290$ K. Esto corresponde a una temperatura de 62.3°F.

A menudo se desea una figura promedio de ruido en lugar de una figura de ruido puntual. El promedio se mide sobre algún ancho de banda *B*.

DEFINICIÓN. La *figura promedio de ruido* es

$$F = \frac{P_{ao}}{kT_0 \int_{f_0 - B/2}^{f_0 + B/2} G_a(f)\, df} \tag{8–20}$$

donde

$$P_{ao} = 2 \int_{f_0 - B/2}^{f_0 + B/2} \mathcal{P}_{ao}(f)\, df$$

es la salida disponible medida en un ancho de banda de *B* hertz de ancho y centrado sobre una frecuencia de f_0 y $T_0 = 290$ K.

Si la ganancia disponible es constante sobre la banda de tal manera que $G_a(f) = G_a$ sobre el intervalo de frecuencias $(f_0 - B/2) \leq f \leq (f_0 + B/2)$, entonces la figura de ruido se convierte en

$$F = \frac{P_{ao}}{kT_0 B G_a} \tag{8–21a}$$

La figura de ruido a menudo se mide con el método de factor *Y*. Esta técnica se ilustra en el problema 8-15. El analizador de la figura de ruido N8973A de Agilent emplea el método del factor *Y* para medir la figura de ruido en dispositivos.

La figura de ruido también puede especificarse en unidades de decibeles:[11]

$$F_{\text{dB}} = 10 \log(F) = 10 \log\left(\frac{P_{ao}}{kT_0 B G_a}\right) \tag{8–21b}$$

Por ejemplo, suponga que el fabricante de un preamplificador de RF especifica que un preamp de RF tiene una figura de ruido de 2 dB. Esto significa que la potencia de ruido real a la salida es 1.58 veces la potencia que ocurriría debido a la amplificación del ruido térmico de la entrada. La otra figura de mérito para evaluar el rendimiento del ruido de un dispositivo lineal es la temperatura efectiva de ruido de entrada, que se ilustra en la figura 8-20.

DEFINICIÓN. La *temperatura efectiva puntual de ruido de entrada*, $T_{es}(f)$, de un dispositivo lineal es la temperatura *adicional* que se requiere para una fuente de entrada, la cual controla a un dispositivo ideal (libre de ruido), para producir la misma PSD disponible a la salida del dispositivo ideal, como se obtiene a partir del dispositivo real cuando éste se controla mediante la fuente de entrada con temperatura T_i kelvin. Es decir, $T_{es}(f)$ se define mediante

[11] Algunos autores se refieren a *F* como *factor de ruido* y a F_{dB} como *figura de ruido*.

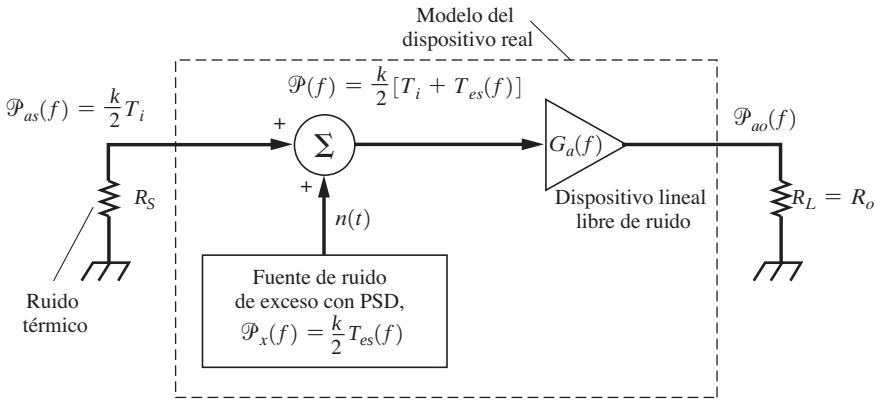


Figura 8–20 Otro modelo de ruido para un dispositivo real.

$$\mathcal{P}_{ao}(f) = G_a(f)\,\frac{k}{2}\,[T_i + T_{es}(f)] \tag{8–22}$$

donde $\mathcal{P}_{ao}(f)$ es la PSD disponible a la salida del dispositivo real cuando éste se controla mediante una fuente de entrada con temperatura T_i, y $T_{es}(f)$ es la temperatura efectiva puntual de ruido de entrada.

La *temperatura efectiva promedio de ruido de entrada*, T_e, se define con la ecuación

$$P_{ao} = k(T_i + T_e)\int_{f_0 - B/2}^{f_0 + B/2} G_a(f)\,df \tag{8–23}$$

donde la potencia de ruido disponible medida a la salida del dispositivo en una banda de B hertz de ancho es

$$P_{ao} = 2\int_{f_0 - B/2}^{f_0 + B/2} \mathcal{P}_{ao}(f)\,df \tag{8–24}$$

Ya que $G_a(f)$ depende de la impedancia de la fuente, así como los parámetros del dispositivo, $T_e(f)$ dependerá también de la impedancia de la fuente ocupada, así como de las características del dispositivo mismo, pero no del valor que se usa para T_i. En la definición de T_e note que los estándares del IEEE no especifican que $T_i = T_0$, ya que el valor que se obtiene para T_e no depende del valor que se maneja para T_i. Sin embargo, por conveniencia se considera que $T_i = T_0 = 290$ K. La temperatura efectiva de ruido de entrada puede también evaluarse mediante el método del factor Y, como se ilustra en el problema 8-15.

Cuando la ganancia es plana (constante) sobre la banda de frecuencia, $G_a(f) = G_a$, la temperatura efectiva de ruido de entrada simplemente es

$$T_e = \frac{P_{ao} - kT_iG_aB}{kG_aB} \tag{8–25}$$

Note que $T_{es}(f)$ y T_e son mayores que cero para un dispositivo real, pero si el dispositivo es casi ideal (fuentes de ruido internas pequeñas), entonces estarán muy cercanas a cero.

Cuando se evaluó T_e mediante la ecuación (8-23) se usó una fuente de entrada con algún valor conveniente de T_i. Sin embargo, cuando el dispositivo se emplea en un sistema, la potencia de ruido disponible de la fuente será diferente si T_i es diferente. Por ejemplo, suponga que el dispositivo es

un preamplificador de RF y la fuente es una antena. Entonces la potencia disponible a la salida del amplificador cuando éste se conecta a la antena es ahora de[12]

$$P_{ao} = 2\int_{f_0-B/2}^{f_0+B/2} \mathcal{P}_{as}(f)\,G_a(f)\,df + kT_e\int_{f_0-B/2}^{f_0+B/2} G_a(f)\,df \tag{8–26}$$

donde $\mathcal{P}_{as}(f)$ es la PSD disponible a la salida de la fuente (antena) y T_e la temperatura efectiva promedio de entrada del amplificador que se evaluó con la temperatura de la fuente de entrada T_i. Si la ganancia del amplificador es aproximadamente constante sobre la banda, esto se reduce a

$$P_{ao} = G_a P_{as} + kT_e B\,G_a \tag{8–27}$$

donde la potencia disponible de la fuente (antena) es

$$P_{as} = 2\int_{f_0-B/2}^{f_0+B/2} \mathcal{P}_{as}(f)\,df \tag{8–28}$$

Aún más, la potencia disponible de la fuente puede caracterizarse por su temperatura de ruido, T_s, por tanto, ocupando la ecuación (8-17), se tiene que

$$P_{as} = kT_s B \tag{8–29}$$

En las aplicaciones de recepción vía satélite de una estación terrestre, la temperatura de ruido de la antena (fuente) puede ser de $T_s = 32$ K a 4 GHz para una antena parabólica donde el ruido de la antena se debe a la radiación cósmica y a la energía que se recibe del suelo como resultado del patrón del haz del lóbulo lateral de la antena (la Tierra actúa como una fuente de ruido de cuerpo oscuro con $T = 280$ K). Note que la temperatura $T_s = 32$ K de la antena es "causa" de la resistencia de *radiación*, la cual no es la misma que una resistencia de pérdida (pérdidas de I^2R) asociada con la fuente térmica, y dicha T_s no tiene relación con la temperatura física de la antena.

En resumen, se han definido dos figuras de mérito: la figura de ruido y la temperatura efectiva de ruido de entrada. Al combinar las ecuaciones (8-19) y (8-22), donde $T_i = T_0$, se obtiene una relación entre estas dos figuras de mérito para las medidas puntuales:

$$T_{es}(f) = T_0[F_s(f) - 1] \tag{8–30a}$$

Aquí se requiere que $T_i = T_0$, ya que esto se usa en la definición para la figura de ruido que precede a la ecuación (8-19).

Utilizando las ecuaciones (8-21a) y (8-25), donde $T_i = T_0$, se obtiene la misma relación para las medidas de promedios:

$$T_e = T_0(F - 1) \tag{8–30b}$$

Ejemplo 8–2 T_e Y F PARA UNA LÍNEA DE TRANSMISIÓN

A continuación se evaluarán la temperatura efectiva de ruido de entrada, T_e, y la figura de ruido, F, para una línea de transmisión con pérdidas (un dispositivo lineal).[13] Esto puede llevarse a cabo terminando la línea de transmisión con una fuente y una resistencia de carga (las cuales tienen la misma temperatura física) que

[12] El valor de P_{ao} en las ecuaciones (8-26) y (8-27) es diferente que en las ecuaciones (8-23), (8-24) y (8-25).

[13] Estos resultados también son válidos para la T_e y F de los atenuadores emparejados (de impedancia).

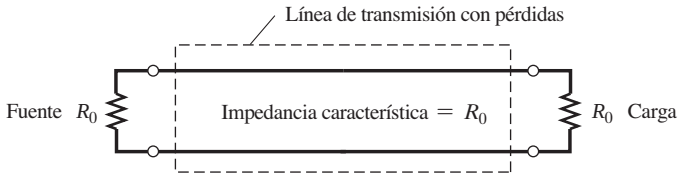


Figura 8–21 Medición de la figura de ruido de una línea de transmisión con pérdidas.

son iguales a la impedancia característica de la línea, como se muestra en la figura 8-21. La ganancia de la línea de transmisión es $G_a = 1/L$, donde L es la pérdida en la línea de transmisión (potencia de entrada dividida por la potencia de salida) en unidades absolutas (es decir, no en unidades de dB). Si se observa el puerto de salida de la línea de transmisión se nota un circuito equivalente que es resistivo (ruido térmico) con un valor de R_0 ohms, ya que la entrada de la línea se termina con una resistencia de R_0 ohms (la impedancia característica). Suponga que la temperatura física de la línea de transmisión es T_L, como se mide en la escala Kelvin. Debido a que la línea actúa como una fuente térmica, la potencia de ruido disponible a su salida es $P_{ao} = kT_LB$. Empleando la ecuación (8-25), donde la fuente posee la misma temperatura física $T_e = T_L$, se tiene que

$$T_e = \frac{kT_LB - kT_LG_aB}{kG_aB} = T_L\left(\frac{1}{G_a} - 1\right)$$

Por lo tanto, la temperatura efectiva de ruido de entrada para la línea de transmisión es

$$T_e = T_L(L - 1) \tag{8–31a}$$

donde T_L es la temperatura física (Kelvin) de la línea y L la pérdida de ésta.

Si la temperatura física de la línea resulta ser de T_0, esto se convierte en

$$T_e = T_0(L - 1) \tag{8–31b}$$

La figura de ruido para la línea de transmisión se obtiene ocupando la ecuación (8-30b) para convertir T_e a F. Por lo tanto, sustituyendo la ecuación (8-31a) en la ecuación (8-31b) se tiene que

$$T_L(L - 1) = T_0(F - 1)$$

Resolviendo para F se obtiene la figura de ruido para la línea de transmisión

$$F = 1 + \frac{T_L}{T_0}(L - 1) \tag{8–32a}$$

donde T_L es la temperatura física (Kelvin) de la línea, $T_0 = 290$ K y L es la pérdida en la línea. Si la temperatura física de la línea es de 290 K (63°F), entonces la ecuación (8-32a) se reduce a

$$F = \frac{1}{G_a} = L \tag{8–32b}$$

En unidades de decibeles, esto es $F_{\text{dB}} = L_{\text{dB}}$. En otras palabras, si una línea de transmisión tiene una pérdida de 3 dB, ésta tiene una figura de ruido de 3 dB siempre y cuando tenga una temperatura física de 63°F. Si la temperatura es de 32°F (273 K), entonces la figura de ruido, usando la ecuación (8-32a), será de 2.87 dB. Por lo tanto, F_{dB} es aproximadamente L_{dB}, si la línea de transmisión se ubica en un ambiente (rango de temperatura) habitable por seres humanos.

Caracterización del ruido de dispositivos lineales en cascada

En un sistema de comunicaciones a menudo se configuran varios dispositivos lineales (suministrados por diferentes fabricantes) en cascada para formar un sistema general, como se indica en la figura 8-22. En un sistema receptor, estos dispositivos pueden ser un preamplificador de RF conectado a una línea de transmisión que alimenta a un convertidor reductor y a un amplificador de IF. (Como se discutió en la sección 4-11, el convertidor reductor es un dispositivo lineal que puede caracterizarse por su ganancia de conversión de potencia y su figura de ruido.) Para los cálculos del rendimiento del sistema se requiere evaluar la ganancia general de potencia, G_a, y la caracterización general de ruido (la cual se obtiene mediante la figura general de ruido o la temperatura efectiva general de ruido de entrada) a partir de las especificaciones para los dispositivos individuales proveídos por los fabricantes.

La ganancia general de potencia disponible es

$$G_a(f) = G_{a1}(f)\,G_{a2}(f)\,G_{a3}(f)\,G_{a4}(f)\cdots \tag{8–33}$$

ya que, por ejemplo, para un sistema de cuatro etapas,

$$G_a(f) = \frac{\mathcal{P}_{ao4}}{\mathcal{P}_{as}} = \left(\frac{\mathcal{P}_{ao1}}{\mathcal{P}_{as}}\right)\left(\frac{\mathcal{P}_{ao2}}{\mathcal{P}_{ao1}}\right)\left(\frac{\mathcal{P}_{ao3}}{\mathcal{P}_{ao2}}\right)\left(\frac{\mathcal{P}_{ao4}}{\mathcal{P}_{ao3}}\right)$$

TEOREMA. *La figura general de ruido para dispositivos lineales en cascada es*[14]

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{a1}} + \frac{F_3 - 1}{G_{a1}G_{a2}} + \frac{F_4 - 1}{G_{a1}G_{a2}G_{a3}} + \cdots \tag{8–34}$$

como se muestra en la figura 8-22 (para un sistema de cuatro etapas).

Demostración. Este resultado puede obtenerse con el modelo de ruido de exceso de la figura 8-19 para cada etapa. Se demostrará el resultado para un sistema de dos etapas, como se modela en la figura 8-23. La figura general de ruido es

$$F = \frac{P_{ao2}}{(P_{ao2})_{\text{ideal}}} = \frac{P_{x2} + P_{ao1}G_{a2}}{G_{a1}G_{a2}P_{as}}$$

la cual se convierte en

$$F = \frac{P_{x2} + G_{a2}(P_{x1} + G_{a1}P_{as})}{G_{a1}G_{a2}P_{as}} \tag{8–35}$$

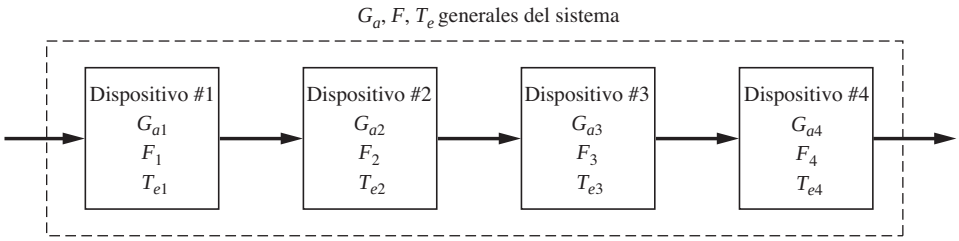


Figura 8–22 Cuatro dispositivos en cascada.

[14] Esto se conoce como fórmula de ruido de Friis.

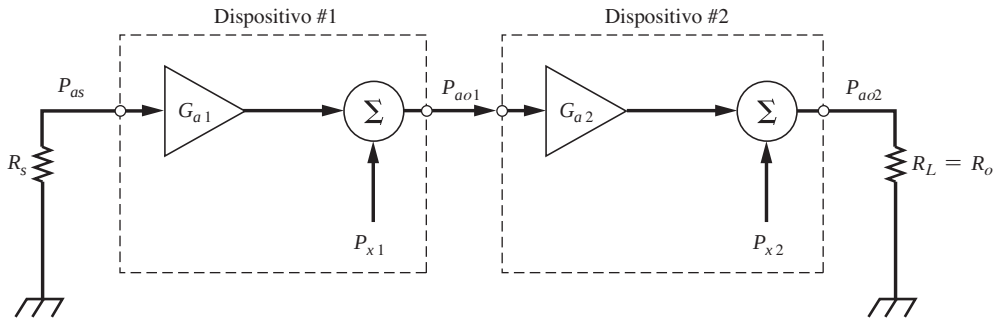


Figura 8–23 Modelo de ruido para dos dispositivos en cascada.

donde $P_{as} = kT_0B$ es la potencia disponible de la fuente térmica. P_{x1} y P_{x2} pueden obtenerse a partir de las figuras de ruido de los dispositivos individuales utilizando la figura 8-19, de tal forma que para el i-ésimo dispositivo,

$$F_i = \frac{P_{aoi}}{G_{ai}P_{as}} = \frac{P_{xi} + G_{ai}P_{as}}{G_{ai}P_{as}}$$

o

$$P_{xi} = G_{ai}P_{as}(F_i - 1) \tag{8–36}$$

Sustituyendo ésta en la ecuación (8-35) para P_{x1} y P_{x2} se obtiene

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{a1}}$$

la cual es idéntica a la ecuación (8-35) para el caso de dos etapas en cascada. Se puede mostrar de manera similar que la ecuación (8-34) es verdadera para cualquier número de etapas.

Observando la ecuación (8-34) se nota que si los términos G_{a1}, $G_{a1}G_{a2}$, $G_{a1}G_{a2}G_{a3}$, y así sucesivamente, son relativamente grandes, entonces F_1 dominará la figura general de ruido. Por lo tanto, en el diseño de un sistema receptor es importante que la primera etapa tenga una figura baja de ruido y una ganancia grande disponible, de tal forma que la figura de ruido del sistema general será lo más pequeña posible.

También se puede evaluar la temperatura efectiva general de ruido de entrada de varias etapas en cascada.

TEOREMA. *La temperatura efectiva general de ruido de entrada para dispositivos lineales en cascada es*

$$T_e = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_{a1}} + \frac{T_{e3}}{G_{a1}G_{a2}} + \frac{T_{e4}}{G_{a1}G_{a2}G_{a3}} + \cdots \tag{8–37}$$

como se muestra en la figura 8-22.

Se dejará que el estudiante demuestre este resultado como ejercicio.

Para un estudio más a fondo de los temas sobre la temperatura efectiva de ruido de entrada y la figura de ruido se remite al lector a una monografía con autoridad [Mumford y Scheibe, 1968].

Evaluación del balance de enlace

El rendimiento de un sistema de comunicaciones depende de qué tan grande sea la SNR a la entrada del detector en el receptor. Es una costumbre en ingeniería llamar a la relación señal a ruido antes de la detección de la relación *portadora a ruido* (CNR, por sus siglas en inglés). Por lo tanto, en esta sección se manejará la CNR para denotar la relación señal a ruido antes de la detección (para el caso pasabanda) y la SNR para denotar la relación señal a ruido después de la detección (para el caso en banda base). Aquí el interés cae en la evaluación de la CNR a la entrada del detector como una función de los parámetros del enlace de comunicaciones, tales como la EIRP transmitida, la pérdida de espacio, la ganancia de la antena receptora y la temperatura efectiva de ruido de entrada del sistema receptor. La fórmula que relaciona a estos parámetros del enlace del sistema con la CNR a la entrada del detector se conoce como *balance de enlace*.

El sistema de comunicaciones puede describirse mediante el diagrama de bloques que se muestra en la figura 8-24. En este modelo, el sistema receptor desde la salida de la antena receptora hasta el detector de entrada se modela mediante un bloque lineal que representa las etapas en cascada en el sistema receptor, como una línea de transmisión, un amplificador de bajo ruido (LNA, por sus

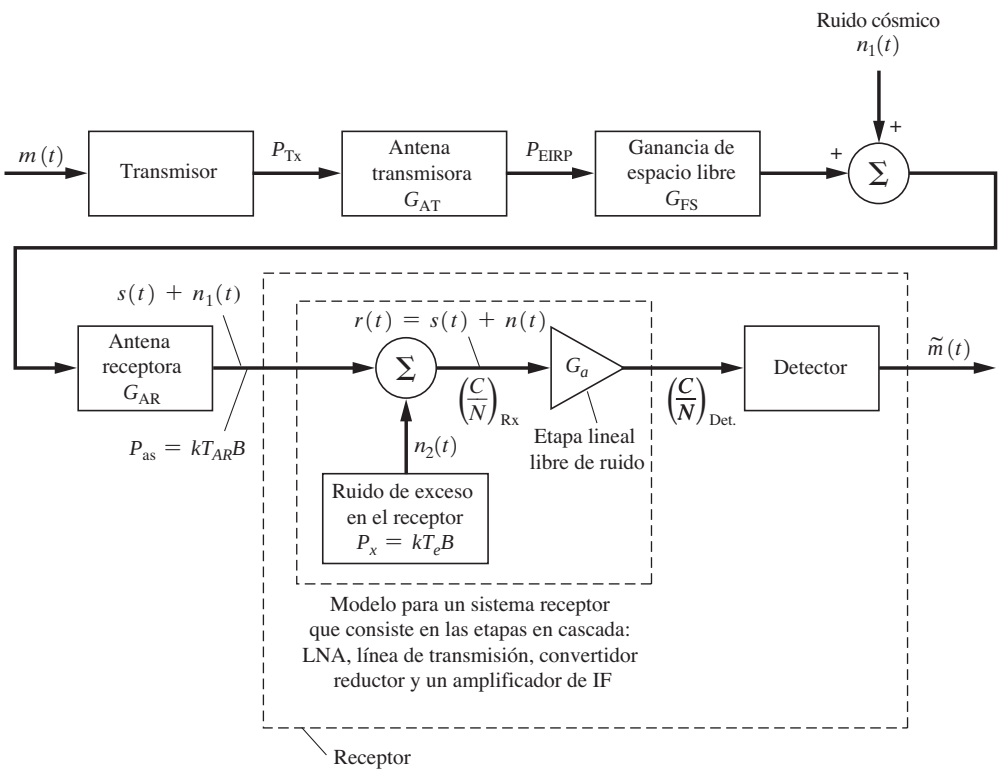


Figura 8–24 Modelo de un sistema de comunicaciones para la evaluación del balance de enlace.

siglas en inglés), un convertidor reductor y un amplificador de IF. Este bloque lineal describe la ganancia general de potencia disponible y la temperatura efectiva de ruido de entrada de estos dispositivos en cascada, como se describieron en la sección anterior y se modelaron en la figura 8-20.

Como se muestra en la figura 8-24, la CNR a la entrada del amplificador ideal (con ganancia G_a) es idéntica a la de la entrada del receptor, ya que el amplificador ideal no agrega ruido de exceso y amplifica la señal y el ruido igualmente bien en un ancho de banda de B hertz (el ancho de banda de IF). Por lo tanto, denotando esto simplemente mediante la CNR, se tiene que

$$\left(\frac{C}{N}\right) \triangleq \left(\frac{C}{N}\right)_{Rx} = \left(\frac{C}{N}\right)_{\text{det}} \tag{8–38}$$

donde estas relaciones de potencia de portadora a ruido se indican en la figura.

Ocupando las ecuaciones (8-2) y (8-3) se obtiene la potencia de la señal recibida

$$C_{\text{Rx}} = (P_{\text{EIRP}})\, G_{\text{FS}}\, G_{\text{AR}} \tag{8–39}$$

donde P_{EIRP} es la EIRP del transmisor, G_{FS} la ganancia de espacio libre y G_{AR} la ganancia de potencia de la antena receptora.

Cuando se usa la ecuación (8-17), la potencia de ruido disponible a la entrada del amplificador ideal en el modelo (figura 8-24) es

$$N = kT_{\text{sistema}}B \tag{8–40}$$

donde B es el ancho de banda de IF equivalente. La temperatura de ruido del sistema receptor es

$$T_{\text{sistema}} = T_{\text{AR}} + T_e \tag{8–41}$$

donde T_{AR} es la temperatura de ruido de la antena (debido al ruido cósmico recibido y a la radiación de cuerpo oscuro de la Tierra) y T_e la temperatura efectiva de ruido de entrada del sistema receptor general.

Cuando se combinan las ecuaciones (8-39) y (8-40) se tiene que la relación portadora a ruido a la entrada del detector es

$$\frac{C}{N} = \frac{P_{\text{EIRP}} G_{\text{FS}} G_{\text{AR}}}{kT_{\text{sistema}}B} \tag{8–42}$$

Para aplicaciones en ingeniería, esta fórmula se convierte a unidades de decibeles. Utilizando la ecuación (8-9) y tomando 10 log $[\cdot]$ de ambos lados de la ecuación (8-42) se encuentra que la relación portadora a ruido recibida a la entrada del detector en decibeles es

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{\text{dB}} = (P_{\text{EIRP}})_{\text{dBw}} - (L_{\text{FS}})_{\text{dB}} + \left(\frac{G_{\text{AR}}}{T_{\text{sistema}}}\right)_{\text{dB}} - k_{\text{dB}} - B_{\text{dB}} \tag{8–43}$$

donde

$(P_{\text{EIRP}})_{\text{dBw}} = 10 \log (P_{\text{EIRP}})$ es la EIRP del transmisor en dB arriba de 1 W,

$(L_{\text{FS}})_{\text{dB}} = 20 \log [(4\pi d)/\lambda]$ es la pérdida en trayectoria,[15]

[15] Esta expresión para la pérdida en trayectoria de espacio libre puede modificarse para incluir los efectos de un canal de múltiples trayectorias dentro de un ambiente de algún edificio urbano [consulte las ecuaciones (8-47) y (8-67)].

$$k_{\text{dB}} = 10 \log(1.38 \times 10^{-23}) = -228.6,$$

$$B_{\text{dB}} = 10 \log(B) \quad (B \text{ es el ancho de banda de IF en hertz}).$$

Para los sistemas de comunicaciones analógicos, la SNR a la salida del detector puede relacionarse con la CNR a la entrada del detector. La relación exacta depende del tipo de detector, así como de la modulación empleada. Estas relaciones se desarrollaron en el capítulo 7. En la tabla 7-2 y la figura 7-27 se hace un resumen de ellas con el uso de la ecuación (7-85), donde $C/N = (S/N)_{\text{entrada}}$. El ejemplo 8-4 ocupa la ecuación (8-43) para evaluar el rendimiento de un sistema receptor de CATV vía satélite.

Para los sistemas de comunicaciones digitales, la BER a la salida digital es una medida del rendimiento. La BER se relaciona con E_b/N_0 a través de la CNR. La relación E_b/N_0 a CNR se desarrollará en la siguiente sección. Los problemas de estudio SA8-1 y 8-2 evalúan la BER para un sistema receptor DSS de televisión.

Balance de enlace de E_b/N_0 para sistemas digitales

En los sistemas de comunicaciones digitales, la probabilidad de error en bit P_e para la señal digital a la salida del detector describe la calidad de los datos recuperados. P_e, también conocida como BER, es una función de la relación de la energía por bit a la PSD de ruido, (E_b/N_0), como se mide a la entrada del detector. La relación exacta entre P_e y E_b/N_0 depende del tipo de señalización digital manejada, como se muestra en la tabla 7-1 y en la figura 7-14. En esta sección se evaluará la E_b/N_0 que se obtiene a la entrada del detector como una función de los parámetros del enlace de comunicaciones.

La energía por bit se obtiene mediante $E_b = CT_b$, donde C es la potencia de la señal y T_b el tiempo que se requiere para enviar un bit. Empleando la ecuación (8-40) se observa que la PSD de ruido (un solo lado) es $N_0 = kT_{\text{sistema}}$. Por lo tanto,

$$\frac{C}{N} = \frac{E_b/T_b}{N_0 B} = \frac{E_b R}{N_0 B} \tag{8–44}$$

donde $R = 1/T_b$ es la velocidad de datos (b/s). Ocupando la ecuación (8-44) en la ecuación (8-42) se tiene que

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{P_{\text{EIRP}} G_{\text{FS}} G_{\text{AR}}}{k T_{\text{sistema}} R} \tag{8–45}$$

En unidades de decibeles, la E_b/N_0 que se recibe a la entrada del detector en un receptor de comunicaciones digital se relaciona con los parámetros de enlace mediante

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\text{dB}} = (P_{\text{EIRP}})_{\text{dBw}} - (L_{\text{FS}})_{\text{dB}} + \left(\frac{G_{\text{AR}}}{T_{\text{sistema}}}\right)_{\text{dB}} - k_{\text{dB}} - R_{\text{dB}} \tag{8–46}$$

donde $(R)_{\text{dB}} = 10 \log(R)$ y R es la velocidad de datos (b/s).

Por ejemplo, suponga que se tiene una señalización BPSK y que se usa un detector óptimo en el receptor. Entonces se requiere que $(E_b/N_0)_{\text{dB}} = 8.4$ dB para una $P_e = 10^{-4}$ (vea la figura 7-14).[16] Utilizando la ecuación (8-46) se observa que los parámetros del enlace de comunicaciones pueden seleccionarse para obtener la $(E_b/N_0)_{\text{dB}}$ de 8.4 dB requerida. Note que conforme la velocidad de bit aumenta, la potencia transmitida debe disminuir, si no el rendimiento del sistema receptor, denotado

[16] Si, además, se empleara una codificación con ganancia de 3 dB (consulte la sección 1-11), entonces se requeriría de una E_b/N_0 de 5.4 dB para una $P_e = 10^{-4}$.

por $(G_{AR}/T_{sistema})_{dB}$, tendrá que mejorarse para mantener la $(E_b/N_0)_{dB}$ de 8.4 dB requerida. En los problemas SA8-1 y SA8-2 se muestran ejemplos sobre la evaluación del balance de enlace de E_b/N_0 para obtener la BER de un sistema receptor DSS de televisión.

Pérdida en trayectoria para ambientes urbanos inalámbricos

La pérdida en trayectoria para un ambiente inalámbrico sin espacio libre, como una trayectoria con obstrucciones que consisten en edificios y árboles, es difícil de modelar. Este es el caso para los sistemas terrestres celulares e inalámbricos donde se reciben señales con múltiples trayectorias que consisten en las señales de las trayectorias reflejadas además de la señal de trayectoria directa, así como atenuación adicional en la señal conforme las señales pasan a través del follaje y las paredes de edificios. A menudo se toman medidas de la fuerza de la señal recibida a lo largo de la trayectoria para validar resultados predichos. Para una trayectoria de espacio libre, el exponente de la pérdida en trayectoria es de $n = 2$□esto es, la pérdida en trayectoria varía con el cuadrado $(n = 2)$ de la distancia, como se muestra en la ecuación (8-9). Cuando existen obstrucciones, n es mayor que 2. Generalmente ésta se encuentra en el rango de 2 a 6 con un valor típico de $n = 3$. Cuando la pérdida en trayectoria se expresa en dB entre las antenas transmisora y receptora, esto proporciona un modelo de pérdida en trayectoria en distancia logarítmica. Por lo tanto, la pérdida en trayectoria obstruida es [Rappaport, 2002, p. 138].

$$L_{dB}(d) = L_{FSdB}(d_0) + 10n \log\left(\frac{d}{d_0}\right) + X_{dB} \tag{8–47a}$$

donde

$$L_{FSdB}(d_0) = 20 \log\left[(4\pi d_0)/\lambda\right] \tag{8–47b}$$

$L_{dB}(d)$ es la pérdida en trayectoria en dB para una distancia de d entre las antenas, $L_{LFSdB}(d_0)$ es la pérdida de espacio libre para una distancia d_0 que está cercana al transmisor, pero en el campo lejano, y $d > d_0$□n es el exponente de la pérdida en trayectoria, y X_{dB} una variable aleatoria gaussiana con media de cero que representa las variaciones en la pérdida en trayectoria causadas por múltiples reflexiones. Típicamente, d_0 se considera igual a 1 km para sistemas móviles urbanos grandes, 100 m para sistemas de microcélula y 1 m para sistemas interiores inalámbricos. En el problema SA8-3 se muestra un ejemplo del uso de la figura (8-47) para evaluar el balance de enlace y la BER para un dispositivo de comunicaciones personal inalámbrico (PCD, por sus siglas en inglés).

Ejemplo 8–3 EVALUACIÓN DEL BALANCE DE ENLACE PARA UNA TERMINAL DE TELEVISIÓN DE RECEPCIÓN ÚNICAMENTE PARA SEÑALES VÍA SATÉLITE

A continuación se evaluará el balance del enlace para una terminal de televisión de recepción únicamente (TVRO, por sus siglas en inglés) ocupada para recibir señales de TV vía un satélite. Se asume que esta terminal receptora se ubica en Washington, D.C., y recibe señales de un satélite Hughes *Galaxy* que está en una órbita geoestacionaria a una longitud de 134° al oeste por encima del ecuador. Las especificaciones del equipo de recepción propuesto se presentan en la tabla 8-5 junto con las coordenadas del sitio de recepción y los parámetros del satélite. Esta terminal TVRO es típica de aquellas usadas en el centro distribuidor de los sistemas CATV para la recepción de señales de TV que se difunden vía satélite. Como se discutió en la sección 8-5, la señal de video compuesta en banda base NTSC se difunde vía satélite al modular esta señal por frecuencia sobre una portadora de 6 GHz que se radia al satélite. □ste realiza una conversión reductora en la señal FM a 4 GHz y retransmite esta señal FM a la terminal TVRO.

TABLA 8–5 PARÁMETROS TÍPICOS PARA LA DIFUSIÓN DE TELEVISIÓN VÍA SATÉLITE

Elemento	Valor del parámetro
Satélite Hughes *Galaxy I*	
Órbita	Geoestacionaria
Ubicación (por encima del ecuador)	Longitud de 134° al Oeste
Banda de frecuencia de enlace de subida	6 GHz
Banda de frecuencia de enlace de bajada	4 GHz
$(P_{\text{EIRP}})_{\text{dBw}}$	36 dBw
Terminal TVRO	
Ubicación del sitio	Washington, D.C., latitud de 38.8° al Norte, longitud de 77° al Oeste
Antena	
Tipo de antena	Parabólica de 10 pies de diámetro
Temperatura de ruido	32 K (a la salida de alimentación) para una elevación de 16.8°
Ganancia de línea de alimentación	0.98
Amplificador de bajo ruido	
Temperatura de ruido	40 K
Ganancia	50 dB
Receptor	
Fabricante	Microdyne Corp., Modelo 1100-TVR (×24)
Temperatura de ruido	2610 K
Ancho de banda de IF	30 MHz
Umbral de FM	8 dB CNR

El rastro de la EIRP de la antena receptora para el satélite *Galaxy I* se muestra en la figura 8-25. A partir de ésta, se observa que la EIRP dirigida hacia Washington, D.C., es aproximadamente de 36 dBw, como se obtiene para su inclusión en la tabla 8-5.

Se puede mostrar que los *ángulos de búsqueda* de la antena TVRO pueden evaluarse con las siguientes fórmulas [Davidoff, 1990]. La elevación de la antena TVRO es

$$E = \tan^{-1}\left[\frac{1}{\tan\beta} - \frac{R}{(R+h)\operatorname{sen}\beta}\right], \tag{8–48a}$$

donde

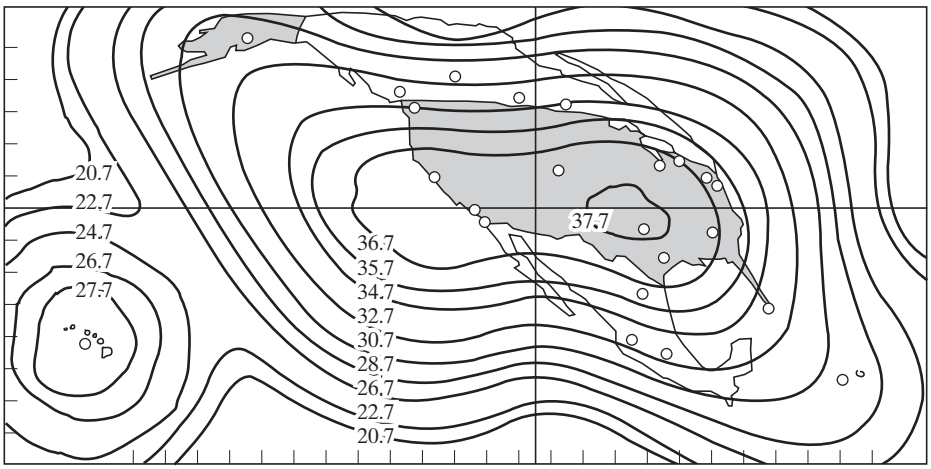
$$\beta = \cos^{-1}[\cos\varphi\cos\lambda] \tag{8–48b}$$

y λ es la diferencia entre la longitud del sitio de la TVRO y la longitud del *punto de la subestación* (es decir, el punto directamente por debajo del satélite geoestacionario a lo largo del ecuador) φ es la latitud del sitio de la TVRO, $R = 3{,}963$ millas terrestres es el radio de la Tierra y $h = 22{,}242$ millas terrestres es la altitud del satélite síncrono. La distancia entre el sitio TVRO y el satélite, llamada *distancia en declive*, se obtiene mediante la ley del coseno:

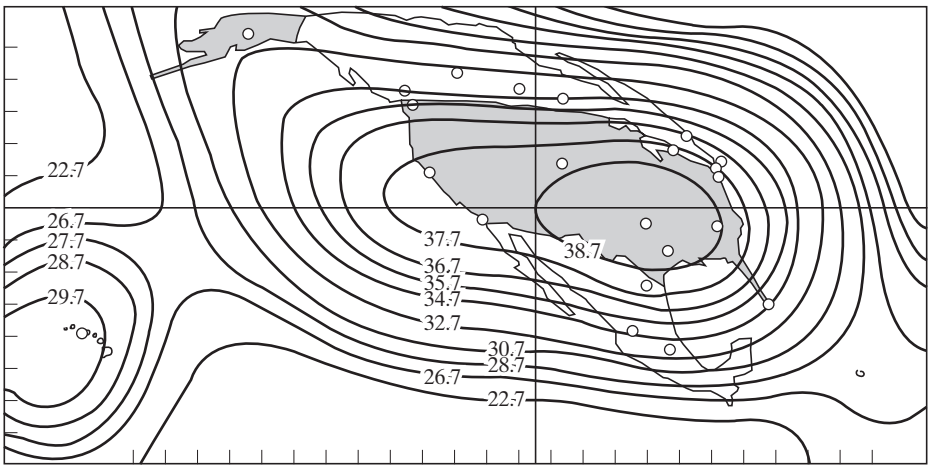
$$d = \sqrt{(R+h)^2 + R^2 - 2R(R+h)\cos\beta} \tag{8–49}$$

El acimut de la antena TVRO es

$$A = \cos^{-1}\left(-\frac{\tan\varphi}{\tan\beta}\right) \tag{8–50}$$



Transmisión vertical



Transmisión horizontal

Figura 8–25 Rastro de la EIRP del patrón de antena del *Galaxy I* (longitud de 134° al Oeste, contornos dados en unidades de dBw). [Cortesía de Hughes Communications, Inc., una subsidiaria completamente absorbida de Hughes Aircraft Company.]

donde el acimut verdadero, medido en el sentido de las manecillas del reloj a partir del norte, está dado por A o por $360° - A$, según sea apropiado, ya que una calculadora resulta en un valor entre 0° y 180° para $\cos^{-1}(x)$. Utilizando estas fórmulas para el sitio de la TVRO en Washington, D.C.,[17] se tiene que $\lambda = 134 - 77 = 57°$ y

$$\beta = \cos^{-1}[\cos(38.8)\cos(57)] = 64.9° \tag{8–51}$$

[17] En este caso, por conveniencia y para facilitar la interpretación de las respuestas, se configura la calculadora para evaluar todas las funciones trigonométricas en grados (y no en radianes).

La distancia en declive es

$$d = \sqrt{(26{,}205)^2 + (3963)^2 - 2(3963)(26{,}205)\cos 64.9)}$$
$$= 24{,}784 \text{ millas} \tag{8–52}$$

El ángulo de elevación de la antena TVRO es

$$\mathrm{E} = \tan^{21}\left[\frac{1}{\tan(64.9)} - \frac{3963}{(26{,}205)\,\mathrm{sen}(64.9)}\right] = 16.88 \tag{8–53}$$

El ángulo de acimut de la antena TVRO es

$$A = \cos^{-1}\left[\frac{-\tan(38.8)}{\tan(64.9)}\right] = 247.9° \tag{8–54}$$

Por lo tanto, los ángulos de búsqueda de la antena TVRO en Washington, D.C., al satélite *Galaxy I* son $E = 16.8°$ y $A = 247.9°$.

La figura 8-26 muestra un diagrama de bloques que describe al sistema receptor. Empleando la ecuación (8-43), la CNR a la entrada del detector del receptor es

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{\text{dB}} = (P_{\text{EIRP}})_{\text{dBw}} - (L_{\text{FS}})_{\text{dB}} + \left(\frac{G_{\text{AR}}}{T_{\text{sistema}}}\right)_{\text{dB}} - k_{\text{dB}} - B_{\text{dB}} \tag{8–55}$$

La pérdida en trayectoria correspondiente para $d = 24{,}784$ millas a una frecuencia de 4 GHz es

$$(L_{\text{FS}})_{\text{dB}} = 20 \log\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right) = 196.5 \text{ dB}$$

Para una parábola de 10 pies (3.05 m), ocupando la tabla 8-4 se tiene que la ganancia de la antena receptora es

$$(G_{\text{AR}})_{\text{dB}} = 10 \log\left[\frac{7\pi(3.05/2)^2}{\lambda^2}\right] = 10 \log(9085) = 39.6 \text{ dB}$$

De las ecuaciones (8-41) y (8-37) se obtiene la temperatura de ruido del sistema

$$T_{\text{sistema}} = T_{\text{AR}} + T_{\text{alimentación}} + \frac{T_{\text{LNA}}}{G_{\text{alimentación}}} + \frac{T_{\text{receptor}}}{G_{\text{alimentación}} G_{\text{LNA}}} \tag{8–56}$$

donde la temperatura de ruido especificada de la antena, incluyendo la alimentación, es $T_A = (T_{\text{AR}} + T_{\text{alimentación}}) = 32$ K.

La temperatura T_{AR} *no* es la temperatura ambiental de la antena (la cual es de alrededor de 290 K) ya que su resistencia efectiva no consiste en una resistencia térmica sino en una de radiación. Esto es, si la potencia de RF se alimenta a la antena, ésta no se disipará en la antena sino que se radiará al espacio.

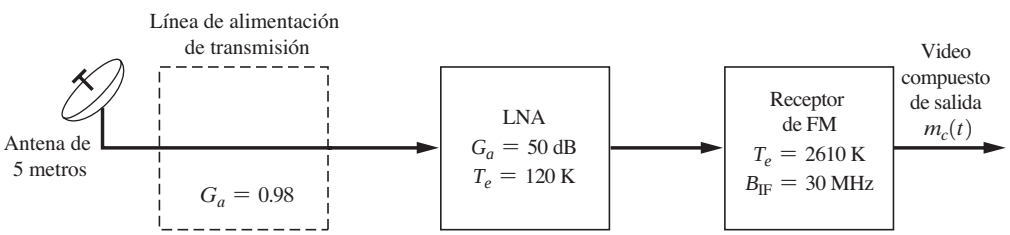


Figura 8–26 Terminal TVRO.

En consecuencia, T_{AR} se conoce como *temperatura de ruido celeste* y es una medida de la cantidad de potencia de ruido cósmico que se recibe del espacio ultraterrestre y el ruido causado por la atenuación atmosférica, donde esta potencia es de $P_{AR} = kT_{AR}B$. Algunos gráficos que proporcionan la medida de la temperatura de ruido celeste como una función de la frecuencia de RF y del ángulo de elevación de la antena están disponibles [Jordan, 1985, capítulo 27; Pratt y Bostian, 1986].

Sustituyendo los parámetros del sistema receptor en la ecuación (8-56) se tiene que

$$T_{\text{sistema}} = 32 + \frac{40}{0.98} + \frac{2610}{(0.98)(100{,}000)} = 72.8 \text{ K}$$

Por lo tanto,[18]

$$\left(\frac{G_{AR}}{T_{\text{sistema}}}\right)_{dB} = 10 \log \left(\frac{9{,}085}{72.8}\right) = 21.0 \text{ dB/K}$$

también,

$$(B)_{dB} = 10 \log (30 \times 10^6) = 74.8$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (8-55) resulta en

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{dB} = 36 - 196.5 + 21.0 - (-228.6) - 74.8$$

Por lo tanto, la CNR a la entrada del detector (dentro del receptor de FM) es

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{dB} = 14.3 \text{ dB} \tag{8–57}$$

Una CNR de 14.3 dB no parece ser muy buena, ¿verdad? De hecho, la pregunta es: ¿se puede obtener una señal de video de alta calidad a la salida del detector con una CNR de 14.3 dB a la entrada del detector? Esto puede responderse fácilmente si se tienen curvas de rendimiento del detector, como las dos que se grafican en la figura 8-27. Una es para la salida de un receptor que usa un discriminador de FM para el detector de FM, y la otra para un receptor (Microdyne 1100TVR) que maneja un detector de PLL FM para proporcionar una extensión de umbral.[19] Para una CNR de 14.3 dB a la entrada, ambos receptores resultarán en una SNR de salida de 51 dB, lo cual corresponde a una imagen de alta calidad. Sin embargo, si la señal recibida del satélite se desvanece por 6 dB debido a las condiciones atmosféricas, la SNR de salida del receptor con un discriminador de FM será sólo de alrededor de 36 dB, mientras que el receptor con detección de extensión de umbral tendrá una SNR de salida de alrededor de 45 dB.

8–7 SISTEMAS DE FIBRA ÓPTICA

Desde el año de 1980 los sistemas de transmisión por cable de fibra óptica se han hecho comercialmente factibles. Esto se indica en la tabla 8-2, la cual muestra que los portadores comunes han instalado sistemas de fibra óptica de manera amplia en Estados Unidos, Japón, Gran Bretaña y Canadá.

[18] Aunque es un nombre equivocado, algunos ingenieros especifican dB/K como unidades para $(G/T)_{dB}$.

[19] El punto de umbral es aquel donde la "rodilla" Ocurre en el gráfico de $(S/N)_{salida}$ con respecto a $(C/N)_{entrada}$. En la característica para los receptores de extensión de umbral esta ridilla se extiende a la izquierda (rendimiento mejorado) cuando se compara con la rodilla para el receptor correspondiente que utiliza un discriminador como detector.

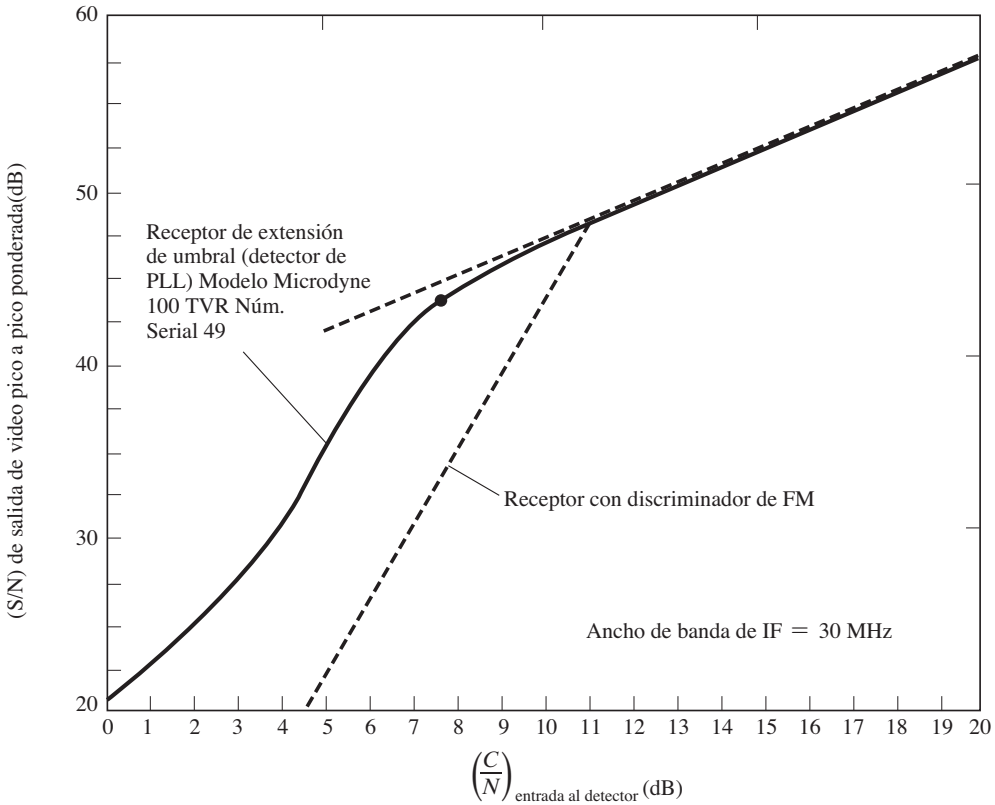

60
50
40
30
20
(S/N) de salida de video pico a pico ponderada(dB)
Receptor de extensión de umbral (detector de PLL) Modelo Microdyne 100 TVR Núm. Serial 49
Receptor con discriminador de FM
Ancho de banda de IF = 30 MHz
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
(C/N) entrada al detector (dB)

Figura 8–27 SNR de salida como una función de la CNR de entrada al detector de FM. [Curva para el receptor de Microdyne, modelo 1100TVR, cortesía de Microdyne Corporation, Ocala, FL, 1981.]

El cable de fibra óptica es el medio preferido de transmisión subterránea. Como también se muestra en la tabla 8-2, los sistemas de fibra óptica transoceánicos son populares en la actualidad. Los sistemas digitales de fibra óptica manejan una OOK simple para la modulación de una fuente óptica para producir un rayo de luz modulado. La fuente óptica tiene una longitud de onda en el rango de 0.85 a 1.6 μm, lo que equivale a un rango de 190 a 350 THz[20]. (También se pueden construir sistemas analógicos de fibra óptica por AM).

Las fuentes ópticas pueden clasificarse en dos categorías: (1) diodos emisores de luz (LED) que producen luz incoherente y (2) láser de estado sólido que producen luz coherente (frecuencia con una sola portadora). La fuente de LED es duradera y económica□posee una salida de potencia relativamente baja de cerca de –15 dBm (incluyendo pérdidas en acoplamiento) y un ancho de banda de modulación pequeño de cerca de 50 MHz. El diodo láser tiene una salida de potencia relativamente alta de cerca de +5 dBm (incluyendo pérdidas en acoplamiento) y un ancho de banda de modulación grande de cerca de 1 GHz. Se prefiere el diodo láser sobre el LED, ya que el primero produce luz coherente y tiene una potencia de salida alta.

[20] Un THz equivale a 10^{12} Hz.

La fuente de luz se acopla al cable de fibra óptica y éste es el medio de transmisión del canal. Los cables de fibra se pueden clasificar en dos categorías: (1) multimodal y (2) de un solo modo. La fibra multimodal tiene un diámetro de núcleo de 50 μm y un diámetro de revestimiento de 125 μm. La luz se refleja en el borde entre el núcleo y el revestimiento y se propaga a través de la fibra para producir múltiples rutas de flujo de luz con diferentes longitudes. Esto causa una dispersión de pulsos de la señal OOK en el lado del receptor y, por lo tanto, limita severamente la velocidad de transmisión de bit que se puede alcanzar. La fibra de un solo modo tiene un diámetro de núcleo de aproximadamente 8 μm y causa una propagación de una sola onda. En consecuencia, existe poca dispersión de los pulsos de luz recibidos. Se prefiere la fibra de un solo modo debido a su mayor rendimiento.

En el lado receptor de la fibra, el receptor consiste en un diodo PIN, un fotodiodo de avalancha (APD) o un transistor GaAsMESFES empleado como detector óptico. Se puede usar cualquiera de estos dispositivos como detector en el caso de sistemas de 0.85 μm. El APD a menudo se ocupa en los sistemas de 1.3 μ y 1.55 μm. Estos detectores actúan como simples detectores de envolvente. Como se muestra en la figura 7-14, se puede obtener un mejor rendimiento (y con una probabilidad más baja de error en bit) si se utiliza un sistema coherente de detección que cuente con un detector de producto. Esto requiere de una fuente de luz coherente en el receptor que se combina con la señal OOK recibida mediante la acción no lineal del fotodetector. Es posible que existan sistemas coherentes basados en PSK y FSK [Basch y Brown, 1985], pero casi nunca resultan económicos. Los sistemas de multiplexión por división de forma de onda (DWDM) tienen una capacidad del orden de 1,800 Gb/s, como se muestra en la tabla 8.2.

Ejemplo 8–4 BALANCE DE ENLACE PARA UN SISTEMA DE FIBRA ÓPTICA

La figura 8-28 muestra la configuración de un sistema de fibra óptica FT-2000 de AT□T. □ste consiste en dos anillos bidireccionales de fibra óptica con terminales localizadas en los puntos de servicio (en pueblos, por ejemplo) dentro de un área geográfica dada. La configuración de anillo se emplea para proporcionar rutas redundantes para los datos□si algún cable se corta en cualquier ubicación alrededor del anillo, el resto de la fibra aún en servicio seguirá proporcionando servicio a las terminales. Las terminales se conocen como terminales de inserción/extracción debido a que insertan/extraen datos del anillo para los suscriptores que reciben servicio de las terminales desde su ubicación. Como se muestra en la figura 8-28, se requiere de dos fibras en el anillo para un servicio *full duplex*. Es decir, una fibra suministra servicio a los datos transmitidos (Tx) y la otra provee los datos recibidos (Rx) simultáneamente.

La tabla 8-6 presenta las especificaciones para el sistema FT-2000 de AT□T, que tiene una capacidad de OC-48, lo cual equivale a 48 circuitos DS-3 o 32,256 circuitos de VF de *full duplex*, como se describió en la sección 3-9 (consulte la tabla 3-10).

La tabla 8-7 ofrece un análisis del balance de enlace para una línea de repetidores regenerativos del FT-2000 que operan a la forma de onda de 1.5 μm. Esta tabla muestra que se puede ocupar la máxima línea de repetidores regenerativos de 92 km (57.5 millas) entre los repetidores ópticos (o terminales de inserción/extracción). Aún más, opcionalmente se puede usar un amplificador aumentador de forma de luz en el lado del transmisor para incrementar la potencia óptica transmitida a +16 dBm. Esto permite que la máxima línea de repetidores regenerativos pueda incrementarse a 140 km (87.5 millas) manejando fibra estándar o a 160 km (100 millas) si se utiliza fibra desplazada por dispersión [AT□T, 1994].

TABLA 8–6 ESPECIFICACIONES PARA EL SISTEMA FT-2000 OC-48 LIGHTWAVE

Máxima capacidad para anillos bidireccionales de dos fibras	Equivalente a 24 DS-3 (16,128 circuitos VF de *full duplex* por cada par de fibra) por longitud Equivalente a 48 DS-3 (32,256 circuitos VF de *full-duplex*) por cada terminal
Velocidad de línea	2.488 Gb/s
Código de línea	Unipolar NRZ desordenado
Longitud de onda	1310 nm ± 20 nm o 1550 nm ± 15 nm
Fuente óptica	Láser con respuesta distribuida (DFB)
Detector óptico	Fotodiodo de avalancha (APD)
Fibra óptica	De un solo modo
Potencia transmitida	
OC-48 1.31 μm de rendimiento estándar	Max: +2.5 dBm, Min: −2.0 dBm†
OC-48 1.3 μm de alto rendimiento	Max: +5.5 dBm, Min: +1.0 dBm†
OC-48 1.55 μm de rendimiento estándar	Max: +4.0 dBm, Min: −2.0 dBm†
Sensibilidad del receptor	−27.0 dBm
Máxima potencia (sin sobrecarga) del receptor	−10 dBm para 1.31 μm, −9.0 dBm para 1.55 μm
Tasa de error en bit (BER)	$<10^{-10}$ para una entrada al receptor de −27 dBm $<10^{-9}$ de BER acumulado para un sistema de hasta 400 km (250 millas)
Máximo espacio entre repetidores	
OC-48 1.31 μm de alto rendimiento	60 km (fibra con pérdida de 0.45 dB/km)
OC-48 1.55 μm de rendimiento estándar	92 km (fibra con pérdida de 0.25 dB/km), dispersión limitada

†Incluye pérdidas de conectores de transmisión/recepción de 0.7 dB cada uno (en el peor de los casos) y márgenes del sistema.
Fuente: Manual 365-575-100 de AT□T, *Sistema FT-2000 OC-48 Lightwave*, diciembre de 1994.

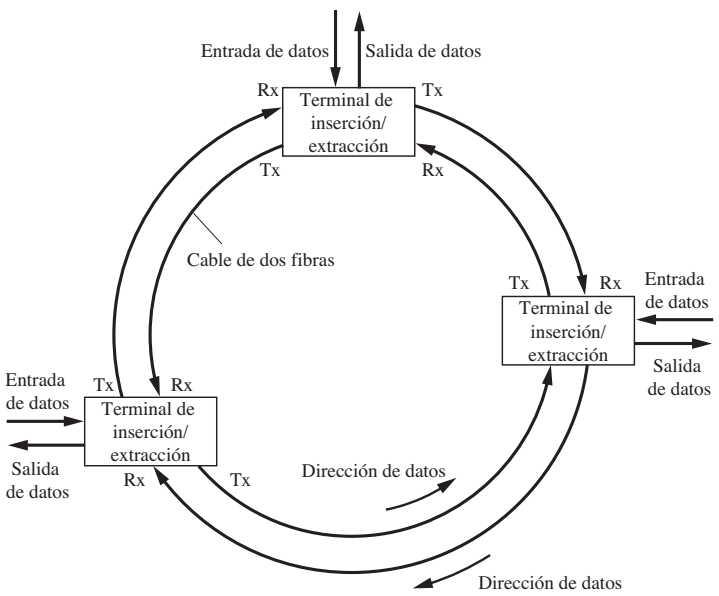


Figura 8–28 Sistema FT-2000 de anillo de fibra óptica.

TABLA 8–7 ANÁLISIS DEL BALANCE DE ENLACE PARA UNA LÍNEA DE REPETIDORES REGENERATIVOS DE 1.55 μM DEL FT-2000

Descripción	Valor
Máxima potencia transmitida	+4.0 dBm
Sensibilidad del receptor	−27.0 dBm
Margen disponible	31.0 dB
Pérdidas en un enlace de fibra de 57 millas	
Penalidad de la ruta óptica	2.0 dB
Pérdidas de conectores de transmisión/recepción (0.7 dB por cada uno)	1.4 dB
Atenuación de la fibra (92 km × 0.25 dB/km)†	23.0 dB
Margen del sistema	4.6 dB
Pérdida total	31.0 dB

†La pérdida de 0.25 db/km incluye pérdidas de empalme.

8–8 SISTEMAS DE TELEFONÍA CELULAR

Esta sección describe los sistemas de telefonía celular y PCS (sistema de comunicaciones personal) e incluye estándares para muchos sistemas analógicos y digitales en las bandas tanto de 900 MHz como de 1,900 MHz.

Desde la invención de los sistemas inalámbricos, la meta de los ingenieros en telefonía ha sido suministrar servicio telefónico a individuos empleando los sistemas de radio para enlazar líneas telefónicas con personas en sus automóviles o peatones. No existe suficiente espacio espectral para asignar un canal de radio permanente para cada suscriptor telefónico para su uso sobre una amplia área geográfica. Sin embargo, es posible soportar un gran número de suscriptores si cada canal de radio cubre sólo una pequeña área geográfica y si se comparten los canales (vía FDMA, TDMA o CDMA).

Este concepto del *radio celular* se ilustra en la figura 8-29. Cada usuario se comunica vía radio desde un aparato telefónico celular a la estación base de célula. Esta estación base se conecta a través de líneas telefónicas o de un enlace por microondas al *centro móvil de conmutación* (MSC, por sus siglas en inglés). El MSC conecta al usuario al destino de la llamada. Si éste es terrestre, la conexión se realiza a través de la oficina central (CO) a la red telefónica terrestre. Si el destino de la llamada es móvil, la conexión se realiza al sitio celular que cubre el área en la cual se ubica el destino de la llamada, ocupando un canal de radio disponible en la célula asociada con el destino. Teóricamente, este concepto celular permite soportar cualquier número de usuarios móviles para un conjunto dado de canales de radio. Es decir, si se requieren más canales, los tamaños de las células existentes se disminuyen y se insertan pequeñas células adicionales, de tal forma que los canales existentes puedan reutilizarse más eficientemente. La consideración crítica es diseñar las células para niveles aceptables de interferencia cocanal [Lee, 1986]. Conforme el usuario móvil viaja de una célula a otra, el MSC automáticamente conmuta al usuario a un canal disponible en la nueva célula, y la conversación telefónica continúa sin interrupción.

El concepto celular posee las siguientes ventajas:

- Gran capacidad para el suscriptor.
- Uso eficiente del espectro de radio.
- Servicio a aparatos portátiles de mano, así como a vehículos.
- Servicio telefónico y de datos de alta calidad al usuario móvil a un costo relativamente bajo.

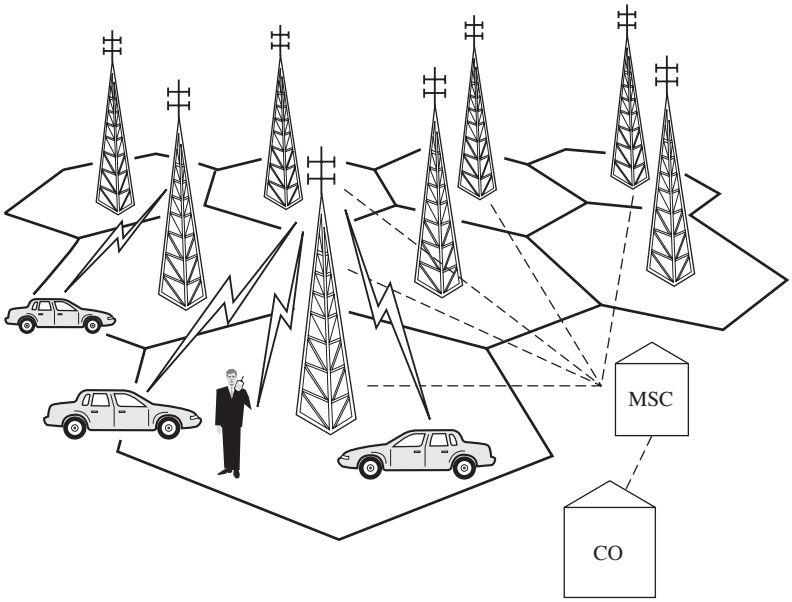


Figura 8–29 Sistema de telefonía celular.

Primera generación 11G2, el sistema analógico AMPS

Como se muestra en la tabla 8-8, el sistema de telefonía celular de primera generación (1G) empleado en Estados Unidos fue el sistema telefónico móvil avanzado (AMPS, por sus siglas en inglés), el cual fue desarrollado por AT□T y Motorola. □ste es un sistema analógico, ya que usa la señal de audio de VF para modular por frecuencia (FM) a una portadora. Para implementar este concepto de AMPS en Estados Unidos, la FCC tuvo que encontrar espacio espectral para su asignación. Esto se logró con la banda de 806 a 890 MHz que alguna vez estuvo asignada a los canales de TV 70 a 83 (consulte la tabla 8-12), pero que se descontinuó en 1974. Parte de esta banda se asignó para el servicio celular, como se muestra en la tabla 8-8. Aún más, la FCC decidió proporcionar licencias a dos sistemas celulares en competencia en cada área geográfica□una licencia a una compañía telefónica convencional y la otra a una compañía no telefónica de portadora común. Este último sistema se conoce como *servicio A*, o *servicio inalámbrico*, y el sistema de la compañía telefónica se conoce como *servicio B*, o *servicio alámbrico*. Por lo tanto, los suscriptores a un sistema celular de 1G tienen la opción de rentar el servicio de una compañía alámbrica o de una inalámbrica. Además, como se muestra en la tabla 8-8, los estándares consideran un servicio *full duplex*. Es decir, una frecuencia de portadora se utiliza para la transmisión de móvil a estación base de célula y otra frecuencia de portadora se emplea para la transmisión de la estación base a móvil. La señalización por FSK proporciona el control. De los 416 canales que pueden ocuparse por un servicio celular con licencia, 21 se utilizan para radiobúsqueda (es decir, control) con señalización por FSK. □sta también se maneja al inicio y al final de cada llamada a través de un canal de VF. Cuando se enciende un teléfono celular, su receptor busca a través de los canales de radiobúsqueda para encontrar la señal más fuerte al emplazamiento de células y a continuación se engancha a éste. El emplazamiento de células transmite datos FSK continuamente a través de un canal de radiobúsqueda y, en particular, envía información de control dirigida a un teléfono celular en particular cuando entra una llamada. Es decir, la señal de control FSK avisa al teléfono cuál canal debe emplear para una llamada.

TABLA 8–8 SISTEMAS PRINCIPALES DE TELEFONÍA CELULAR POR FDMA ANALÓGICOS

	Nombre del sistema[a] y dónde se ocupa			
	AMPS Norteamérica			
Elemento	**Servicio A (línea inalámbrica)**	**Servicio B (línea alámbrica)**	**ETACS Gran Bretaña**	**JTACS Japón**
Año de troducción	1983	1983	1985	1988
Estación base de célula				
Bandas de transmisión (MHz)	869–880, 890–891.5	880–890, 891.5–894	917–933, 935–960	860–870
Estación móvil				
Bandas de transmisión (MHz)	824–835, 845–846.5	835–845, 846.5–849	872–888, 890–915	915–925
Máxima potencia (watts)	3	3	3	2.8
Tamaño de célula, radio (km)	2–20	2–20	2–20	2–20
Número de canales duplex	416[b]	416[b]	1,000	400
Ancho de banda del canal (kHz)	30	30	25	25
Modulación				
Voz	FM Desviación pico de 12 kHz	FM Desviación pico de 12 kHz	FM Desviación pico de 9.5 kHz	FM Desviación pico de 9.5 kHz
Señal de control (Canales de voz y de radiobúsqueda)	FSK Desviación pico de 8 kHz 10 kbits/s Código de línea de Manchester	FSK Desviación pico de 8 kHz 10 kbits/s Código de línea de Manchester	FSK Desviación pico de 6.4 kHz 8 kbits/s Código de línea de Manchester	FSK Desviación pico de 6.4 kHz 8 kbits/s Código de línea de Manchester

[a] AMPS, sistema telefónico móvil avanzado□ETACS, sistema de comunicaciones de acceso total extendido□□TACS, sistema de comunicaciones de acceso total de □apón

[b] 21 de los 416 canales se usan exclusivamente para radiobúsqueda (es decir, canales de control)

Cada teléfono celular contiene una PROM (memoria programable de sólo lectura, de sus siglas en inglés) o EPROM (memoria borrable y programable de sólo lectura, de sus siglas en inglés), que se conoce como *módulo de asignación numérica* (NAM, por sus siglas en inglés). El NAM se programa para contener el número telefónico, también conocido como *número de identificación móvil* (MIN, por sus siglas en inglés) del aparato, que además contiene su *número electrónico de servicio* (ESN, por sus siglas en inglés), el cual es un número único de identificación incorporado en el teléfono por el fabricante.

Cuando el teléfono está "al aire" automáticamente transmite su número serial al MSC, mismo que utiliza dicho número para bloquear el servicio a cualquier teléfono que haya sido robado. Esta característica, por supuesto, desalienta el robo de los aparatos. El MSC emplea el número telefónico de la unidad para suministrar información de cobro. Cuando el teléfono se ocupa en una ciudad remota, éste se puede configurar en el modo *roam*, para que así puedan iniciarse y recibirse llamadas, pero así permitir que el servicio se cobre a través de la compañía local del llamador.

Cuando se establece una llamada ocurre la siguiente secuencia de eventos:

1. El suscriptor celular inicia una llamada tecleando el número telefónico del destino y presiona la tecla de *enviar*.
2. El teléfono celular realiza una búsqueda a través de los *canales de control* (existen 21 en AMPS) para señales de control.
3. El teléfono celular selecciona el canal con la señal de control más fuerte y decide usarlo para establecer la llamada.
4. El celular transmite un mensaje corto (alrededor de 1/4 s) sobre el canal de control que contiene el MIN y ESN del teléfono, así como el número que se marcó.
5. Después de que el MSC verifica que el teléfono ha enviado parámetros válidos para un suscriptor, el MSC manda un mensaje de *asignación de canal* para el canal de "habla" que se utilizará para la llamada.
6. El teléfono se sintoniza al canal de "habla" asignado e inicia la llamada.
7. El MSC envía una señal al destino para timbrar su teléfono. Todas estas operaciones ocurren dentro de los primeros 10 s después de iniciar la llamada. Se escucha ya sea un "timbre de regreso" o una señal de "ocupado". Ambas se transmiten por el MSC como una señal de audio, al igual que la voz de la persona a la que se está llamando.
8. Cuando el destino contesta la llamada, el MSC conecta las líneas de enlace para los dos usuarios e inicia la información de cobro.
9. Cuando un usuario cuelga, el MSC libera el canal de radio y completa la información de cobro.

Mientras la llamada está en progreso, el suscriptor celular puede moverse de un área de células a otra, así que el MSC hace lo siguiente:

- Monitorea la fuerza de la señal del teléfono celular como se recibe en la estación base de la célula. Si la señal cae por debajo de algún nivel designado, el MSC inicia una secuencia de "traspaso".
- Para un "traspaso", el MSC consulta acerca de la fuerza de la señal recibida en emplazamientos de células adyacentes.
- Cuando el nivel de la señal se vuelve lo suficientemente grande en un emplazamiento de células adyacente, el MSC instruye al radio celular a conmutarse al canal apropiado para una comunicación con dicho emplazamiento de células nuevo. Este proceso de conmutación toma menos de 250 ms y generalmente el suscriptor no lo nota.

Existen muchos estándares celulares distintos. La tabla 8-8 muestra tres estándares analógicos principales empleados alrededor del mundo. Aún más, ya que los teléfonos celulares son tan populares, resulta claro que estos sistemas analógicos de FM de banda ancha no tienen la capacidad de soportar

TABLA 8–9 SISTEMAS DE TELEFONÍA CELULAR POR FDMA DE BANDA ESTRECHA ANALÓGICOS

Elemento	Nombre del sistema[a] y dónde se utiliza: NAMPS Norteamérica	NTACS Japón
Año de introducción	1992	1993
Estación base de célula		
Banda de transmisión (MHz)	869–894	843–846, 860–870
Estación móvil		
Banda de transmisión (MHz)	824–849	898–901, 915–925
Máxima potencia (watts)	3	2.8
Número de canales dúplex	2496	1040
Ancho de banda del canal		
Voz (kHz)	10	12.5
Radiobúsqueda (kHz)	30	25
Modulación		
Voz	FM Desviación pico de 5 kHz	FM Desviación pico de 5 kHz
Señalización (canal de voz)	FSK Desviación pico de 0.7 kHz 100 bits/s, Manchester	FSK Desviación pico de 0.7 kHz 100 bits/s, Manchester
Señalización (canal de radiobúsqueda)	FSK Desviación pico de 8 kHz 10 kbits/s, Manchester	FSK Desviación pico de 6.4 kHz 8 kbits/s, Manchester

[a]NAMPS, sistema telefónico móvil avanzado de banda estrecha□NTACS, sistema de comunicaciones de acceso total de banda estrecha.

a los nuevos suscriptores esperados. En consecuencia, los sistemas analógicos de FM de banda estrecha con mayor capacidad, que se muestran en la tabla 8-9, están reemplazando a los sistemas de banda ancha de canal en canal, según se requiera. Por ejemplo, un canal AMPS de banda ancha de 30 kHz puede reemplazarse con tres canales NAMPS de banda estrecha de 10 kHz para triplicar la capacidad. Para capacidades aún mayores se ocupan nuevos sistemas celulares digitales, que se muestran en la tabla 8-10. El sistema digital de GSM se usa en Europa para suministrar un estándar uniforme que reemplaza los numerosos sistemas analógicos que se han ido descontinuando.

Segunda generación (2G), los sistemas digitales

La tabla 8-10 muestra los estándares para los sistemas de telefonía celular populares de segunda generación (2G), todos digitales. La señal analógica de VF se convierte a un flujo digital de bits comprimidos, el cual es modulado sobre una portadora. La velocidad de bit de los datos comprimidos se diseña para que sea relativamente pequeña, de tal forma que se pueda soportar un gran número de usuarios.

El enfoque digital posee muchas ventajas, pues proporciona conversaciones privadas, resistencia a fraude celular y características especiales que pueden implementarse fácilmente como el identificador de llamadas. Además, permite conversaciones telefónicas libres de ruido hasta el límite de la zona de recepción marginal celular debido al efecto agudo de umbral de los sistemas digitales. Es decir, los datos se reciben ya sea libres de errores para la recuperación de audio libre de ruido, o con tantos errores que el audio se apaga. Compare esto con el audio ruidoso de los sistemas analógicos de FM cuando se reciben señales en la zona marginal de recepción.

TABLA 8–10 SISTEMAS PRINCIPALES DE TELEFONÍA CELULAR DIGITALES

Elemento	Nombre del sistema[a] y dónde se utiliza			
	GSM Europa, Asia	**IS-136, NADC Norteamérica**	**IS-95 Norteamérica, Asia**	**iDEN Norteamérica**
Año de introducción	1990	1991	1993	1994
Estación base de célula[h]				
Bandas de transmisión (MHz)	935–960	869–894	869–894	851–866,
Estación móvil[h]				
Bandas de transmisión (MHz)	890–915	824–849	824–849	806–821
Máxima potencia (watts)	20	3	0.2	3
Número de canales dúplex	125	832	20	600
Ancho de banda del canal (kHz)	200	30	1250	25
Método de acceso al canal	TDMA	TDMA	CDMA[f]	TDMA
Usuarios por canal	8	3	35[g]	3
Modulación[b]				
Tipo	GMSK	$\pi/4$ DQPSK	QPSK	16QAM en cuadratura
Velocidad de datos	270.833 kb/s	48.6 kb/s	9.6 kb/s[f]	64 kb/s
Filtro	0.3R gaussiano[c]	$r = 0.35$ de coseno realzado[d]		$r = 0.2$ de coseno realzado[d]
Codificación de voz[e]	RPE-LTP	VSELP	QCELP	VSELP
	13 kb/s	8 kb/s	8 kb/s (variable)	8 kb/s

[a] GSM, grupo especial móvil; NADC, celular digital norteamericano; iDEN, red digital integrada mejorada.

[b] GMSK, MSK gaussiana (es decir, $h = 0.5$ FSK, también conocida como FFSK, con filtro gaussiano de premodulación; consulte la sección 5-11 y el pie de página c; $\pi/4$ DQPSK, QPSK diferencial con rotación de $\pi/4$ de fase de referencia para cada símbolo transmitido; 16QAM en cuadratura es cuatro portadoras de 16QAM para cada señal.

[c] Filtro gaussiano en banda base con ancho de banda a 3 dB igual a 0.3 de la velocidad de bit.

[d] Raíz cuadrada de la característica de coseno realzado en el transmisor y receptor.

[e] RPE-LTP, excitación de pulso regular, predicción a largo plazo; VSELP, filtro de predicción lineal excitado de sumatoria vectorial; QCELP, predicción lineal excitada por el libro código de Qualcomm

[f] La velocidad de chip del espectro ensanchado es de 1.2288 Mchips/s, para un factor de ensanchado de 128 o ganancia de procesamiento de 21 dB.

[g] Para CDMA, las frecuencias de canal pueden reutilizarse en células adyacentes; otros métodos (TDMA y FDMA) requieren un patrón de reutilización de siete células.

[h] Para un sistema PCS en la banda de 1,900 MHz, la banda de transmisión de la estación base es de 1,930-1,990 MHz, y la banda de transmisión de la estación móvil es de 1,850-1,910 MHz.

El sistema de *Grupo Especial Móvil* (*GSM*) (consulte la tabla 8-10) es el sistema de 2G que reemplaza a muchos sistemas analógicos de 1G diferentes en Europa. En la actualidad se puede viajar alrededor de Europa y mantener la comunicación a través de un teléfono GSM, en lugar de requerir hasta 15 diferentes tipos de teléfonos celulares de 1G. GSM utiliza TDMA que proporciona ranuras de tiempo para soportar hasta ocho usuarios en cada canal de 200 kHz de ancho. El teléfono GSM se programa para una cuenta de usuario en particular mediante una *tarjeta inteligente* incorporada, la cual contiene el número telefónico del usuario y otra información de cuenta. La tarjeta inteligente permite al suscriptor hacer un clon de cualquier teléfono GSM, ya sea un aparato telefónico o un teléfono portátil fijo, a su cuenta si se emplea la tarjeta. Si un usuario viaja a un país donde se ocupa una banda de frecuencias diferentes, un teléfono GSM rentado puede programarse instantáneamente a la cuenta del usuario manejando la tarjeta. GSM ha sido adoptado por muchos países y se utiliza por el 50□ de los suscriptores celulares en todo el mundo. Los detalles acerca del diseño del sistema GSM se publicaron en un libro escrito por Garg y Wilkes [Garg y Wilkes, 1999].

El sistema *celular digital norteamericano IS-54, IS-136 (NADC)*, también conocido como TDMA, fue el primer estándar de 2G adoptado por Estados Unidos, y utiliza TDMA para soportar hasta tres usuarios en cada canal de 30 kHz de ancho. Está diseñado para reemplazar la señalización analógica de AMPS de canal en canal. Por lo tanto, un proveedor de servicio de AMPS preexistente puede convertir gradualmente algunos canales al servicio digital IS-54 conforme se requiera, dependiendo de la demanda de los clientes.

El estándar *IS-95* fue desarrollado por Qualcomm y se adoptó en 1993 en Estados Unidos para su uso en la banda celular de 900 MHz. Ocupa CDMA para soportar hasta 35 usuarios en un canal de 1.2 MHz de ancho. Un canal IS-95 puede usarse para reemplazar 41 canales de AMPS de 30 kHz de ancho. La ventaja de CDMA es que las mismas frecuencias de canal pueden reutilizarse en emplazamientos de células adyacentes, ya que los usuarios se distinguen por sus diferentes códigos de ensanchado (se utiliza un conjunto diferente de códigos de ensanchado en emplazamientos de células adyacentes). El enfoque de CDMA presenta muchas ventajas□por ejemplo, el número de usuarios permitidos para cada ancho de banda del canal no es fijo (como es el caso en TDMA, donde existe un número fijo de ranuras de tiempo disponibles), ya que se puede agregar usuarios adicionales con nuevos códigos de ensanchado. Los usuarios adicionales causan un incremento importante en el nivel de ruido. Se puede agregar usuarios hasta que los errores se vuelvan intolerables (debido al aumento en el nivel de ruido). Se espera que el enfoque de CDMA se haga cada vez más popular y se vuelva el tipo predominante de sistemas. Los detalles acerca de CDMA se presentan en libros escritos por Rhee [Rhee, 1998] y Garg [Garg, 2000].

La *red digital integrada mejorada* (iDEN, por sus siglas en inglés) fue desarrollada por Motorola. Nextel la adoptó en su sistema, el cual maneja frecuencias especializadas de radio móvil (SMR, por sus siglas en inglés) en la banda de 800 MHz. El sistema iDEN ocupa TDMA para soportar hasta 3 usuarios en cada canal de 25 kHz de ancho. Cada canal usa cuatro portadoras de 16QAM, de tal forma que $4 \times 4 = 16$ bits de datos se envían en paralelo durante cada intervalo de tiempo de símbolo. Esto es parecido a la señalización por OFDM, la cual se discutió en la sección 5-12. Por lo tanto, la duración de tiempo de un símbolo es relativamente larga, así que la señal transmitida es resistente al desvanecimiento por múltiples trayectorias. Además de las características comunes de los teléfonos celulares, el protocolo de iDEN permite establecer una *red virtual privada* (VPN, por sus siglas en inglés) para las compañías abonadas. Por tanto, los empleados de la compañía pueden conectarse directamente a una llamada privada o a una llamada de grupo con otros sobre la VPN.

Como se indica en la tabla 8-10, todos estos sistemas de 2G utilizan algún tipo de codificación de voz de baja tasa de bit de la señal de VF de tal forma que se pueda soportar un gran número de usuarios en el ancho de banda de RF limitado. Consulte la sección 3-8 para una discusión sobre

la codificación de voz. Por ejemplo, el codificador de filtro de predicción lineal excitado de suma vectorial (VSELP, por sus siglas en inglés) empleado para los sistemas NADC e iDEN es una versión modificada de la técnica de predicción lineal excitada por código (CELP, por sus siglas en inglés) desarrollada por B. Atal en AT□T Bell Laboratories [Gerson y □asiuk, 1990]. Esta técnica es una mímica de las dos partes principales del sistema de habla humana: las cuerdas vocales y la vía vocal. Esta última se simula mediante un filtro de predicción lineal variable con el tiempo, y los sonidos de las cuerdas vocales ocupados para la excitación del filtro se simulan con una base de datos (es decir, un código) de excitaciones posibles. El codificador VSELP (en el transmisor) divide la señal de VF del llamador en segmentos de 20 ms. El codificador barre a través de los posibles patrones de excitación en el código y los posibles valores para los parámetros del filtro para encontrar el segmento de voz digitalizada que resulta en la mejor comparación con el segmento de VF. Los parámetros del codificador que especifican esta mejor comparación se transmiten vía datos digitales al receptor, donde los datos recibidos establecen los parámetros para el sintetizador de voz del receptor para que así se pueda reproducir la señal de VF al oyente.

Los sistemas PCS en la banda de 1,900 MHz

Para proporcionar más competición celular en Estados Unidos, la FCC ha reasignado las frecuencias en la banda de 1.9 GHz del servicio por microondas de punto a punto al PCS celular. La banda PCD se describe como sigue:

1,850–1,910 MHz	Transmisión de PCS portátil
1,930–1,990 Mhz	Transmisión de estación base a PCS portátil

Aún más, esta banda se divide en seis bloques dúplex para su asignación a seis proveedores de PCS en cada área de servicio. Esto es además de los dos proveedores celulares de 900 MHz para cada área de servicio. La opción de cuál estándar celular usar para el servicio es decisión de cada proveedor de servicio con licencia. Desde 1997, las compañías con licencia para estos nuevos bloques de PCS se han puesto "al aire". □stas proporcionan servicio con el estándar ya sea GSM (TDMA), IS-54 (TDMA) o IS-95 (CDMA), los cuales se describen en la tabla 8-10 (manejando las frecuencias PCS de 1.9 GHz).

En la actualidad existen múltiples compañías de PCS que proporcionan servicio telefónico inalámbrico en ciudades y a lo largo de las principales carreteras que conectan a dichas ciudades. Esta competencia ha reducido bastante el costo a los suscriptores por su servicio telefónico inalámbrico. Cada teléfono de PCS se configura para el estándar de PCS que su proveedor de servicio ha seleccionado. En otras palabras, las compañías no utilizan un estándar digital común. Sin embargo, existe un servicio celular de AMPS a 900 MHz universal casi en todo Estados Unidos, incluyendo áreas rurales de baja población. Si un usuario de teléfono digital hace un *roam* a otra área de servicio, su teléfono no funcionará a menos que sea compatible con el estándar digital empleado en esa área de *roaming*. En consecuencia, la mayoría de las compañías ofrece teléfonos de modo dual o modo triple, que cuentan con cobertura de respaldo a un proveedor de servicio de AMPS a 900 MHz.

En 2005 la FCC anunció que, si lo desean, las compañías inalámbricas pueden retirar todo el servicio de AMPS en 2008. Esto significa que algunos usuarios no podrán establecer llamadas celulares en áreas rurales donde en la actualidad AMPS es el modo de respaldo para las compañías que no suministran servicio celular digital en dichas áreas. Por supuesto que conforme se agregan más torres digitales para cubrir dichas áreas, esto puede dejar de ser un problema.

Estado de las redes de 2G

Cuando los sistemas celulares se desarrollaron por primera vez en Estados Unidos, había muchos proveedores regionales. En la actualidad muchos de estos proveedores regionales se han consolidado en cuatro portadoras nacionales. Éstas son Verizon Wireless (CDMA), T-Mobile USA (GSM), Cingular Wireless (TDMA originalmente, pero se está convirtiendo en GSM) y Sprint-Nextel (CDMA e iDEN). La mayoría de estas portadoras nacionales operan torres de células tanto en la banda de 850 MHz como en la de 1,900 MHz. Esto significa que se requiere de un teléfono celular de modo dual (AMPS y digital) y banda dual (850 y 1,900 MHz) para cubrir todas las áreas de una red de sistema nacional. Aún más, la FCC recientemente agregó seis bandas más para el uso celular en años futuros, iniciando en el 2008. Las bandas son las de 1710-1755, 1915-1920, 1995-2000, 2020-2075, 2110-2155 y 2175-2180 MHz. Los teléfonos celulares en lo futuro requerirán cubrir estas nuevas bandas además de las actuales de 850 y 1900 MHz.

Los sistemas de 2G han logrado mejoras significativas sobre el sistema AMPS de 1G en términos de la capacidad del sistema, calidad del servicio, seguridad de información y otras características como la mensajería por texto y los teléfonos con cámara. Los sistemas de 2G se desarrollaron principalmente para la transmisión de voz, y no de datos. La mayoría de los sistemas de 2G opera a velocidades de datos relativamente bajas de 8 kb/s o 13 kb/s. En consecuencia, la transmisión de datos de sistemas computacionales está severamente limitada en estos sistemas. Las velocidades de datos más altas han sido la principal fuerza de empuje en el desarrollo de los sistemas de 2.5G y 3G. Algunos de estos sistemas pueden llegar a tasas de datos de 384 kb/s para usuarios viajando a velocidades de hasta 120 km/h, mientras que se pueden alcanzar tasas de datos de hasta 2 Mb/s para usuarios fijos.

Otra pregunta que surge es: ¿puede ocuparse un solo teléfono celular tanto en otros países como en Estados Unidos? En la actualidad, el sistema GSM es lo más cercano a un estándar mundial. Éste se usa en casi 200 naciones con un total de 600 millones de suscriptores. Sin embargo, las bandas de frecuencias manejadas en otros países pueden ser diferentes a las de Estados Unidos. Por lo tanto, para que un teléfono celular sea compatible con un servicio "mundial", éste requiere ser un teléfono GSM multibanda. En la actualidad existen teléfonos disponibles de banda dual (900 y 1900 MHz), triple banda (900, 1800 y 1900 MHz) y cuádruple banda (850, 900, 1800 y 1900 MHz). En consecuencia, los teléfonos de cuádruple banda funcionarán "mundialmente". Conforme los sistemas GSM crecen en popularidad en Estados Unidos, el servicio GSM estará disponible en casi cualquier parte del mundo.

Una aplicación interesante de un sistema inalámbrico es el servicio de suscriptor OnStar suministrado por General Motors (GM), el cual permite a los conductores de vehículos de GM y a sus pasajeros establecer contactos con un representante de OnStar para servicios de emergencia y otros que un conserje proporcionaría. El enlace de comunicaciones se realiza mediante la red telefónica celular y la información de la posición del vehículo se provee mediante un receptor GPS (sistema de posicionamiento global) a bordo. Algunos de los servicios proveídos son: asistencia de la ubicación de vehículos robados, servicios de emergencia, diagnóstico remoto de problemas vehiculares, asistencia en carreteras, asistencia en caso de accidentes, apertura remota de puertas, direcciones al conductor y detección de accidentes a través de notificaciones automáticas de disparo de bolsas de aire.

Sistemas de tercera generación (3G)

A partir de la discusión de la sección anterior resulta claro que un estándar de PCS/celular mundial compatible es necesario para un sistema de tercera generación (3G). Esto permitiría a los usuarios inalámbricos hacer *roaming* mundialmente con un solo teléfono. Esto ha estado en discusión desde hace algún tiempo, pero los países y los fabricantes de equipo tienen cuestiones políticas, técnicas y de patentes incompatibles. El Instituto Europeo de Estándares (ETSI, por sus siglas en inglés) ha

propuesto un sistema universal de telecomunicaciones móviles (UMTS, por sus siglas en inglés), y la Unión Internacional de Telecomunicaciones (ITU, por sus siglas en inglés) está desarrollando el sistema de telecomunicaciones móvil internacional 2000 (IMT-2000), el cual incluye a UMTS como un subconjunto. El IMT-2000 permite tres diferentes modos de operación: Europa y Japón utilizarán el acceso múltiple por división de código de banda ancha (W-CDMA), Estados Unidos y algunos países de Asia emplearán un sistema CDMA parecido llamado CDMA2000, y China muy probablemente ocupará un tercer tipo llamado TD-CDMA. En esta técnica el estándar estadounidense de CDMA evolucionará al CDMA2000 y el GSM a W-CDMA. Además de voz, el sistema de 3G deberá soportar transmisión de datos con velocidades seleccionables desde 9.6 kb/s a 2 Mb/s. Muchos consideran que tanto el GSM como el CDMA deben permitirse, y que el sistema de 3G debe ser compatible con los sistemas existentes. El sistema también deberá proveer una extensión continua de Internet. El sistema de 3G deberá ser barato y encontrar frecuencias para compatibilidad mundial. Sólo el tiempo dirá si tal sistema de 3G mundial se hará realidad.

8–9 TELEVISIÓN

La televisión (TV) es un método para reproducir imágenes visuales fijas o en movimiento mediante señales electrónicas. Existen numerosos tipos de sistemas de TV y se han adoptado diferentes estándares alrededor del mundo. Aún más, como se discutirá a continuación, la TV está en un estado de flujo ya que existe un empuje mundial para la *televisión digital* (DTV). Esta sección se concentrará primero en la TV analógica de difusión en blanco y negro, como se ha visto desarrollada en Estados Unidos desde la década de 1930, y después se examinarán la televisión a colores y la DTV.

Televisión en blanco y negro

La imagen en blanco y negro de una escena es esencialmente la intensidad de la luz como función de las coordenadas x y y de la escena y del tiempo. Sin embargo, una forma de onda eléctrica es sólo una función del tiempo, así que se requiere de algún medio para codificar las coordenadas x y y asociadas con la intensidad de la luz a partir de un solo punto en la escena. En la difusión de TV, esto se logra usando un *barrido de cuadro*, lo cual se muestra en la figura 8-30. Se asume que la escena total se barre antes de que cualquier objeto en la escena se haya movido apreciablemente. Por lo tanto, se pueden transmitir imágenes en movimiento enviando una serie de imágenes fijas, como en las películas. Conforme la escena se barre, su intensidad se indica mediante la amplitud de la señal de video. Se inserta un pulso de sincronización al final de cada línea de barrido mediante el conmutador electrónico, como se muestra en la figura 8-30, para avisar al receptor de TV que debe iniciar otra línea de barrido. Para fines ilustrativos, se coloca un triángulo negro en la porción superior izquierda de la escena. En las figuras 8-30b y 8-30c se utilizan números para indicar los tiempos correspondientes en la forma de onda de video, con la ubicación del punto que se barre en la escena a ese instante. La señal de video compuesta es de hecho una señal híbrida que consiste en una forma de onda digital durante el intervalo de sincronización y una forma de onda analógica durante el intervalo de video. Personal de operación monitorea la calidad del video observando un *monitor de forma de onda*, el cual despliega la forma de onda de video compuesta, como se muestra en la figura 8-30c.

La imagen (observada) se genera barriendo de izquierda a derecha para crear una línea, y las líneas se mueven de la parte superior a la inferior de la pantalla. Durante el retorno de barrido, indicado por las líneas punteadas de derecha a izquierda, el CRT se apaga por el nivel de video que es "más negro que negro" durante el intervalo de pulso de sincronización.[21] De hecho la escena se

[21] Además, la mayoría de los aparatos televisores apagan el haz de electrones durante el retorno de barrido con el pulso de sincronización que se obtiene del transformador de salida (del retorno de barrido) horizontal.

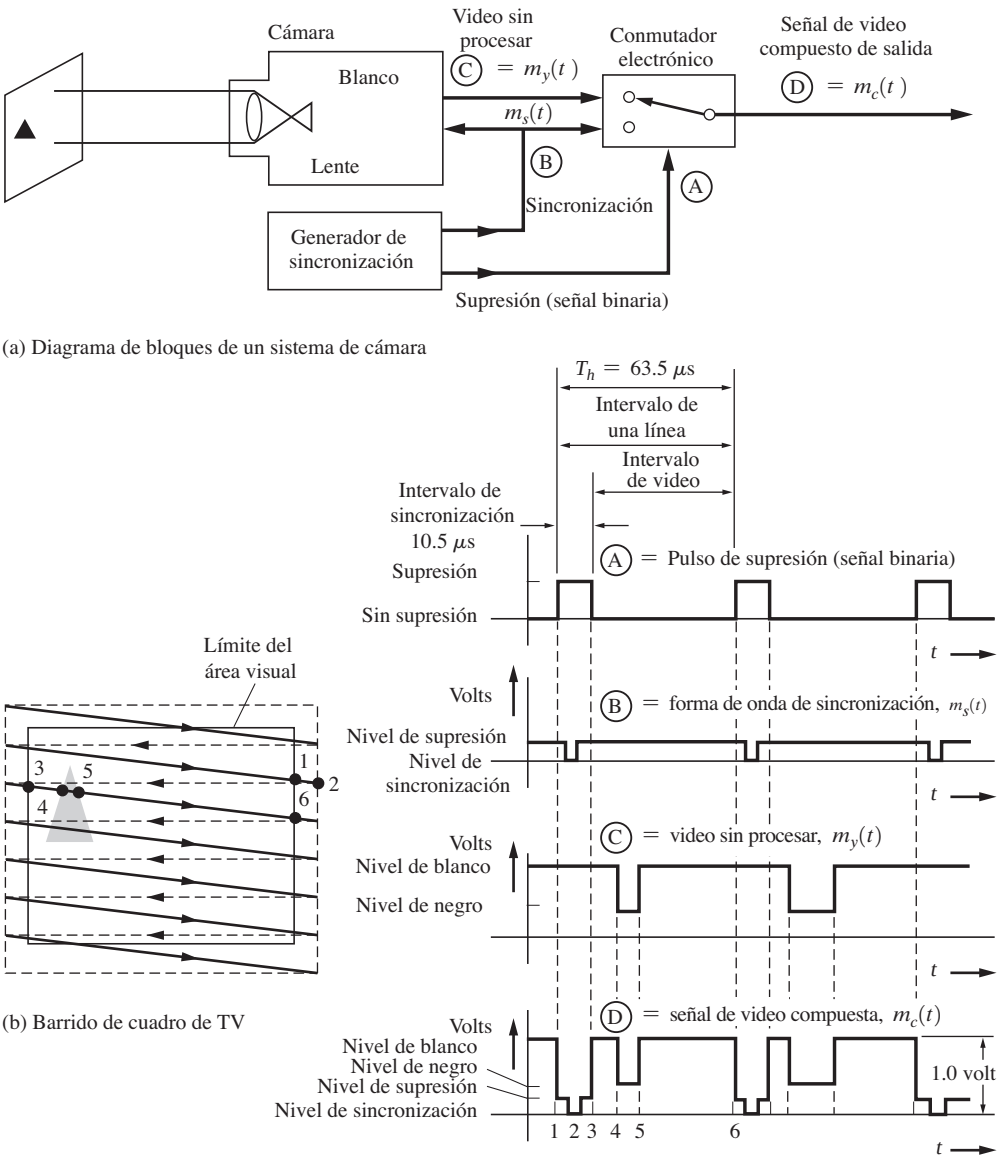


Figure 8–30 Generación de una señal de video compuesta en blanco y negro.

convierte al barrer líneas alternas de arriba a abajo (un campo) y regresando a la parte superior para barrer las líneas restantes (el siguiente campo). Esta técnica se conoce como *entrelazado*, y reduce el efecto de parpadeo en las imágenes en movimiento, proporcionando dos campos (barridos de la pantalla) por cada cuadro. En Estados Unidos se transmiten aproximadamente 30 cuadros/s, lo cual es equivalente a 60 campos/s para el entrelazado de 2:1 que se utiliza. Cuando el barrido llega a la parte inferior de un campo, el pulso de sincronización se ensancha para cubrir el intervalo de video entero además del intervalo de sincronización. Esto ocurre durante 21 líneas y, en consecuencia, se

puede ver una barra negra a través de la pantalla si la imagen se "enrolla". En el receptor, la sincronización vertical (pulso ancho) puede separarse de la horizontal (pulso estrecho) empleando un circuito diferenciador para recuperar la sincronización horizontal y un integrador para recuperar la sincronización vertical. El intervalo vertical también se ocupa para enviar señales especiales, como señales de prueba que pueden usarse por ingenieros de TV para probar la respuesta de frecuencia y la linealidad del equipo en línea [Solomon, 1979]. Además, algunos programas de TV poseen información de subtítulos que pueden decodificarse en ciertos aparatos televisores especiales manejados por usuarios sordos. Estos aparatos insertan subtítulos a lo largo de la parte inferior de la pantalla. Como se muestra en la tabla 8-11, la información de subtítulos se transmite durante la línea 21 del intervalo vertical insertando una palabra código de 16 bits. La FCC especifica rigurosamente los detalles de la estructura exacta de sincronización (vea la figura 8-37).

La señal compuesta en banda base que consiste de la señal de video de *luminancia* (intensidad) $m_y(t)$, y la señal de *sincronización* $m_s(t)$ se describe mediante

$$m_c(t) = \begin{cases} m_s(t), & \text{durante el intervalo de sincronización} \\ m_y(t), & \text{durante el intervalo de video} \end{cases} \tag{8–58}$$

El espectro de $m_c(t)$ es muy ancho, ya que ésta contiene pulsos de sincronización rectangulares. De hecho, el ancho de banda sería infinito si los pulsos tuvieran formas rectangulares perfectas. Para reducir el ancho de banda, los pulsos se redondean, como la FCC lo especifica en sus estándares (vea la figura 8-37). Esto permite que $m_c(t)$ se filtre a un ancho de banda de $B = 4.2$ MHz (estándar estadounidense). Para una imagen fija, el espectro exacto puede calcularse con un análisis de serie de Fourier (como se mostró en la sección 2-5). Para una imagen típica todos los campos son parecidos, y por lo tanto $m_c(t)$ sería periódica con un periodo de aproximadamente $T_0 = 1/60$ s, lo cual corresponde a una velocidad de campo de 60 campos/s (consulte la tabla 8-11 para valores exactos). Por lo tanto, para una imagen fija, el espectro consistiría en líneas separadas a intervalos de 60 Hz. Sin embargo, en la figura 8-30 se observa que existen intervalos dominantes de ancho T_b correspondientes a las líneas barridas del cuadro. Aún más, las líneas adyacentes generalmente tienen formas de onda parecidas. En consecuencia, $m_c(t)$ es casi periódica con periodo T_b, y el espectro consiste en grupos de líneas espectrales que se centran en las armónicas de la frecuencia de barrido $nf_h = n/T_h$, donde el espacio entre las líneas dentro de estos grupos es de 60 Hz. Para imágenes en movimiento, la estructura de la línea del espectro se "borra" a un espectro continuo con grupos espectrales centrados alrededor de nf_h. Aún más, entre estos grupos el espectro está casi vacío. Como se verá, estos intervalos "vacantes" en el espectro se utilizan para transmitir la información de color para una señal de TV a colores. Esto, por supuesto, es una forma de multiplexión por división de frecuencia.

La resolución de las imágenes de TV a menudo se especifica en líneas de resolución. El número de líneas horizontales que pueden distinguirse de la parte superior a la inferior de la pantalla de TV para un patrón de prueba de línea horizontal se conoce como *resolución de línea vertical*. El número máximo de líneas horizontales distinguibles (resolución de línea vertical) es el número total de líneas de barrido en el cuadro menos aquellas no empleadas para la imagen. Es decir, la resolución vertical es

$$n_v = (N_f - N_v) \quad \text{líneas} \tag{8–59a}$$

donde N_f es el número total de líneas de barrido por cuadro y N_v el número de líneas en el intervalo vertical (y no líneas de imagen) para cada cuadro. Para los estándares estadounidenses (tabla 8-11), la máxima resolución vertical es

TABLA 8–11 ESTÁNDARES ESTADOUNIDENSES DE DIFUSIÓN DE TELEVISIÓN ANALÓGICA

Elemento	Estándar de la FCC
Ancho de banda de canal	6 MHz
Frecuencia de la portadora de video	1.25 MHz ± 1000 Hz por arriba del límite inferior del canal
Frecuencia de la portadora de audio	4.5 MHz ± 1000 Hz por arriba de la frecuencia de la portadora de video
Frecuencia de subportadora de color	3.579545 MHz ± 10 Hz
Relación de aspecto (anchura a altura)	Cuatro unidades horizontalmente por cada tres unidades verticalmente
Tipo de modulación de la portadora de video	AM con polaridad negativa (es decir, un decremento en el nivel de luz causa un incremento en el nivel de la envolvente real)
Portadora de audio	FM con 100□ de modulación a $\Delta F = 25$ kHz con una respuesta de frecuencia de 50 a 15,000 Hz ocupando preénfasis de 75 μs
Niveles de modulación visual	
Nivel de supresión	75□ ± 2.5□ del nivel pico de la envolvente real (nivel de punta de sincronización)
Nivel de negro de referencia	7.5□ ± 2.5□ (del rango de video entre el nivel de supresión y el nivel de blanco de referencia) por debajo del nivel de supresión□esto se conoce entre los ingenieros en televisión[a] como el nivel de *configuración*
Nivel de blanco de referencia	12.5□ ± 2.5□ del nivel de punta de sincronización[a]
Barrido	
Número de líneas	525 líneas/cuadro, entrelazadas 2:1
Secuencia de barrido	Horizontalmente: de izquierda a derecha□verticalmente: de arriba a abajo
Frecuencia de barrido horizontal, f_h	15,734.264 ± 0.044 Hz (2/455 de frecuencia de crominancia)□ pueden usarse 15,750 Hz durante las transmisiones monocromáticas
Frecuencia de barrido vertical, f_v	59.94 Hz (2/525 de frecuencia horizontal de barrido)□pueden manejarse 60 Hz durante las transmisiones monocromáticas□ 21 líneas horizontales equivalentes ocurren durante el intervalo de sincronización vertical de cada campo
Señalización de intervalo vertical	Líneas 13, 14, 15, 16. Teletexto Líneas 17, 18. Señales de prueba de intervalo vertical (VITS, por sus siglas en inglés) Línea 19. Referencia de intervalo vertical (VIR, por sus siglas en inglés) Línea 20, campo 1. Identificación de estación. Línea 21, campo 1. Datos de subtítulos. Línea 21, campo 2. Código de cuadro de subtítulos ($\frac{1}{2}$ de la línea)

[a] Vea la figura 8-31b.

$$n_v = 525 - 42 = 483 \quad \text{líneas} \tag{8–59b}$$

La resolución en la dirección horizontal está limitada por la respuesta de frecuencia permitida para $m_c(t)$. Por ejemplo, si se emplea una señal de prueba de onda senoidal durante el intervalo de video, la frecuencia de onda senoidal más alta que puede transmitirse a través del sistema será de $B = 4.2$ MHz (estándar estadounidenses), donde B es el ancho de banda de video del sistema. Para cada pico de la onda senoidal, un punto aparecerá a lo largo de la dirección horizontal conforme el haz del CRT barre de izquierda a derecha. Por lo tanto, la resolución horizontal para entrelazado 2:1 es

$$n_h = 2B(T_h - T_b) \quad \text{pixeles} \tag{8–60a}$$

donde B es el ancho de banda de video, T_h el intervalo horizontal y T_b el intervalo de supresión (vea la figura 8-30). Para los estándares estadounidenses, $B = 4.2$ MHz, $T_h = 63.5$ μs y $T_b = 10.5$ μs, de tal manera que la resolución horizontal es

$$n_h = 445 \quad \text{pixeles} \tag{8–60b}$$

Aún más, debido al pobre ancho de banda de video y a las pobres características de entrelazado de los aparatos televisores para el consumidor, esta resolución horizontal de 445 generalmente no se obtiene en la práctica.[22] En el mejor de los casos, el estándar estadounidense de 445×483 no provee muy buena resolución, y ello se nota especialmente en aparatos televisores de pantalla grande. [En comparación, el estándar súper VGA (SVGA) para monitores de computadoras provee una resolución tan grande como de 1024×768.]

Para la transmisión de TV de calidad de difusión (estándar estadounidense), la señal de video compuesta de la ecuación (8-58) se invierte y se modula por amplitud a una portadora de RF de tal forma que la señal AM es

$$s_v(t) = A_c[1 - 0.875m_c(t)] \cos \omega_c t \tag{8–61}$$

Esto se muestra en la figura 8-31. La banda lateral inferior de esta señal se atenúa de tal forma que el espectro se ajusta al ancho de banda del canal de TV de 6 MHz. Esta atenuación puede lograrse con un filtro de banda lateral vestigial, el cual es un filtro pasabanda que atenúa la mayor parte de la banda lateral inferior. La señal filtrada resultante se conoce como señal de *banda lateral vestigial* (VSB, por sus siglas en inglés), $s_v(t)$, como se describió en la sección 5-5. El término de portadora discreta en la señal de VSB cambia cuando la imagen cambia de una escena a otra, debido a que la señal en banda base compuesta tiene un nivel de DC diferente de cero que depende de la escena en particular televisada. La señal de audio para el programa de TV se transmite a través de una portadora de FM separada exactamente 4.5 MHz por arriba de la frecuencia de portadora visual.

La potencia nominal de la señal visual de TV es la potencia pico de envolvente radiada isotrópica efectiva (EIRP, es decir, la potencia promedio de punta de sincronización efectiva), y es generalmente llamada simplemente *potencia radiada efectiva* (ERP, por sus siglas en inglés). La EIRP es la potencia que se requeriría para alimentarse a una antena isotrópica para alcanzar la misma fuerza de campo que se obtiene de una antena que de hecho se utiliza como se midió en la dirección de su máxima radiación. El patrón de antena de una estación de TV omnidireccional tiene una forma de dona con la torre pasando a través del hoyo. (La estructura de la antena se ubica en la cima de la torre para una máxima cobertura de línea de vista.) La ERP de la señal de la estación de TV (visual o auditiva) es

$$P_{\text{ERP}} = P_{\text{PEP}} G_A G_L \tag{8–62}$$

donde

P_{PEP} = potencia pico de envolvente a la salida del transmisor.

G_A = ganancia de potencia de la antena (unidades absolutas a diferencia de unidades de decibeles) con respecto a una antena isotrópica,

G_L = ganancia total del sistema de línea de transmisión desde la salida del transmisor a la antena (incluyendo la ganancia de duplexión).

Para una estación de TV de VHF que opera en el canal 5, algunos valores típicos son $G_A = 5.7$, $G_L = 0.873$ (850 pies de línea de transmisión más el duplexor) y una PEP visual de 20.1 kW. Esto

[22] Típicamente se obtiene una resolución horizontal de alrededor de 300 líneas.

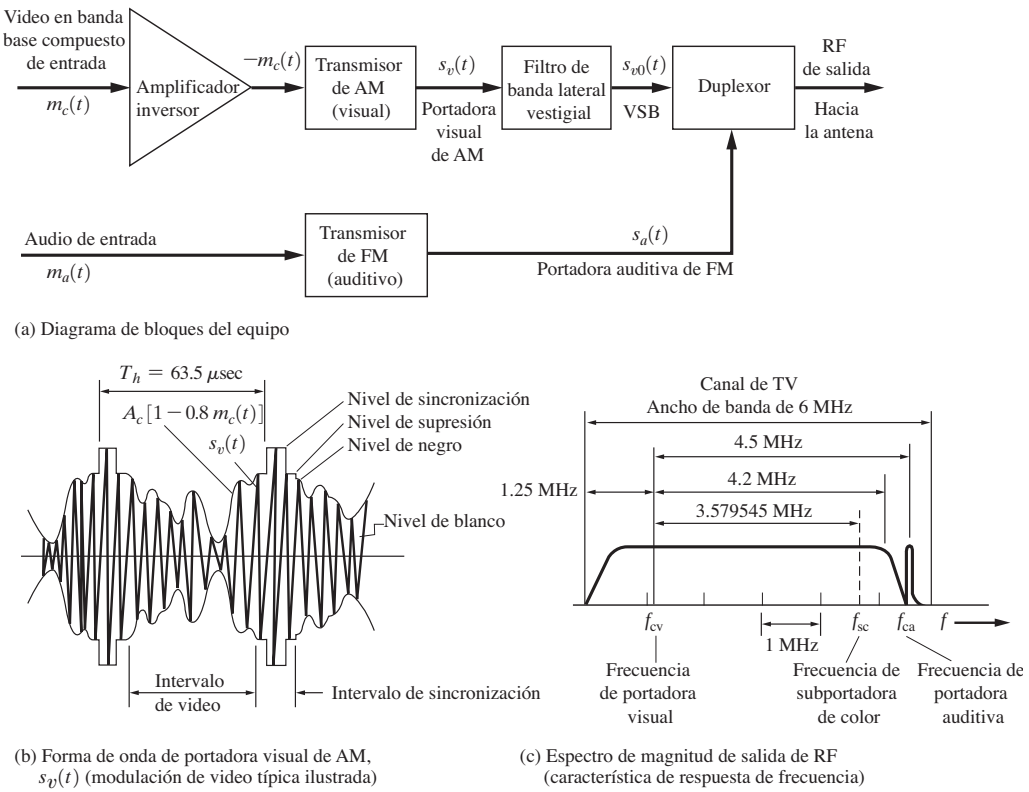


Figura 8–31 Sistema de transmisión de TV.

resulta en una ERP general de 100 kW, la cual es la máxima potencia permitida por la FCC para los canales del 2 al 6 (banda baja de VHF). Para una estación de UHF que opera en el canal 20, algunos valores típicos son $P_{PEP} = 21.7$ kW, $G_A = 27$, $G_L = 0.854$ (850 pies de línea de transmisión), lo cual resulta en una ERP de 500 kW.

Un diagrama de bloques simplificado del receptor de TV en blanco y negro se muestra en la figura 8-32. El video compuesto, $m_c(t)$, como se describió anteriormente, además de una portadora de FM de 4.5 MHz que contiene la modulación de audio, aparece a la salida del detector de envolvente. La portadora de FM de 4.5 MHz está presente debido a la no linealidad del detector de envolvente y a que la entrada del detector (señal de IF) contiene, entre otros términos, la portadora auditiva de FM además de un término discreto (es decir, senoidal), el cual es la portadora de video, localizada 4.5 MHz más allá de la señal de portadora de FM. El producto de intermodulación de estas dos señales produce la señal FM de 4.5 MHz, la cual se conoce como *señal de interportadora*, y contiene la modulación auditiva. Por supuesto que si cualquiera de estos dos componentes de señal de entrada desaparece, la señal de salida de 4.5 MHz también lo hará. Esto ocurrirá si el nivel de blanco de la imagen se permite que sea menor a, por ejemplo, 10□ del nivel pico de la envolvente (nivel de punta de sincronización) de la señal visual de AM. Esta es la razón por la cual la FCC especifica que el nivel de blanco no puede ser menor a (12.5 ± 2.5□) del nivel pico de la envolvente (consulte la tabla 8-11 y la figura 8-31b). Cuando esto ocurre, se escuchará un zumbido en la señal de sonido porque la portadora de FM de 4.5 MHz desaparece a una velocidad de 60 Hz (cam-

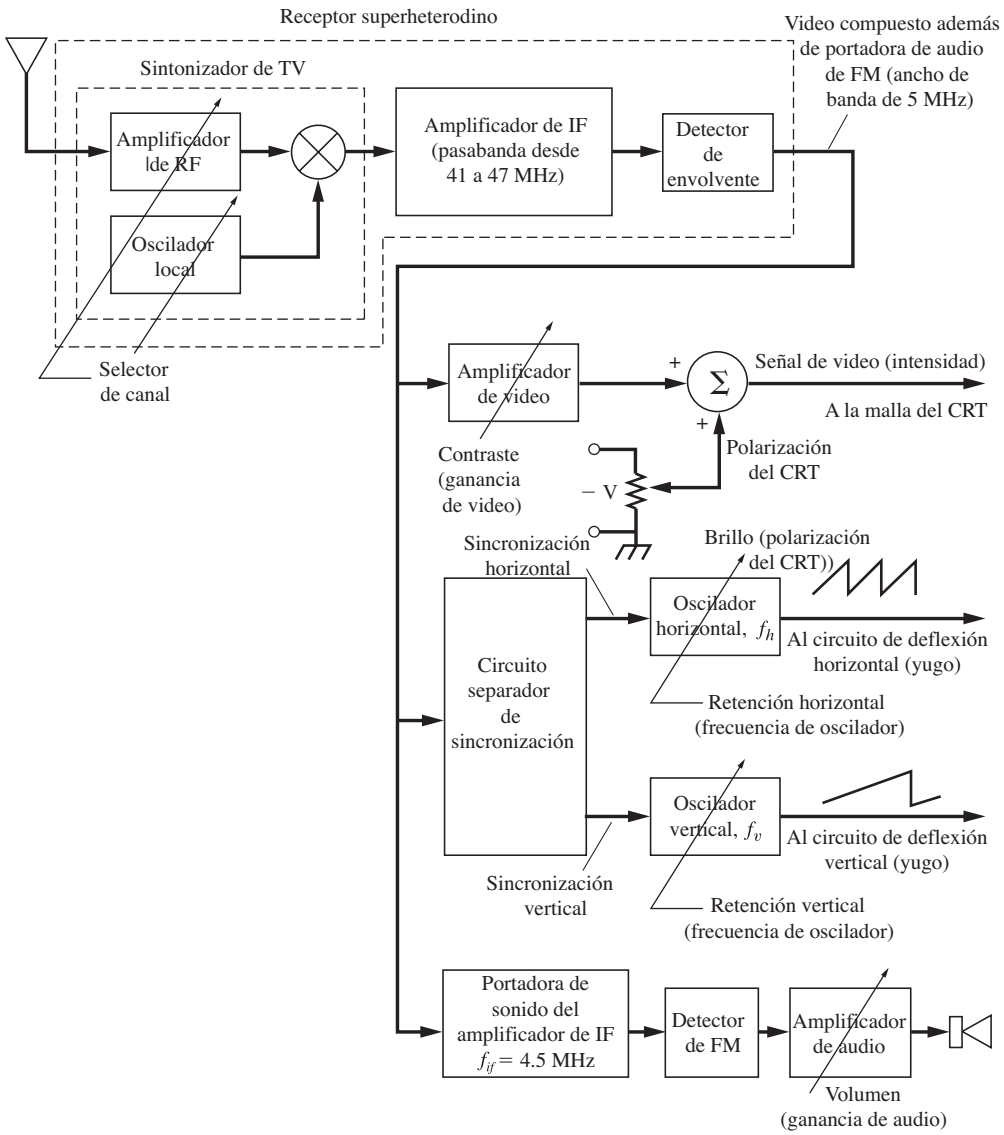

Receptor superheterodino
Video compuesto además de portadora de audio de FM (ancho de banda de 5 MHz)
Sintonizador de TV
Amplificador lde RF
Oscilador local
Amplificador de IF (pasabanda desde 41 a 47 MHz)
Detector de envolvente
Selector de canal
Amplificador de video
+
Σ
+
Señal de video (intensidad)
A la malla del CRT
Polarización del CRT
Contraste (ganancia de video)
– V
Sincronización horizontal
Brillo (polarización del CRT))
Circuito separador de sincronización
Oscilador horizontal, f_h
Al circuito de deflexión horizontal (yugo)
Retención horizontal (frecuencia de oscilador)
Oscilador vertical, f_v
Al circuito de deflexión vertical (yugo)
Sincronización vertical
Retención vertical (frecuencia de oscilador)
Portadora de sonido del amplificador de IF f_{if} = 4.5 MHz
Detector de FM
Amplificador de audio
Volumen (ganancia de audio)

Figura 8–32 Receptor de TV en blanco y negro.

po) durante la porción blanca de la escena de TV. El circuito separador de sincronización consiste en un integrador con pérdida para recuperar los pulsos de sincronización vertical (anchos) y un diferenciador con pérdida para recuperar los pulsos horizontales (estrechos). El resto del diagrama de bloques se puede explicar por sí mismo. También se muestran los ajustes disponibles al usuario para una TV en blanco y negro.

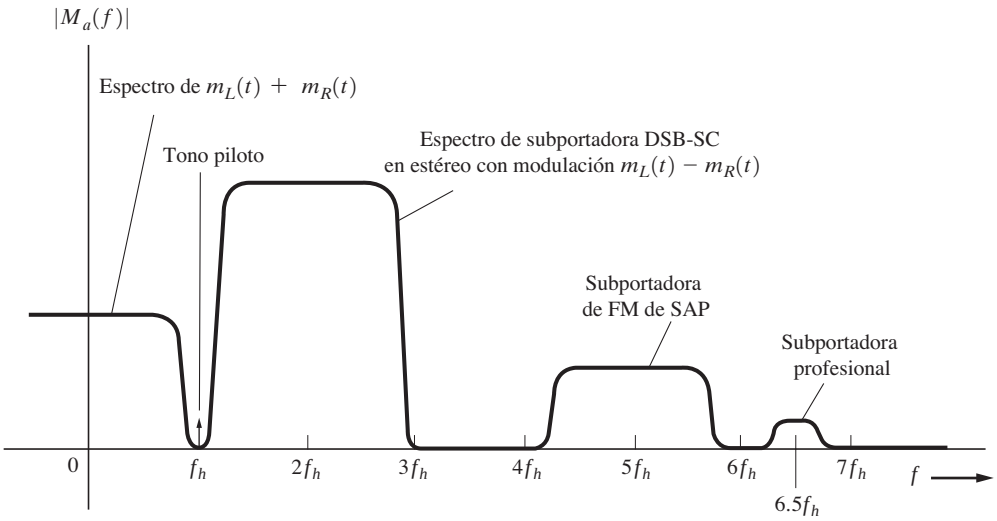


Figura 8–33 Espectro de la modulación en banda base FDM compuesta sobre la portadora auditiva de FM de estaciones de TV estadounidenses.

Sonido MTS en estéreo

Audio en estéreo, también conocido como *sonido de televisión de múltiples canales* (MTS, por sus siglas en inglés), también está disponible y se logra empleando la técnica de FDM que se muestra en la figura 8-33. Esta técnica de FDM es parecida a la ocupada en la difusión por FM estándar, que se estudió en la sección 5-7 y se ilustró en la figura 5-18. Para compatibilidad con los receptores de televisión de audio monofónico, el audio izquierdo más el derecho, $m_L(t) + m_R(t)$, se modula directamente por frecuencia en la portadora auditiva de la estación de televisión. La frecuencia de subportadora es $2f_h$, donde $f_h = 15.734$ kHz es la frecuencia de sincronización horizontal para el video (consulte la tabla 8-11). También se proporciona la habilidad para un *programa de segundo audio* (SAP, por sus siglas en inglés), como audio en un segundo lenguaje. Esto se logra con una subportadora de FM de frecuencia $5f_h$. Aún más, se permite una portadora de *canal profesional* a $6.5f_h$ para la transmisión de voz o de datos con base en un servicio de suscripción para clientes. Para profundizar en los estándares auditivos de FDM que las difusoras de televisión han adoptado y otros posibles formatos de FDM, consulte el tratado de Eilers [1985].

Televisión a color

Las imágenes de televisión a color se sintetizan combinando luz roja, verde y azul en una proporción apropiada para producir el color deseado. Esto se realiza mediante un CRT a color que tiene tres tipos de fósforos: un tipo que emite luz roja, otro que emite luz verde y un tercer tipo que emite luz azul cuando se tocan por electrones. Por lo tanto, se requieren tres señales electrónicas de video, $m_R(t)$, $m_G(t)$ y $m_B(t)$, para controlar los circuitos que crearán las luces roja, verde y azul. Aún más, se requiere de un sistema de transmisión de TV a color compatible de tal forma que los aparatos de TV en blanco y negro recibirán la señal de luminancia de video, $m_y(t)$, la cual corresponde a la

escala de grises de la escena. Esta compatibilidad entre la transmisión a color y en blanco y negro se logra usando una técnica de multiplexión que es análoga a la de FM en estéreo, a excepción de que se involucran tres señales en el problema en lugar de dos.

Se discutirá el sistema de TV a color compatible del Comité Nacional de Sistemas de Televisión (NTSC, por sus siglas en inglés) que se desarrolló en Estados Unidos y se adoptó para las transmisiones en dicho país en 1954. Esta técnica se ilustra en la figura 8-34. Para lograr una transmisión compatible, las formas de onda que corresponden a la intensidad de los componentes rojo, verde y azul de la escena, $m_R(t)$, $m_G(t)$ y $m_B(t)$, respectivamente, se combinan linealmente para sintetizar la señal en blanco y negro equivalente, $m_y(t)$, y dos señales de video independientes más, conocidas como componentes *en fase* y *en cuadratura*, $m_i(t)$ y $m_q(t)$. (Los nombres de estas componentes provienen de la técnica de modulación en cuadratura que se utiliza para modularlos a una subportadora.) Las ecuaciones exactas manejadas para estas señales pueden expresarse en forma matricial:

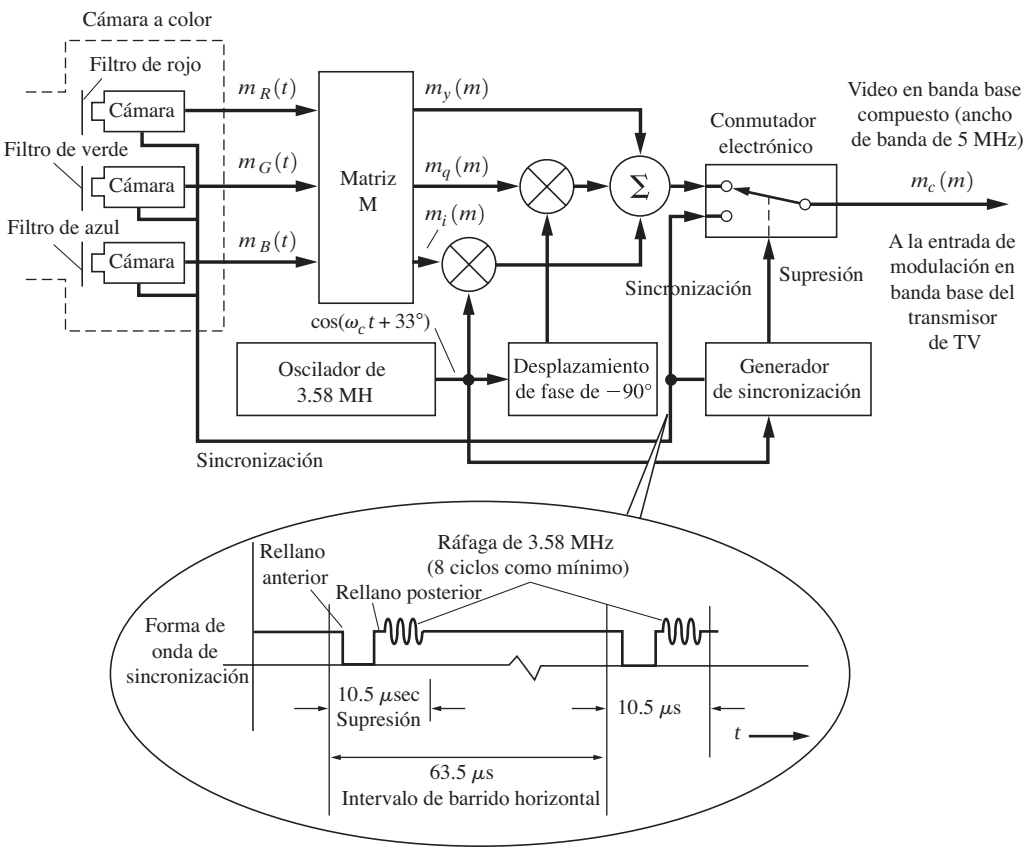


Figura 8–34 Generación de la señal de video en banda base compuesta NTSC. [Técnicamente, $m_q(t)$ se filtra por pasabajas a un ancho de banda de 0.5 MHz y $m_i(t)$ se filtra por pasabajas a un ancho de banda de 1.5 MHz.]

$$\begin{bmatrix} m_y(t) \\ m_i(t) \\ m_q(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.3 & 0.59 & 0.11 \\ 0.6 & -0.28 & -0.32 \\ 0.21 & -0.52 & 0.31 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} m_{\mathrm{R}}(t) \\ m_{\mathrm{G}}(t) \\ m_{\mathrm{B}}(t) \end{bmatrix} \tag{8–63}$$

donde M es una matriz de 3×3 que traduce las señales de rojo, verde y azul a las señales (en banda base) de brillo, en fase y en cuadratura de video. Por ejemplo, de la ecuación (8-63), la ecuación para la señal de *luminancia* (blanco y negro) es

$$m_y(t) = 0.3m_{\mathrm{R}}(t) + 0.59m_{\mathrm{G}}(t) + 0.11m_{\mathrm{B}}(t) \tag{8–64}$$

De manera similar, las ecuaciones para $m_i(t)$ y $m_q(t)$, las cuales se conocen como señales de *crominancia*, son fáciles de obtener. Además, note que *si* $m_{\mathrm{R}}(t) = m_{\mathrm{G}}(t) = m_{\mathrm{B}}(t) = 1$, lo cual corresponde al máximo para el rojo, verde y azul, entonces $m_y(t) = 1$, lo cual corresponde al nivel de blanco en la imagen en blanco y negro.

Los componentes de crominancia son otros dos linealmente independientes, y si se transmiten al receptor de TV a color junto con la señal de luminancia, estas tres señales pueden usarse para recuperar las señales de rojo, verde y azul utilizando una operación de inversa de matriz. El ancho de banda de la señal de luminancia requiere mantenerse a 4.2 MHz para preservar la transición aguda (alta frecuencia) en la intensidad de la luz que ocurre a la orilla de los objetos en la escena. Sin embargo, el ancho de banda de las señales de crominancia no necesita ser tan grande como esto, ya que el ojo no es tan sensible a las transiciones de color en una escena como lo es en las de blanco y negro. De acuerdo a los estándares de NTSC, el ancho de banda de la señal $m_i(t)$ es de 1.5 MHz, y el de $m_q(t)$ es de 0.5 MHz. Cuando se modulan en cuadratura sobre una subportadora, la señal en banda base compuesta resultante tendrá entonces un ancho de banda de 4.2 MHz. (La banda lateral superior de la señal de subportadora en fase se atenúa para mantener un ancho de banda de 4.2 MHz.)

La señal en banda base de video compuesta de NTSC es

$$m_c(t) = \begin{cases} m_s(t), & \text{durante el intervalo de sincronización} \\ m_y(t), + \mathrm{Re}\{g_{\mathrm{sc}}(t)e^{j\omega_{\mathrm{sc}}t}\}, & \text{durante el intervalo de video} \end{cases} \tag{8–65}$$

donde

$$g_{\mathrm{sc}}(t) = [m_i(t) - jm_q(t)]e^{j33^\circ} \tag{8–66}$$

La ecuación (8-66) indica que la información de crominancia se modula en cuadratura sobre una subportadora (como se describió en la tabla 4-1)□$m_s(t)$ es la señal de sincronización, $m_y(t)$ la señal de luminancia y $g_{\mathrm{sc}}(t)$ la envolvente compleja de la señal de subportadora. La frecuencia de subportadora es $f_{\mathrm{sc}} = 3.579545$ MHz $\pm$ 10 Hz, lo cual, como se verá más tarde, se selecciona para que la señal de subportadora no interfiera con la de luminancia aun cuando ambas caen dentro de la banda de paso de 4.2 MHz.

En la difusión de TV analógica, esta señal en banda base compuesta de NTSC se modula por amplitud sobre la portadora visual, como se describe en la ecuación (8-61) y se muestra en la figura 8-31. En aplicaciones de difusión por microondas y aplicaciones de difusión vía satélite, esta señal en banda base de NTSC se modula en frecuencia sobre una portadora, como se describió en la

sección 8-5. Estas señales en banda base a color pueden transmitirse sobre sistemas de comunicaciones que se ocupan para la TV en blanco y negro, aunque la respuesta de frecuencia y las tolerancias de linealidad que se especifican son más estrictas para la transmisión de TV a color.

Como se indicó previamente, la envolvente compleja para la subportadora, como se describe en la ecuación (8-66), contiene la información de color. La magnitud de la envolvente compleja, $|g_{sc}(t)|$, es la *saturación*, o cantidad de color, en la escena conforme se barre con el tiempo. El ángulo de la envolvente compleja, $\angle g_{sc}(t)$, indica el tono, o tinte, como una función del tiempo. Por lo tanto, $g_{sc}(t)$ es un vector que se mueve alrededor del plano complejo como una función del tiempo conforme se barren las líneas de la imagen. Este vector puede visualizarse en un instrumento llamado *vectorescopio*, el cual es un CRT que despliega al vector $g_{sc}(t)$, como se muestra en la figura 8-35. El vectorescopio es una parte común del equipo de prueba que se usa para calibrar equipo de TV a color y suministrar una medida en línea de la calidad de la señal de color que se transmite. La presentación típica del vectorescopio tiene al eje *x* localizado en la dirección vertical, como se indica en la figura. Utilizando la ecuación (8-66) se observa que las direcciones positivas de los ejes para las señales $m_i(t)$ y $m_q(t)$ también se indican en la presentación del vectorescopio, junto con los vectores para los colores saturados de rojo, verde y azul. Por ejemplo, si el rojo saturado está presente, entonces $m_R = 1$ y $m_G = m_B = 0$. De la ecuación (8-63) se tiene que $m_i = 0.6$ y $m_q = 0.21$ por lo tanto, de la ecuación (8-66) el vector de rojo saturado es

$$(g_{sc})_{rojo} = (0.60 - j0.21)e^{j33^\circ} = 0.64\ \angle 13.7^\circ$$

De manera similar, el vector verde saturado es $(g_{sc})_{verde} = 0.59\ \angle 151^\circ$, y el vector azul saturado es $(g_{sc})_{azul} = 0.45\ \angle 257^\circ$. Estos vectores se muestran en la figura 8-35. Es interesante notar que los colores complementarios tienen polaridades opuestas a cada uno en el vectorescopio, donde cian es el complemento de rojo, magenta el complemento de verde y amarillo el complemento de azul.

Para la demodulación de la subportadora de color en el receptor se requiere de una referencia de fase. Ésta se suministra al modular una ráfaga de ocho ciclos (o más) de una subportadora senoidal de 3.58 MHz en el "rellano posterior" del pulso de sincronización horizontal, como se muestra en la figura 8-34. La fase de la senoidal de referencia es de +90° con respecto al eje *x*, como se indica en la presentación del vectorescopio (figura 8-35).

Un receptor a color es parecido al receptor de TV en blanco y negro a excepción de que tiene circuitos demoduladores de color y un CRT a color. Esta diferencia se muestra en la figura 8-36, donde se indica la circuitería demoduladora. Las señales en fase y en cuadratura, $m_i(t)$ y $m_q(t)$, se recuperan (demodulan) manejando detectores de producto donde la señal de referencia se obtiene de un circuito de PLL que se engancha a la ráfaga de color (la cual se transmitió durante el rellano posterior del pulso de sincronización). M^{-1} es la matriz inversa de la que se obtiene en la ecuación (8-63), de tal manera que se recuperan las tres formas de onda de video correspondientes a las señales de intensidad de rojo, verde y azul. Note que el control de tono en el aparato de TV ajusta la fase de la referencia que establece el tinte de la imagen en la TV. El control de color establece la ganancia de la señal de subportadora de crominancia. Si la ganancia se reduce a cero, no existirá una subportadora en la entrada a los detectores de producto. En consecuencia, se reproducirá una imagen en blanco y negro en el CRT de la TV a color.

Por supuesto que es posible utilizar diferentes fases de referencia en las entradas de detectores simétricos, *siempre y cuando* la matriz de decodificación se cambie para producir m_R, m_G y m_B a su salida. Por ejemplo, una técnica popular emplea las fases R-□ y B-□ en la entrada de los moduladores simétricos [Grob, 1975]. En este caso la fase de referencia a la salida del circuito de control de

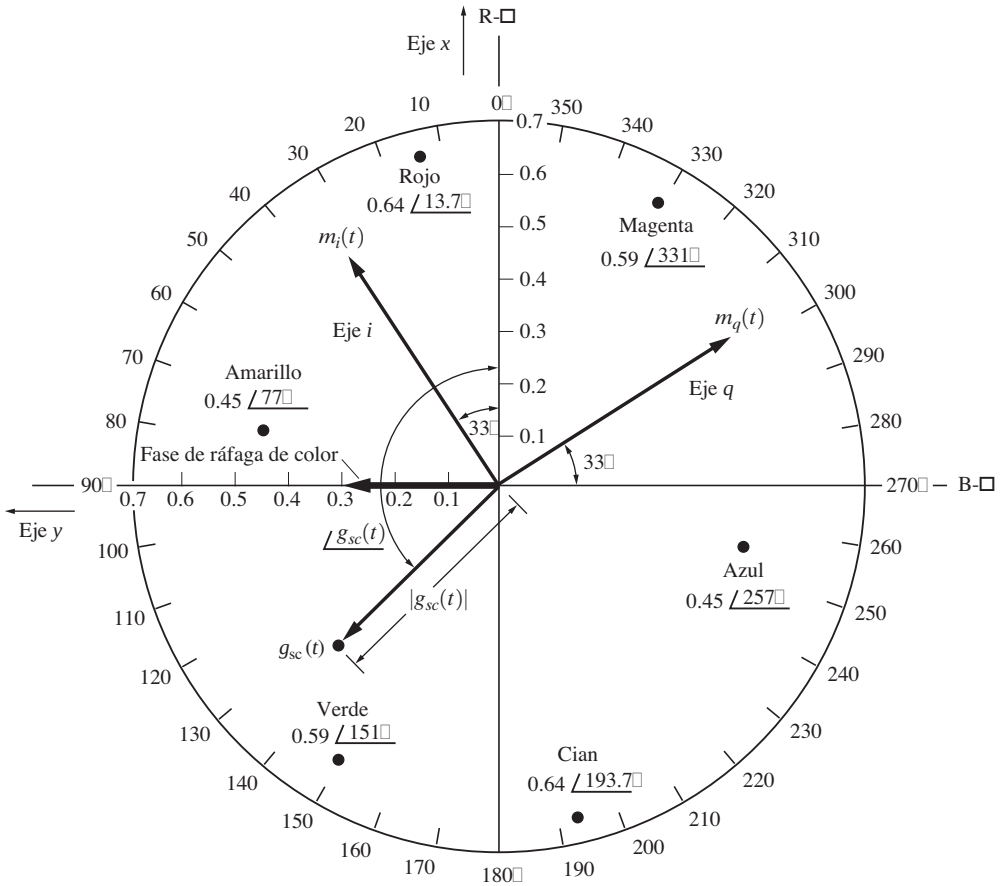


Figura 8–35 Presentación por vectorescopio de la envolvente compleja para la subportadora de crominancia a 3.58 MHz.

tono es de 0° en lugar de 33°, como se muestra en la figura 8-36. Esto corresponde a la detección de la subportadora a lo largo de los ejes R-□ y B-□, como se indica en la presentación del vectorescopio (figura 8-35). En este caso, $m_R(t) - m_□(t)$ se obtiene a la salida del detector de producto superior, y si se ocupa una ganancia de dos en el detector de producto inferior, entonces se obtiene $m_B(t) - m_□(t)$ a su salida. Estas dos salidas pueden agregarse en las proporciones adecuadas para obtener $m_G(t) - m_□(t)$. Estas tres señales, $m_R(t) - m_□(t)$, $m_G(t) - m_□(t)$ y $m_B(t) - m_□(t)$, pueden aplicarse a las tres redes de control de un CRT a color de tres haces (un haz activando el fósforo rojo, otro el verde y uno más para el azul). La señal $-m_□(t)$ se aplica al cátodo común de los tres haces de tal forma que las señales efectivas de los haces son $m_R(t)$, $m_G(t)$ y $m_B(t)$, respectivamente, las cuales son las señales deseadas. Aún más, para la operación en blanco y negro, sólo es necesaria para remover las tres señales de la red de control, ya que la señal de control de luminancia se aplica al cátodo.

Como se mencionó anteriormente, las señales de subportadora tanto de luminancia como de crominancia están contenidas en la señal en banda base compuesta de 4.2 MHz. Esto resulta en

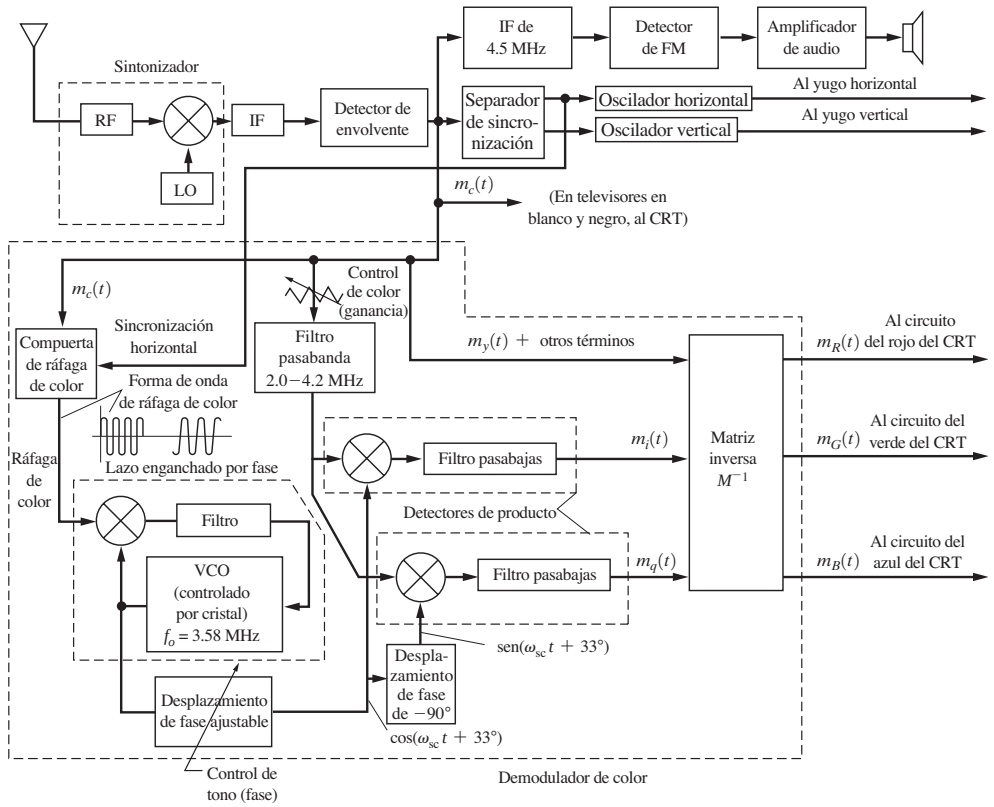


Figura 8–36 Receptor de TV a color con demoduladores IQ.

señales interferentes en los circuitos de video del receptor. Por ejemplo, en la figura 8-36 existe una señal interferente (es decir, otros términos) a la entrada del circuito de la matriz inversa. La interferencia se promedia en base de barrido de línea a línea por la visión del espectador si la frecuencia de la subportadora de crominancia es un múltiplo impar de la mitad de la frecuencia de barrido horizontal. Por ejemplo, de la tabla 8-11, f_{sc} = 3,579,545 Hz y f_h = 15,734 Hz. En consecuencia, existen 227.5 ciclos de la interferencia de crominancia de 3.58 MHz a través de una línea de barrido de la imagen. Debido a que existe una mitad de ciclo de sobra, la interferencia en la *siguiente* línea de barrido será de *180° fuera de fase* con la de la línea presente, y el ojo *cancelará* la interferencia cuando el espectador observe la imagen.

Como se ha visto, el sistema a color de NTSC es una aplicación ingeniosa de principios básicos de ingeniería, y el espectador promedio de TV a color ciertamente no aprecia esta capacidad inventiva.

Estándares para sistemas de TV y CATV

La tabla 8-11 ofrece un resumen de algunos de los estándares estadounidenses de transmisión de TV analógica, y la figura 8-37 presenta detalles de la forma de onda de sincronización. Un listado de las

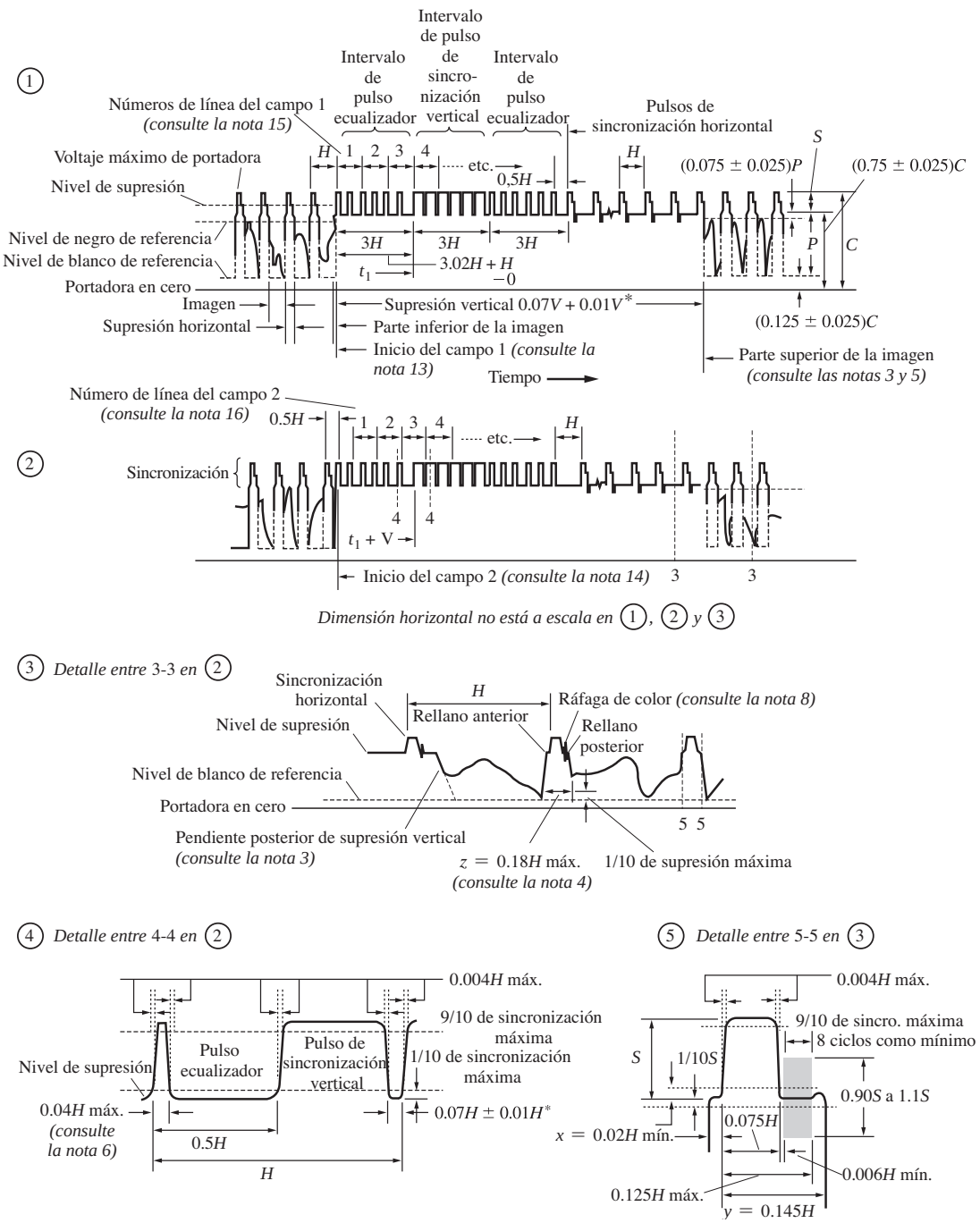

1
Intervalo de pulso ecualizador
Intervalo de pulso de sincro-nización vertical
Intervalo de pulso ecualizador
Números de línea del campo 1 (consulte la nota 15)
Pulsos de sincronización horizontal
Voltaje máximo de portadora
Nivel de supresión
Nivel de negro de referencia
Nivel de blanco de referencia
Portadora en cero
Imagen
Supresión horizontal
Supresión vertical 0.07V + 0.01V*
Parte inferior de la imagen
Inicio del campo 1 (consulte la nota 13)
Tiempo
Parte superior de la imagen (consulte las notas 3 y 5)
(0.075 ± 0.025)P
(0.75 ± 0.025)C
(0.125 ± 0.025)C
0,5H
3H
3.02H + H −0
t1
Número de línea del campo 2 (consulte la nota 16)
0.5H
Sincronización
t1 + V
Inicio del campo 2 (consulte la nota 14)
Dimensión horizontal no está a escala en 1, 2 y 3
3 Detalle entre 3-3 en 2
Sincronización horizontal
Ráfaga de color (consulte la nota 8)
Rellano anterior
Rellano posterior
Pendiente posterior de supresión vertical (consulte la nota 3)
z = 0.18H máx. (consulte la nota 4)
1/10 de supresión máxima
4 Detalle entre 4-4 en 2
0.004H máx.
9/10 de sincronización máxima
1/10 de sincronización máxima
Pulso ecualizador
Pulso de sincronización vertical
0.04H máx. (consulte la nota 6)
0.07H ± 0.01H*
5 Detalle entre 5-5 en 3
9/10 de sincro. máxima
8 ciclos como mínimo
0.90S a 1.1S
x = 0.02H mín.
0.075H
0.006H mín.
0.125H máx.
y = 0.145H

Figura 8–37 Estándares estadounidenses de forma de onda de sincronización de televisión para la transmisión a color. (De la parte 73 de las reglas y normas de la FCC.)

frecuencias para los canales de difusión aéreos de TV se aprecia en la tabla 8-12. Además, la tabla 8-13 contiene una comparación de algunos estándares de difusión de TV usados por varios países. El estándar B del sistema CCIR, el cual es un sistema de modulación negativa de 625 líneas/cuadro y 25 cuadros/segundo, es el estándar de TV dominante en Europa. Además de estos estándares para la TV convencional que se muestran en esta tabla, existen estándares estadounidenses para la TV digital y se discutirán en la siguiente sección. Cuando se difunden señales de TV de un país a otro vía satélite, se emplean los estándares del país de origen y, si es necesario, la señal se convierte a los estándares del país receptor en la estación terrestre receptora.

También se presentan los estándares norteamericanos para los canales de CATV en la tabla 8-12. Los sistemas de CATV ocupan cable coaxial con amplificadores para distribuir señales de TV y de otro tipo de la distribuidora al suscriptor. □a que las señales de cable no se radian, las frecuencias que normalmente se asignan al radio bidireccional y a otros servicios al aire pueden utilizarse

---

NOTAS PARA LA FIGURA 8-37

1. H = tiempo del inicio de una línea al inicio de la siguiente línea = $1/f_h$ (consulte la tabla 8-11).
2. V = tiempo del inicio de un campo al inicio del siguiente campo = $1/f_v$ (consulte la tabla 8-11).
3. Los flancos anteriores y posteriores de la supresión vertical pueden completarse en menos de 0.1 H.
4. Las pendientes anteriores y posteriores de la supresión horizontal deben ser lo suficientemente empinadas para preservar los valores mínimo y máximo de $(x + y)$ y (z) bajo todas las condiciones del contenido de imagen.
5. Las dimensiones marcadas con un asterisco indican que las tolerancias dadas se permiten sólo para variaciones de larga plazo y no para ciclos sucesivos.
6. El área del pulso ecualizador deberá ser de entre 0.45 y 0.5 del área de un pulso de sincronización horizontal.
7. La ráfaga de color sigue de cada pulso horizontal, pero se omite siguiendo de los pulsos ecualizadores y durante los pulsos amplios verticales.
8. Ráfagas de color que serán omitidas durante la transmisión monocromática.
9. La frecuencia de ráfaga será de 3.579545 MHz. La tolerancia en la frecuencia será de ±10 Hz, con una máxima razón de cambio de la frecuencia que no exceda de 1/10 Hz/s.
10. La frecuencia de barrido horizontal será de 2/455 veces la de ráfaga.
11. Las dimensiones especificadas por la ráfaga determinan los tiempos de inicio y de paro de la ráfaga, pero no su fase. La ráfaga de color consiste en la modulación de amplitud de una onda senoidal continua.
12. La dimensión P representa la excursión pico de la señal de luminancia del nivel de supresión, pero no incluye la señal de crominancia. La dimensión S es la amplitud de sincronización sobre el nivel de supresión. La dimensión C es la amplitud pico de portadora.
13. El inicio del campo 1 se define por una línea completa entre el primer pulso ecualizador y los pulsos de sincronización H que le preceden.
14. El inicio del campo 2 se define por una mitad de línea entre el primer pulso ecualizador y los pulsos de sincronización H que le preceden.
15. Los números de línea del campo 1 inician con el primer pulso ecualizador en el campo 1.
16. Los números de línea del campo 2 inician con el primer pulso ecualizador en el campo 2.
17. Remítase a la tabla 8-11 para más explicaciones y tolerancias.

TABLA 8-12 ASIGNACIONES DE FRECUENCIA DE CANALES DE TELEVISIÓN Y DE CABLE ESTADOUNIDENSES

Canal		Canales de difusión al aire				Sistemas de cable					
						Cable estándar		Sistema de cable HRC		Sistema de cable IRC	
Número de canal	Designación de cable	Límite inferior (MHz)	Límite superior (MHz)	Portadora de video analógico (MHz)	Portadora de audio analógico (MHz)	Límite inferior (MHZ)	Portadora de video analógico (MHZ)	Límite inferior (MHZ)	Portadora de video analógico (MHZ)	Límite inferior (MHZ)	Portadora de video analógico (MHZ)
	T-7					5.75	7.00				
	T-8					11.75	13.00				
	T-9					17.75	19.00				
	T-10					23.75	25.00				
	T-11					29.75	31.00				
	T-12					35.75	37.00				
	T-13					41.75	43.00				
	T-14					47.75	49.00				
Banda baja de VHF											
2		54.00	60.00	55.25	59.75	54.00	55.25	52.75	54.00	54.00	55.25
3		60.00	66.00	61.25	65.75	60.00	61.25	58.75	60.00	60.00	61.25
4		66.00	72.00	67.25	71.75	66.00	67.25	64.75	66.00	66.00	67.25
1	A-8	Radio bidireccional, aeronáutica, 72-76 MHz				Ninguno	Ninguno	70.75	72.00	72.00	73.25
5	A-7	76.00	82.00	77.25	81.75	76.00	77.25	76.75	78.00	78.00	79.25
6	A-6	82.00	88.00	83.25	87.75	82.00	83.25	82.75	84.00	84.00	85.25
		Difusión por FM, aeronáutica, radio bidireccional, 88-174 MHz									
Banda alta de VHF											
7		174.00	180.00	175.25	179.75	174.00	175.25	172.75	174.00	174.00	175.25
8		180.00	186.00	181.25	185.75	180.00	181.25	178.75	180.00	180.00	181.25
9		186.00	192.00	187.25	191.75	186.00	187.25	184.75	186.00	186.00	187.25
10		192.00	198.00	193.25	197.75	192.00	193.25	190.75	192.00	192.00	193.25
11		198.00	204.00	199.25	203.75	198.00	199.25	196.75	198.00	198.00	199.25
12		204.00	210.00	205.25	209.75	204.00	205.25	202.75	204.00	204.00	205.25
13		210.00	216.00	211.25	215.75	210.00	211.25	208.75	210.00	210.00	211.25
UHF		Militar, aeronáutica, 216-470 MHz									
14	A	470.00	476.00	471.25	475.75	120.00	121.25	118.75	120.00	120.00	121.25
15	B	476.00	482.00	477.25	481.75	126.00	127.25	124.75	126.00	126.00	127.25
16	C	482.00	488.00	483.25	487.75	132.00	133.25	130.75	132.00	132.00	133.25
17	D	488.00	494.00	489.25	493.75	138.00	139.25	136.75	138.00	138.00	139.25
18	E	494.00	500.00	495.25	499.75	144.00	145.25	142.75	144.00	144.00	145.25
19	F	500.00	506.00	501.25	505.75	150.00	151.25	148.75	150.00	150.00	151.25
20	G	506.00	512.00	507.25	511.75	156.00	157.25	154.75	156.00	156.00	157.25

Canal		Canales de difusión al aire				Sistemas de cable					
						Cable estándar		Sistema de cable HRC		Sistema de cable IRC	
Número de canal	Designación de cable	Límite inferior (MHz)	Límite superior (MHz)	Portadora de video analógico (MHz)	Portadora de audio analógico (MHz)	Límite inferior (MHZ)	Portadora de video analógico (MHZ)	Límite inferior (MHZ)	Portadora de video analógico (MHZ)	Límite inferior (MHZ)	Portadora de video analógico (MHZ)
21	H	512.00	518.00	513.25	517.75	162.00	163.25	160.75	162.00	168.00	163.25
22	I	518.00	524.00	519.25	523.75	168.00	169.25	166.75	168.00	162.00	169.25
23	□	524.00	530.00	525.25	529.75	216.00	217.25	214.75	216.00	216.00	217.25
24	K	530.00	536.00	531.25	535.75	222.00	223.25	220.75	222.00	222.00	223.25
25	L	536.00	542.00	537.25	541.75	228.00	229.25	226.75	228.00	228.00	229.25
26	M	542.00	548.00	543.25	547.75	234.00	235.25	232.75	234.00	234.00	235.25
27	N	548.00	554.00	549.25	553.75	240.00	241.25	238.75	240.00	240.00	241.25
28	O	554.00	560.00	555.25	559.75	246.00	247.25	244.75	246.00	246.00	247.25
29	P	560.00	566.00	561.25	565.75	252.00	253.25	250.75	252.00	252.00	253.25
30	Q	566.00	572.00	567.25	571.75	258.00	259.25	256.75	258.00	258.00	259.25
31	R	572.00	578.00	573.25	577.75	264.00	265.25	262.75	264.00	264.00	265.25
32	S	578.00	584.00	579.25	583.75	270.00	271.25	268.75	270.00	270.00	271.25
33	T	584.00	590.00	585.25	589.75	276.00	277.25	274.75	276.00	276.00	277.25
34	U	590.00	596.00	591.25	595.75	282.00	283.25	280.75	282.00	282.00	283.25
35	V	596.00	602.00	597.25	601.75	288.00	289.25	286.75	288.00	288.00	289.25
36	W	602.00	608.00	603.25	607.75	294.00	295.25	292.75	294.00	294.00	295.25
37	AA	608.00	614.00	609.25	613.75	300.00	301.25	298.75	300.00	300.00	301.25
38	BB	614.00	620.00	615.25	619.75	306.00	307.25	304.75	306.00	306.00	307.25
39	CC	620.00	626.00	621.25	625.75	312.00	313.25	310.75	312.00	312.00	313.25
40	DD	626.00	632.00	627.25	631.75	318.00	319.25	316.75	318.00	318.00	319.25
41	EE	632.00	638.00	633.25	637.75	324.00	325.25	322.75	324.00	324.00	325.25
42	FF	638.00	644.00	639.25	643.75	330.00	331.25	328.75	330.00	330.00	331.25
43	GG	644.00	650.00	645.25	649.75	336.00	337.25	334.75	336.00	336.00	337.25
44	HH	650.00	656.00	651.25	655.75	342.00	343.25	340.75	342.00	342.00	343.25
45	II	656.00	662.00	657.25	661.75	348.00	349.25	346.75	348.00	348.00	349.25
46	⊞	662.00	668.00	663.25	667.75	354.00	355.25	352.75	354.00	354.00	355.25
47	KK	668.00	674.00	669.25	673.75	360.00	361.25	358.75	360.00	360.00	361.25
48	LL	674.00	680.00	675.25	679.75	366.00	367.25	364.75	366.00	366.00	367.25
49	MM	680.00	686.00	681.25	685.75	372.00	373.25	370.75	372.00	372.00	373.25
50	NN	686.00	692.00	687.25	691.75	378.00	379.25	376.75	378.00	378.00	379.25
51	OO	692.00	698.00	693.25	697.75	384.00	385.25	382.75	384.00	384.00	385.25
52	PP	698.00	704.00	699.25	703.75	390.00	391.25	388.75	390.[illegible]	390.00	391.25
53	QQ	704.00	710.00	705.25	709.75	396.00	397.25	394.75	396.00	396.00	397.25

54	RR	710.00	716.00	711.25	715.75	402.00	403.25	400.75	402.00	402.00	403.25
55	SS	716.00	722.00	717.25	721.75	408.00	409.25	406.75	408.00	408.00	409.25
56	TT	722.00	728.00	723.25	727.75	414.00	415.25	412.75	414.00	414.00	415.25
57	UU	728.00	734.00	729.25	733.75	420.00	421.25	418.75	420.00	420.00	421.25
58	VV	734.00	740.00	735.25	739.75	426.00	427.25	424.75	426.00	426.00	427.25
59	WW	740.00	746.00	741.25	745.75	432.00	433.25	430.75	432.00	432.00	433.25
60	XX	746.00	752.00	747.25	751.75	438.00	439.25	436.75	438.00	438.00	439.25
61	□□	752.00	758.00	753.25	757.75	444.00	445.25	442.75	444.00	444.00	445.25
62	ZZ	758.00	764.00	759.25	763.75	450.00	451.25	448.75	450.00	450.00	451.25
63		764.00	770.00	765.25	769.75	456.00	457.25	454.75	456.00	456.00	457.25
64		770.00	776.00	771.25	775.75	462.00	463.25	460.75	462.00	462.00	463.25
65		776.00	782.00	777.25	781.75	468.00	469.25	466.75	468.00	468.00	469.25
66		782.00	788.00	783.25	787.75	474.00	475.25	472.75	474.00	474.00	475.25
67		788.00	794.00	789.25	793.75	480.00	481.25	478.75	480.00	480.00	481.25
68		794.00	800.00	795.25	799.75	486.00	487.25	484.75	486.00	486.00	487.25
69		800.00	806.00	801.25	805.75	492.00	493.25	490.75	492.00	492.00	493.25
70		806.00	812.00	807.25	811.75	498.00	499.25	496.75	498.00	498.00	499.25
71		812.00	818.00	813.25	817.75	504.00	505.25	502.75	504.00	504.00	505.25
72		818.00	824.00	819.25	823.75	510.00	511.25	508.75	510.00	510.00	511.25
73		824.00	830.00	825.25	829.75	516.00	517.25	514.75	516.00	516.00	517.25
74		830.00	836.00	831.25	835.75	522.00	523.25	520.75	522.00	522.00	523.25
75		836.00	842.00	837.25	841.75	528.00	529.25	526.75	528.00	528.00	529.25
76		842.00	848.00	843.25	847.75	534.00	535.25	532.75	534.00	534.00	535.25
77		848.00	854.00	849.25	853.75	540.00	541.25	538.75	540.00	540.00	541.25
78		854.00	860.00	855.25	859.75	546.00	547.25	544.75	546.00	546.00	547.25
79		860.00	866.00	861.25	865.75	552.00	553.25	550.75	552.00	552.00	553.25
80		866.00	872.00	867.25	871.75	558.00	559.25	556.75	558.00	558.00	559.25
81		872.00	878.00	873.25	877.75	564.00	565.25	562.75	564.00	564.00	565.25
82		878.00	884.00	879.25	883.75	570.00	571.25	568.75	570.00	570.00	571.25
83		884.00	890.00	885.25	889.75	576.00	577.25	574.75	576.00	576.00	577.25
84						582.00	583.25	580.75	582.00	582.00	583.25
85						588.00	589.25	586.75	588.00	588.00	589.25
86						594.00	595.25	592.75	594.00	594.00	595.25
87						600.00	601.25	598.75	600.00	600.00	601.25
88						606.00	607.25	604.75	606.00	606.00	607.25
89						612.00	613.25	610.75	612.00	612.00	613.25
90						618.00	619.25	616.75	618.00	618.00	619.25
91						624.00	625.25	622.75	624.00	624.00	625.25
92						630.00	631.25	628.75	630.00	630.00	631.25
93						636.00	637.25	634.75	636.00	636.00	637.25
94						642.00	643.25	640.75	642.00	642.00	643.25
95	A-5					90.00	91.25	88.75	90.00	90.00	91.25
96	A-4					96.00	97.25	94.75	96.00	96.00	97.25

Canal		Canales de difusión al aire				Sistemas de cable					
						Cable estándar		Sistema de cable HRC		Sistema de cable IRC	
Número de canal	Designación de cable	Límite inferior (MHz)	Límite superior (MHz)	Portadora de video analógico (MHz)	Portadora de audio analógico (MHz)	Límite inferior (MHZ)	Portadora de video analógico (MHZ)	Límite inferior (MHZ)	Portadora de video analógico (MHZ)	Límite inferior (MHZ)	Portadora de video analógico (MHZ)
97	A-3					102.00	103.25	100.75	102.00	102.00	103.25
98	A-2					108.00	109.25	106.75	108.00	108.00	109.25
99	A-1					114.00	115.25	112.75	114.00	114.00	115.25
100						648.00	649.25	646.75	648.00	648.00	649.25
101						654.00	655.25	652.75	654.00	654.00	655.25
102						660.00	661.25	658.75	660.00	660.00	661.25
103						666.00	667.25	664.75	666.00	666.00	667.25
104						672.00	673.25	670.75	672.00	672.00	673.25
105						678.00	679.25	676.75	678.00	678.00	679.25
106						684.00	685.25	682.75	684.00	684.00	685.25
107						690.00	691.25	688.75	690.00	690.00	691.25
108						696.00	697.25	694.75	696.00	696.00	697.25
109						702.00	703.25	700.75	702.00	702.00	703.25
110						708.00	709.25	706.75	708.00	708.00	709.25
111						714.00	715.25	712.75	714.00	714.00	715.25
112						720.00	721.25	718.75	720.00	720.00	721.25
113						726.00	727.25	724.75	726.00	726.00	727.25
114						732.00	733.25	730.75	732.00	732.00	733.25
115						738.00	739.25	736.75	738.00	738.00	739.25
116						744.00	745.25	742.75	744.00	744.00	745.25
117						750.00	751.25	748.75	750.00	750.00	751.25
118						756.00	757.25	754.75	756.00	756.00	757.25
119						762.00	763.25	760.75	762.00	762.00	763.25
120						768.00	769.25	766.75	768.00	768.00	769.25
121						774.00	775.25	772.75	774.00	774.00	775.25
122						780.00	781.25	778.75	780.00	780.00	781.25
123						786.00	787.25	784.75	786.00	786.00	787.25
124						792.00	793.25	790.75	792.00	792.00	793.25
125						798.00	799.25	796.75	798.00	798.00	799.25

1 Estaciones al aire en los canales 52 al 69 dejarán de transmitir después de la conversión a la difusión de TV digital en los canales 2 al 51.

2 Estaciones al aire en los canales 70 al 83 suspendieron su difusión en 1974, cuando esas frecuencias se convirtieron para su uso en servicios celulares.

TABLA 8–13 COMPARACIÓN DE ALGUNOS ESTÁNDARES DE DIFUSIÓN DE TELEVISIÓN

	Dónde se utiliza			
Elemento	**Norteamérica, Sudamérica, Japón**	**España, Italia, Inglaterra, Alemania, Sistema B de CCIR[a]**	**Francia**	**Antigua URSS**
Líneas/cuadro	525	625	625	625
Líneas/segundo	15,750	15,625	15,625	15,625
Cuadros/segundo	30	25	25	25
Ancho de banda de video en banda base (MHz)	4.2	5	6	6
Ancho de banda de canal (MHz)	6	7	8	8
Polaridad de modulación de video de AM	Negativa	Negativa	Positiva	Negativa
Tipo de portadora auditiva	FM	FM	AM	FM
Sistema a color	NTSC[b]	PAL[c]	SECAM[d]	SECAM[d]
Frecuencia de subportadora de color (MHz)	3.58	4.43	4.43	4.43

[a]El sistema de 625 líneas/cuadro y 25 cuadros/s es el estándar B del sistema de CCIR (Comité Consultivo Internacional de Comunicaciones, de sus siglas en inglés) y es el estándar de TV dominante en el continente europeo.

[b]NTSC, Comité Nacional de Sistemas de Televisión (Estados Unidos).

[c]PAL, línea con alternancias de fase (Europa)

[d]SECAM, Sequential Couleur □Mémoire (Francia)

para canales de TV adicionales en el cable. En consecuencia, se han estandarizado las asignaciones a los canales de CATV tal y como se muestra en esta tabla.

Existen tres diferentes conjuntos de estándares para los canales de TV por cable: el *sistema estándar de cable*, el *sistema HRC* (*portadora armónica relacionada*, de sus siglas en inglés) y el *sistema IRC* (*portadora incrementalmente relacionada*, de sus siglas en inglés). Los sistemas estándar e IRC utilizan números pares para la frecuencia del flanco inferior del canal, y el HRC cuenta con asignaciones de canal de tal manera que la frecuencia de portadora visual para cada canal es par. Los tres tienen una capacidad de 124 canales (siempre y cuando el sistema por cable tenga amplificadores de banda ancha que operarán hasta a 800 MHz). Para recibir estos canales por cable el usuario debe contar con un aparato de TV con capacidad de CATV o un convertidor reductor para convertir el canal de CATV a un canal al aire, tal como el canal 3 o 4, que puede recibirse por un aparato de TV al aire. La mayoría de los aparatos de TV estadounidenses están "preparados para cable" en la actualidad. Esto significa que existe un conmutador de configuración en hardware o un circuito de configuración por software, incorporado en la TV que permite al usuario adaptar inicialmente la TV para una configuración apropiada de canales (es decir, seleccionar canales de difusión al aire, por cable estándar, HRC o IRC).

Considerando la tabla 8-12, los sistemas de cable estándar e IRC y las estaciones difusoras al aire tienen asignaciones de frecuencia idénticas en los canales 2 al 13. Por lo tanto, si se configura

una TV para recibir canales de difusión al aire, pero se conecta a un sistema de cable estándar o IRC, entonces los canales 2 al 13 se recibirán correctamente del sistema por cable, pero los canales 14 y más allá no funcionarán adecuadamente.

Los sistemas de CATV también pueden ser *bidireccionales*, lo cual permite que algunos suscriptores transmitan señales a la distribuidora. En sistemas divididos de banda baja, las frecuencias por debajo de 50 MHz (canales de la banda T) se emplean para transmitir a la distribuidora. En media banda, frecuencias de sistema divididas entre 120 y 150 MHz se ocupan para transmisión a la distribuidora.

A menudo están disponibles a los suscriptores programas de TV primos por un costo adicional. Los canales primos generalmente están codificados mediante la modificación de la sincronización de video o usando técnicas de encriptación digital. Se suministran decodificadores apropiados a los suscriptores a servicios primos, los cuales, en algunos sistemas, pueden direccionarse y programarse remotamente por la compañía de CATV.

TV digital (DTV)

Desde 1987, la FCC ha fomentado el desarrollo de un sistema de *televisión de alta definición* (HDTV, por sus siglas en inglés) para reemplazar al sistema de NTSC. El sistema de HDTV tiene una alta resolución que se aproxima a la calidad de película de 35 mm y una relación de aspecto (de anchura a altura) de pantalla amplia de 16:9, en lugar de la relación de aspecto de 4:3 de pantalla estrecha del NTSC. Se han propuesto más de 20 métodos para la HDTV [□urgen, 1988□□urgen, 1991]. Para 1993, el número de propuestas competitivas se redujo a cuatro sistemas digitales [Challapali *et al*., 1995□Harris, 1993□Zou, 1991]. En mayo de 1993, los postulantes de estos cuatro sistemas competitivos unieron fuerzas para desarrollar un solo sistema de televisión digital (DTV) que utilizó las mejores ideas de los cuatro sistemas en competencia [Challapali *et al*., 1995□Hopkins, 1994, y Petajan, 1995]. Este grupo conjunto se conoce como la Gran Alianza (GA), y sus miembros son: AT□T, General Instruments Corporation, Massachussets Institute of Technology (MIT), Philips Electronics North America Corporation, David Sarnoff Research Center, Thomson Consumer Electronics y Zenith Electronics Corporation. Esto resultó en el estándar de 1996 de la FCC para la DTV, y ahora existen estaciones (de DTV) al aire en la mayoría de las ciudades de Estados Unidos.

La tabla 8-14 resume el estándar de DTV estadounidense. De hecho, éste es una combinación de varios estándares, lo que permite diferentes resoluciones y relaciones de aspecto. Existen cinco formatos principales. Dos son de *alta definición* (HD, por sus siglas en inglés) y tres de *definición estándar* (SD, por sus siglas en inglés). Imágenes de pantalla amplia (relación de aspecto de 16:9) se especifican en ambos formatos de HD y un formato de SD. Los otros dos formatos de SD emplean imágenes de anchura convencional (4:3). Además, las velocidades de cuadro pueden ser de 24, 30 o 60 cuadros/s con barrido de entrelazado o barrido progresivo. Se incluye el modo de 24 cuadros/s para soportar más fácilmente las películas cinemáticas (la cual es de 24 cuadros/s). Estas variaciones resultan en un total de 18 posibles formatos de imagen. Todos los receptores de DTV se diseñan para decodificar y presentar imágenes para los 18 formatos (aunque la resolución puede no preservarse). El difusor puede cambiar de formato de programa a programa (o de programa a comercial). Sin embargo, la posibilidad de producir todos los formatos no es económica para los difusores. Para la HDTV, las redes de televisión NBC y CBS ocupan 1080i (es decir, $1\,080 \times 1\,980$ pixeles con barrido de entrelazado). ABC usa 720p para HDTV, ya que ellos consideran que el barrido progresivo de 720 líneas es visualmente superior que 1080i. Para la SDTV, NBC y ABC manejan 480p y CBS 480i. Note que la resolución vertical para SDTV, la cual es de 480 líneas, es equivalente a la resolución vertical para la TV analógica estadounidense, la cual es de 483 líneas, como se obtiene de la ecuación

TABLA 8–14 SISTEMA DE DTV ESTADOUNIDENSES

Especificaciones de video

Tipo de formato	HD	HD	SD	SD	SD
Relación de aspecto	16:9	16:9	4:3	16:9	4:3
Líneas de barrido activas/cuadro	1080	720	480	480	480
pixeles/línea	1920	1280	704	704	640
Velocidades de cuadro (Hz)[a]	24p, 30p, 30i	24p, 30p, 60p	24p, 30p, 30i, 60p	24p, 30p, 30i, 60p	24p, 30p, 30i, 60p

Estándar de compresión[b]	MPEG-2
Técnica de compresión[c]	DCT, bloque de 8×8

Especificaciones de audio

Método	Dolby AC-3
Ancho de banda de audio	20 kHz
Frecuencia de muestreo	48 kHz
Rango dinámico	100 dB
Número de canales *surround*[d]	5.1
Velocidad de datos comprimidos	384 kb/s
Múltiples lenguajes	Vía múltiples flujos de datos AC-3

Sistema de transporte de datos

Tipo	Paquete
Técnica de TDM	MPEG-2, nivel del sistema
Tamaño de paquete	188 bytes
Tamaño de encabezado de paquete	4 bytes
Codificación	Descodificación por provisión mediante decodificadores autorizados
Soporte de características especiales	Subtítulos y datos privados

Especificaciones de transmisión para el modo terrestre de difusión[e]

Modulación[f]	8VSB
Bits/símbolo	3
Ancho de banda de canal	6 MHz
Filtro de canal	Coseno realzado,, $r = 0.115/2 = 0.0575$
Velocidad de símbolo (baud, con sincronización)	10.76 Msímbolos/s
Velocidad de datos de subida útil (con sincronización)	19.39 Mb/s
Codificación (FEC)	Razón de 2/3 TCM y (207,187) Reed-Solomon
Umbral de CNR	14.9 dB para una BER de 3×10^{-6}
Piloto (para sincronización de portadora)	310 kHz sobre el borde de banda inferior del canal de RF

[a] p = barrido progresivo, i = barrido de entrelazado

[b] MPEG = Moving Picture Experts Group, de la Organización Internacional de Estándares (ISO, por sus siglas en inglés).

[c] DCT = Transformada de coseno discreto bidimensional (horizontal y vertical) tomada sobre un bloque de 8×8 pixeles. Los valores insignificantes de DCT se ignoran para suministrar compresión de datos.

[d] Izquierda, centro, derecha, *surround* izquierda, *surround* derecha y altavoz de graves. El sexto canal (altavoz de graves) contiene sólo frecuencias bajas de audio, así que se considera como un canal 0.1.

[e] El modo terrestre es para la difusión fuera del aire. Para la transmisión vía CATV se puede utilizar 16 VSB. Esto permite una velocidad de datos de subida útil más alta igual a 38.6 Mbits/segundo a través de un canal con ancho de banda de 6 MHz. Sin embargo, se requiere de un mínimo (CNR) de 28.3 dB.

[f] 8VSB = modulación por banda lateral vestigial de 8 niveles. Es decir, un código de línea en banda base de 8 niveles se modula por amplitud en la señal de portadora suprimida (DSB-SC), y la banda lateral inferior se filtra para producir la señal VSB.

(8-59b). La resolución horizontal para la SDTV de 4:3, 704 o 640 pixeles, es mayor que para la de 435 pixeles, como resulta de la ecuación (8-60b) para la TV analógica.

La velocidad de bit para los datos de video sin compresión es muy grande. Por ejemplo, considerando la tabla 8-14, para 1,080 líneas activas, 1,920 muestras (pixeles) por línea, 8 bits por muestra, 30 cuadros (imágenes) por segundo y 3 colores primarios (RGB, siglas en inglés para rojo, verde y azul), la velocidad de bit es de $1{,}080 \times 1{,}920 \times 8 \times 30 \times 3 = 1{,}500$ Mb/s. Sin embargo, un canal de TV con un ancho de banda de 6 MHz sólo puede soportar una velocidad de datos de alrededor de 20 Mb/s si se emplea una señalización multinivel de 8 niveles (3 bits/símbolo). (De la figura 5-33 se tiene que $B_T \approx D = R/\ell = 20/3 = 6.67$ MHz.) En consecuencia, se requiere de un factor de compresión de datos de alrededor de 75 (1,500/20). Como se muestra en la tabla 8-14, este factor de compresión se logra con la técnica de codificación de *Motion Pictures Experts Group* (MPEG). Esta técnica consiste en tomar la *transformada de coseno discreta* (DCT, por sus siglas en inglés) de 8×8 bloques de pixeles dentro de cada cuadro y digitalizando (ocupando) sólo los coeficientes de DFT significativos de cada bloque para su transmisión. Aún más, para cada nuevo cuadro, sólo se envían datos cuando existe un cambio (movimiento) dentro del bloque de 8×8 pixeles de cuadro a cuadro.

La redundancia de cuadro a cuadro se remueve mediante una estimación y compensación de movimiento. Existen tres tipos de cuadros codificados. El *intercuadro* (cuadro *I*) se codifica en aislamiento sin predicción y se usa como un cuadro de referencia. El *cuadro predictivo* (cuadro *P*) se predice a futuro a partir del último cuadro *I*. El *cuadro bidireccional* (cuadro *B*) se predice para los cuadros *I* y *P* ya sean pasados o futuros. Una secuencia de un cuadro *I* y uno o más cuadros *P* y *B* forman un *grupo de imágenes* (GOP, por sus siglas en inglés) de MPEG [Gibson, 1997].

Como se indica en la tabla 8-14, esto produce una velocidad de datos de subida útil (comprimidos) de 19.39 Mb/s. Estos datos de subida útil además de los bits de paridad para los códigos FEC se alimentan a un convertidor digital a analógico (DAC) de 3 bits para producir un código de línea en banda base de 8 niveles que tiene una velocidad de símbolo (baud) de $D = 10.76$ Msímbolos/segundo. Como se muestra en la figura 8-38, los datos de 8 niveles se dividen en segmentos que consisten en 832 símbolos con un pulso de sincronización de 4 símbolos incluido al inicio de cada

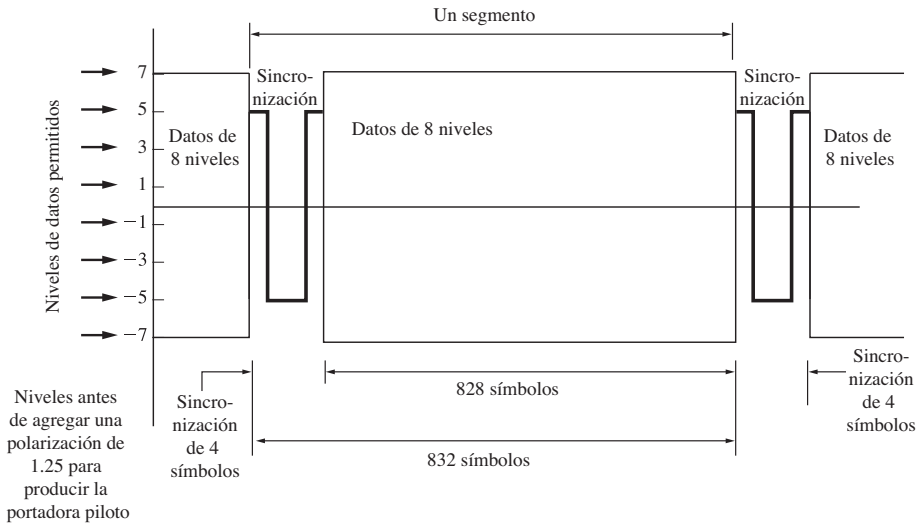


Figura 8–38 Señal en banda base de 8 niveles con sincronización de segmento.

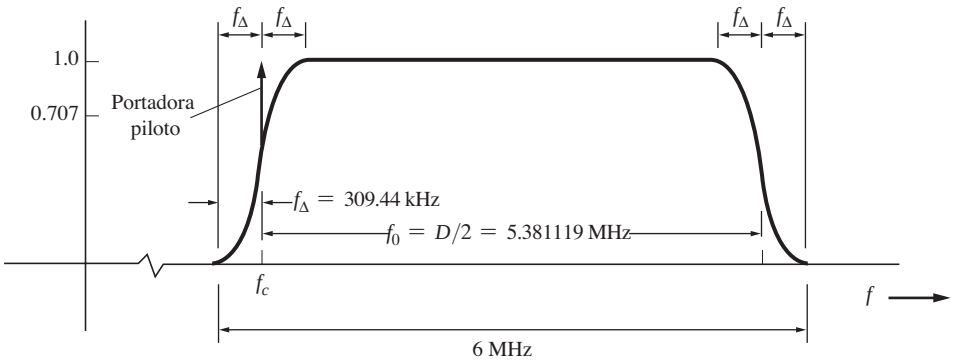


Figura 8–39 Espectro de una señal DTV con 8-VSB con coseno elevado de raíz cuadrada.

segmento para proporcionar una referencia para los datos transmitidos. Se insertan datos de entrenamiento adicionales sobre un segmento completo después de 312 segmentos. Los datos adicionales pueden utilizarse para entrenar al receptor a que se ajuste para el desvanecimiento en el canal y cancele la interferencia de múltiples trayectorias. La señal en banda base de 8 niveles compuesta se modula por amplitud en la portadora. En el proceso de modulación se agrega un voltaje de DC de polarización a la señal en banda base de tal manera que existirá un término de portadora discreta en el espectro. Este tono piloto a la frecuencia de portadora, f_c, proporciona una sincronización para los circuitos del oscilador de portadora en el receptor de DTV. Se emplea un filtro de banda lateral vestigial (que se describió en la sección 5-5 y la figura 5-6) para remover la banda lateral inferior de la señal de AM y producir la señal de banda lateral vestigial. El filtro de VSB se diseña de tal forma que los límites de la banda decaen con una característica de coseno realzado de raíz cuadrada (en el transmisor y el receptor). Como se discutió en la sección 3-6, este factor de *rolloff* se ocupa para filtrar los lóbulos laterales del espectro de sen $(x)/x$ (figura 5-33) que ocurren para los símbolos de datos con forma rectangular y al mismo tiempo no introducir ISI en los símbolos filtrados. La figura 8-39 muestra el espectro de la señal de 8VSB resultante cuando la frecuencia de portadora, f_c, es de 309.44 kHz más arriba del límite inferior de la banda.

Los estándares de DTV estadounidenses están disponibles en su totalidad en el sitio Web del *Comité de Sistemas Avanzados de Televisión* (ATSC, por sus siglas en inglés) en www.atsc.org. En Europa se ha adoptado el estándar de *difusión digital de video* (DVB, por sus siglas en inglés) para la TV digital. DVB usa *multiplexión por división de frecuencia codificada ortogonal* (COFDM, por sus siglas en inglés) para la modulación en lugar de 8VSB. Consulte www.dvb.org para más detalles.

Debido a que el número de pixeles en un cuadro de SD ($480 \times 704 = 337{,}920$) es alrededor de $1/6$ del número de pixeles en un cuadro de HD ($1{,}080 \times 1{,}920 = 2{,}073{,}600$), el difusor de DTV tiene la opción bastante interesante de la multiplexión por división de tiempo de los datos para múltiples programas de SD, ya que esto se puede llevar a cabo sin exceder la velocidad de datos de subida útil de 19.39 Mb/s. Es decir, a través de un canal de TV de 6 MHz es factible transmitir de cuatro a seis programas de SDTV simultáneamente en lugar de un programa de HD a 1080i. Esta opción de múltiple SDTV resulta tan aprovechable que los difusores ofrecen muy pocos programas de HDTV, especialmente debido a que su producción es mucho más costosa.

La TV digital posee las siguientes ventajas:

- Utilización de circuitos de procesamiento digital de señales (DSP, por sus siglas en inglés).
- Regeneración libre de errores de imágenes de TV difundidas y reproducidas, ya que la imagen se representa mediante datos binarios.

- Múltiples canales de sonido (de cuatro a seis) de calidad de CD para brindar la capacidad de múltiples lenguajes en estéreo.
- Se puede realizar una multiplexión de los datos para gráficos en pantalla de subtítulos y para el control de reproducción de TV y de otro equipo.
- Es factible cancelar las imágenes (dobles o fantasmas) de múltiples trayectorias, así como el ruido de encendido mediante circuitos de DSP.
- Se requiere una potencia de transmisión de TV menor ya que se emplea modulación digital.
- Las señales de HDTV digitales compartidas en un canal interfieren menos una con otra que en las señales analógicas de NTSC compartiendo un canal.
- Se pueden transmitir varios programas de SDTV simultáneamente a través de cada canal.

El sistema de DTV estadounidense se implementa asignando un nuevo canal de DTV por cada estación de TV NTSC existente. Durante el periodo de transición, cada estación difundirá simultáneamente una señal NTSC a través de su canal existente y una señal DTV en su nuevo canal. Las estaciones de DTV ocuparán los canales del 2 al 51. Aún más, cuando todas las estaciones de TV NTSC (analógicas) se retiren del aire, casi todos los dueños de las estaciones de DTV desearán cambiar su canal de DTV de regreso al canal que usaban previamente para la transmisión de TV NTSC. La FCC lo está permitiendo si la estación NTSC no estaba en los canales del 52 al 69. La FCC desea liberar espacio espectral entre los canales 52 y 69 para asignarlos a nuevos servicios que no sean de TV. Los canales del 70 al 83 estaban asignados al radio bidireccional y al servicio celular en 1974.

La pregunta importante es: ¿cuándo se requerirá que todas las estaciones de TV analógica se retiren del aire (es decir, concluyan su transmisión? En 1996 el documento de Telecommunications Act especificó que las estaciones de TV NTSC se deberían retirar del aire antes del 31 de diciembre de 2006 siempre y cuando 85% de los hogares estadounidenses contaran con algún tipo de equipo para recibir estaciones de DTV. El problema es que este requisito puede no alcanzarse sino hasta mucho más tarde, si no es que nunca. A finales del 2005, el Congreso de Estados Unidos estableció una "fecha límite fija" del 17 de febrero de 2009 para que todas las estaciones NTSC se retiren del aire. En esas fechas las bandas de frecuencia para los canales del 52 al 69 se reasignarán para la utilización muy necesitada de los nuevos servicios celulares de 3G y servicios de radio móvil.

8-10 MÓDEMS PARA DATOS POR CABLE

Los antiguos sistemas de CATV emplean un sistema de distribución puramente coaxial y operan hasta casi 450 MHz. Los sistemas modernos de CATV que suministran una conexión a Internet de alta velocidad (vía un módem para cable) ocupan fibra para distribuir las señales de TV y de datos desde la distribuidora de CATV a la vecindad del cliente. En cada vecindad las señales se convierten de luz a RF y se transmiten al hogar a través de cable coaxial. Esto permite que la red de cable coaxial del vecindario opere hasta 800 MHz debido a que las líneas coaxiales de distribución son relativamente cortas y se requieren de muy pocos amplificadores de RF.

Para suministrar el servicio de datos a la vecindad a través de la red coaxial, se asignan uno o más canales de TV en el rango de 50 a 750 MHz para el tráfico de datos de bajada, y la trayectoria de subida se suministra mediante uno o más canales en el rango de 5 a 42 MHz. El usuario conecta el cable de CATV que llega a su hogar al módem por cable, el cual demodula los datos de entrada y modula los de subida. Los datos del módem se conectan generalmente a una computadora local o a una red de datos local en el hogar a través de una línea Ethernet o, con menor probabilidad, una conexión por USB. La velocidad de datos del de enlace de entrada del módem es generalmente de alrededor de 3 Mb/s, y la del enlace de subida es de cerca de 500 kb/s.

TABLA 8–15 ESTÁNDARES PARA MÓDEMS PARA CABLE

Elemento	Bajada	Subida
Rango de frecuencia de portadora	50 a 750 MHz	5 a 42 MHz
Ancho de banda de canal	6 MHz	6 MHz o 2 MHz[a]
Modulación	64 QAM o 256 QAM	QPSK o 16 QAM
Tasa de datos compuestos	27 Mb/s o 36 Mb/s	10 Mb/s a 30 Mb/s
Tasa de datos de suscriptor	1.5 a 6 Mb/s	256 kb/s a 1.5 Mb/s
Codificación	Reed-Solomon	Reed –Solomon
Encriptación	DES	DES

[a] Si el ancho de banda del enlace de subida es de 2 MHz, la velocidad de datos compuestos será 1/3 de la que se presenta en la tabla.

DES = estándar de encriptación de datos (de sus siglas en inglés)

En la tabla 8-15 se observa que un solo canal de enlace de entrada de 6 MHz de ancho puede soportar una velocidad de datos de entrada compuestos de 27 Mb/s (lo cual se comparte entre los suscriptores en la vecindad) si se usa 64 QAM. Se puede soportar hasta 36 Mb/s con 256 QAM. Típicamente, un canal de subida soporta una velocidad de datos compuestos de 10 Mb/s empleando modulación QPSK, o 30 Mb/s si se ocupa 16 QAM. El canal de subida puede dividirse en tres canales de 2 MHz de ancho, cada uno con una velocidad de datos de 3 Mb/s para QPSK o 10 Mb/s para 16 QAM. Un canal de 2 MHz de ancho reduce la posibilidad de ruido de entrada enviado como subida por cada usuario, ya que existen menos usuarios en un canal de 2 MHz que en uno de seis.

Un canal de enlace de bajada y un enlace de subida coaxial de 6 MHz de ancho puede soportar hasta 200 suscriptores, ya que se maneja la multiplexión estadística. Con ésta, cada suscriptor utiliza su velocidad de datos asignada (por ejemplo, 3 Mb/s para el enlace de subida) sólo cuando se requiere□de otra forma, se empleará por otro suscriptor. Con múltiples canales de 6 MHz se pueden soportar de 500 a 2,000 suscriptores en una vecindad. Si se requiere mayor capacidad por más suscriptores, la "célula" de la vecindad original puede dividirse en múltiples células de vecindades más pequeñas.

A partir de la discusión anterior se aprecia que los módems para cable son mucho más complicados que los de DSL. Los primeros cuentan con circuitos de entrada (que operan en el rango de VHF y UHF), convertidores reductores y secciones de IF, así como moduladores y demoduladores.

8-11 REDES INALÁMBRICAS DE DATOS

Wi-Fi

La red de tipo Wi-Fi o IEEE 802.11 es una *WLAN* (*red de área local inalámbrica*, de sus siglas en inglés). Esta familia de WLAN se ha vuelto muy popular en Estados Unidos y mundialmente desde el 2000. En la actualidad existe cobertura de Wi-Fi, conocida como *puntos de conexión*, en la mayoría de los campos universitarios y bibliotecas públicas, así como en muchos hoteles, moteles, cibercafés y cafeterías. Wi-Fi proporciona una conexión de alta velocidad a Internet (alrededor de 1.5 Mb/s). Las redes Wi-Fi también son populares en los hogares donde dos o más computadoras se conectan a la red y a Internet. La FCC permite que estas redes inalámbricas operen sin licencia en bandas de frecuencia designadas. Cualquiera puede llevar una de estas redes "al aire" sin permiso de la FCC.

La tabla 8-16 ofrece el estándar IEEE 802.11b para la frecuencia central para cada asignación de canal. Existen 11 canales y sus frecuencias centrales están separadas por 5 MHz. El ancho de banda

TABLA 8–16 ASIGNACIONES DE CANAL WI-FI DE 2.5 GHZ

Número de canal	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Frecuencia central (MHz)	2412	2417	2422	2427	2432	2437	2442	2447	2452	2457	2462

TABLA 8–17 ESTÁNDARES PARA WI-FI

Elemento	**802.11a**	**802.11b**	**802.11g**	**802.11n**
Banda	5.0 Ghz	2.4 Ghz	2.4 Ghz	2.4 GHz
Máxima velocidad de datos	54 Mb/s	11 Mb/s	54 Mb/s	120 MB/s
Modulación	OFDM	DSSS	OFDM	DSSS y OFDM
Ancho de banda (típico)	20 MHz	20 MHz	20 MHz	20 MHz
Diversidad	Ninguna	Ninguna	Ninguna	MIMO
Rango (máximo)	500 pies	500 pies	500 pies	1,500 pies
Compatible con		802.11a	802.11b	802.11b, 802.11g

DSSS = espectro ensanchado de secuencia directa

MIMO = múltiples entradas, múltiples salidas

de cada canal es de aproximadamente 20 MHz□así que, desafortunadamente, el espectro de un canal tiene un traslape de 15 MHz con el espectro de las señales WLAN en canales adyacentes. De hecho el estándar IEEE 802.11 especifica una máscara espectral ubicada alrededor de la frecuencia central para cada canal de tal manera que el espectro debe atenuarse por lo menos 30 dB a ±11 MHz de la frecuencia central asignada y decaer por lo menos 50 dB a ±22 MHz. En consecuencia, si múltiples WLAN operan en la misma vecindad, los canales en operación deberán seleccionarse de tal forma que estén lo más separados posible. Además de esta posible interferencia de canales adyacentes, puede existir interferencia de otros dispositivos como teléfonos inalámbricos, monitores de bebés y hornos de microondas que operan en esta región de frecuencias.

En Estados Unidos la máxima potencia transmitida es de 1 W con una ERP máxima de 4 W. De hecho, la mayor parte del equipo de Wi-Fi en ese país posee niveles de potencia transmitida de entre 15 y 200 mW, así que se permiten antenas con cierta ganancia.

La tabla 8-17 presenta algunos de los estándares para la familia 802.11 de WLAN□802.11a opera en la banda de 5 GHz y, por lo tanto, no se ve afectado por la interferencia de teléfonos inalámbricos, etcétera. Sin embargo, su rango a menudo es limitado, ya que existe más atenuación a 5 GHz que a 2.4 GHz debido a las paredes de edificios, y su pérdida de espacio libre es de 6 dB más a 5 GHz que a 2.4 GHz [vea la ecuación (8-11)]. El estándar 802.11g se está volviendo muy popular porque tiene una velocidad máxima de datos de 54 Gb/s y, en el modo de respaldo, operará como un sistema 802.11b. Se utiliza la modulación por OFDM en muchos de estos sistemas Wi-Fi, ya que la OFDM es resistente al desvanecimiento por causa de múltiples trayectorias.

El estándar más reciente, 802.11n, aún no ha sido aprobado (hasta la fecha de esta publicación) pero se espera que se apruebe próximamente. Este estándar emplea tecnología *MIMO* (múltiples entradas, múltiples salidas, por sus siglas en inglés) lo cual significa que se ocupan múltiples antenas/transmisores/receptores para proporcionar diversidad en espacio para así suministrar una

velocidad de datos y un rango mejorados. Aunque este estándar no se ha adoptado, los fabricantes han puesto a la venta sistemas "pre-n" que usan los estándares propietarios del mismo fabricante. Este equipo pre-n garantiza ser compatible sólo con el equipo acoplado del mismo fabricante, y puede o no serlo con el estándar 802.11 final cuando éste sea adoptado.

Wi-Max

El concepto de Wi-Max es completamente diferente del de Wi-Fi, pues es más como un sistema de telefonía celular, a excepción de que se diseñó estrictamente para la transmisión de datos y se conecta a Internet. Wi-Max es una *WMAN* (*red de área metropolitana inalámbrica*, de sus siglas en inglés), y el grupo de trabajo IEEE 802.16 ha desarrollado y aprobado sus estándares.

Las antenas de las estaciones base de Wi-Max se colocan en ubicaciones elevadas, como en el techo de edificios o torres, y pueden compartir espacio en las torres de telefonía celular.

El proveedor de servicio del sistema Wi-Max puede operar de dos maneras: servicio con licencia o sin ella. Para el primero, el operador debe adquirir espacio espectral y una licencia para el servicio de Wi-Max de la FCC. Para el segundo, el operador puede instalar y operar el sistema sin licencia□sin embargo, cualquiera de esos sistemas está sujeto a interferencia de señal de otros sistemas sin licencia, actuales o futuros. Cualquiera de estos sistemas requiere de instalación profesional. Es decir, se seleccionan las antenas de la estación base (ganancia y patrón de antena) y se montan en la orientación apropiada de tal forma que se obtiene el área de cobertura deseada y para que la señal de la antena produzca una mínima interferencia a otras células.

La tabla 8-18 muestra los estándares de Wi-Max tanto para el servicio con licencia como para el servicio sin ella. Este último tiene las ventajas de una instalación del servicio más rápida y costos más bajos. El servicio con licencia opera a menores frecuencias (2.5 GHz), donde las señales tienen menor atenuación a causa de edificios y mejores características de *NLOS* (sin línea de vista, de sus siglas en inglés).

Los sistemas Wi-Max están comenzando a ponerse en servicio en Estados Unidos y los estándares 802.16 se encuentran en un estado en flujo. Parece que el Wi-Max se volverá muy popular.

TABLA 8–18 ESTÁNDARES PARA WI-MAX

Elemento	Servicio con licencia	Servicio sin licencia
Banda	2.5 Ghz	5.5 GHz
Frecuencias	2.5 a 2.69 MHz	5.25 a 5.58 GHz
Ancho de banda de canal	20 a 40 MHz	20 a 40 MHz
Adquisición de espacio espectral	Sí	No
Potencia de salida	Hasta de 20 W	4 W EIRP
Rango	30 millas	10 millas
Modulación	OFDM	OFDM
Canales vía dual	FDD	TDD
Tasa de datos (máxima)	108 Mb/s	108 Mb/s
Ventajas	Menor interferencia, mejor recepción de NLOS	Instalación de servicio más rápida, costo más bajo

FDD = duplexión por división de frecuencia (es decir, se requieren dos canales de frecuencia, uno para el enlace de subida y uno para el enlace de bajada)

TDD = duplexión por división de tiempo (es decir, se necesita de un canal de frecuencia, pero también dos ranuras de tiempo, una para el enlace de subida y otra para el enlace de bajada)

NLOS = sin línea de vista

Muchos de estos sistemas puede ser propiedad de las portadoras principales de manera similar a la propiedad de los sistemas de telefonía celular, ya que el VoIP (voz a través del protocolo de Internet, de sus siglas en inglés) permite llamadas tipo telefónicas a través de la conexión a Internet. Los sistemas Wi-Fi pueden eventualmente sobrepasar a los sistemas celulares (2G, 3G y 4G) en cuanto a su popularidad. Es también factible que los sistemas de telefonía celular se incorporen a los sistemas de tipo Wi-Fi empleando OFDM, ya que ésta tiene mejores características de desvanecimiento a causa de múltiples trayectorias.

8–12 RESUMEN

En este capítulo se estudió un amplio rango de sistemas alámbricos e inalámbricos. Se describieron sistemas telefónicos modernos con oficinas centrales digitales y terminales remotas. Se presentaron estándares para la transmisión de datos vía DSL, así como estándares ocupados para POTS. Se mencionaron especificaciones para la transmisión vía cable de fibra óptica y vía satélite. Se discutieron los servicios de radiodifusión vía satélite. Se definieron la figura de ruido y la temperatura efectiva de ruido de entrada para los receptores inalámbricos. Se presentaron casos de estudio de balances de enlace. Se examinaron los estándares AMPS, GSK TDMA, iDEN y CDMA. Se describieron las bandas celulares de 900 MHz y PCS de 1,900 MHz. Se estudiaron los sistemas analógicos y digitales de TV. Se presentaron estándares para la TV NTSC analógica, para SDTV digital y HDTV digital. Se discutieron los módems para cable. Se presentaron estándares para las redes inalámbricas de datos de Wi-Fi y Wi-Max, y se discutió su operación.

8–13 EJEMPLOS DE ESTUDIO

SA8–1 Balance de enlace para un receptor DSS Calcule el balance de enlace para un sistema de TV digital vía satélite que es parecido al sistema GM Hughes DSS que se describió en la sección 8-5. El satélite DSS se ubica en una órbita geoestacionaria a una longitud de 101° al Oeste por encima del ecuador. Suponga que el sitio receptor del enlace de bajada es Gainesville, FL, ubicada a una longitud de 82.43° al Oeste y latitud de 29.71° al Norte. El satélite DSS transmite señales de enlace de bajada en la banda Ku (12.2-12.7 GHz) usando 16 transpondedores. Cada uno de ellos tiene un ancho de banda de 24 MHz y una EIRP de 52 dBw en la dirección de Estados Unidos y, en particular, a Gainesville, FL. Cada transpondedor radia una señal QPSK con una velocidad de datos de 40 Mb/s. El sistema receptor consiste en: (1) una antena parabólica de 18 pulgadas de diámetro a la cual se conecta un (2) convertidor reductor de bloque de bajo ruido (LNB) que convierte la entrada en la banda Ku hacia la banda de 950 a 1,450 MHz, (3) una línea de transmisión que conecta al LNB a (4) un receptor que se ubica encima del aparato televisor del suscriptor [Thomson, 1994]. El LNB tiene una ganancia de 40 dB y una figura de ruido (NF) de 0.6 dB. La línea de transmisión coaxial RG6/U es de 110 pies de longitud y tiene una pérdida de 8 dB/100 pies en la banda de 950-1,450 MHz. El receptor detecta los paquetes de datos, los decodifica y convierte a señales de video analógico y de audio utilizando los convertidores digital a analógico incorporados. El receptor tiene una NF de 10 dB y un ancho de banda de IF de 24 MHz. Suponga que la temperatura fuente de la antena es 20 K.

Calcule la $(C/N)_{\text{dB}}$, $(E_b/N_0)_{\text{dB}}$ y la BER para este sistema receptor.

Solución. Los parámetros de direccionamiento de la antena receptora (azimut y elevación) desde Gainesville, FL, al satélite se evalúan con las ecuaciones (8-47) a (8-54).

$$\beta = \cos^{-1}\left[\cos(29.71)\cos(101 - 82.43)\right] = 34.58°$$

El azimut es

$$A = 360 - \cos^{-1}\left(-\frac{\tan(29.71)}{\tan(34.58)}\right) = 214.13°$$

La elevación es

$$E = \tan^{-1}\left[\frac{1}{\tan(34.58)} - \frac{3963}{(26{,}205)\,\text{sen}(34.58)}\right] = 49.82°$$

Empleando la ecuación (8-49) se encuentra que la distancia en declive es

$$d = \sqrt{(26{,}205)^2 + (3963)^2 - 2(3693)(26{,}205)\cos(34.58)}$$

Por tanto,

$$d = 23{,}052 \text{ millas}, \quad \text{o} \quad 3.709 \times 10^7 \text{ m}$$

La NF general para el sistema receptor se evalúa con la ecuación (8-34), donde $F_1 = 0.6$ dB = 1.15, $G_1 = 40$ dB = 10^4, $F_2 = 110$ ft × 8 dB/100 pies = 8.8 dB = 7.59, G_2 = -8.8 dB = 0.13 y $F_3 = 10$ dB = 10. Entonces,

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_{a1}} + \frac{F_3 - 1}{G_{a1}G_{a2}} = 1.15 + \frac{7.59 - 1}{10^4} + \frac{10 - 1}{(10^4)(0.13)}$$

o $F = 1.15 + 6.59 \times 10^{-4} + 6.83 \times 10^{-3} = 1.15 = 0.6$ dB. Por lo tanto, $T_e = (F - 1)T_0 = (1.15 - 1)\ (290) = 43.18K$.

Nota: La ganancia del LNB se diseña lo suficientemente larga para que las contribuciones a la NF de la línea de transmisión y del receptor sean despreciables.

La antena receptora se calcula ocupando la tabla 8-4 para una parábola de diámetro de 18 pulgadas = 0.46 m, donde $\lambda = c/f = 3 \times 10^8/12.45 \times 10^9 = 0.0241$ m.

$$(G_{AR})_{\text{dB}} = 10 \log\left[\frac{7\pi(0.46/2)^2}{(0.0241)^2}\right] = 32.96 \text{ dB}$$

$$(T_{\text{sistema}})_{\text{dB}} = 10 \log(T_{AR} + T_e) = 10 \log(20 + 43.18) = 18.01 \text{ dBK}$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{G_{AR}}{T_{\text{sistema}}}\right)_{\text{dB}} = 32.96 - 18.01 = 14.96 \text{ dB/K}$$

La $(\text{C}/N)_{\text{dB}}$ se evalúa con la ecuación (8-55), donde

$$(L_{FS})_{\text{dB}} = 20 \log\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right) = 20 \log\left(\frac{4\pi(3.709 \times 10^7)}{(0.0241)}\right) = 205.73 \text{ dB}$$

y

$$(B)_{\text{dB}} = 10 \log(B) = 10 \log(24 \times 10^6) = 73.8 \text{ dB}$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{\text{dB}} = (P_{\text{EIRP}})_{\text{dBw}} - (L_{FS})_{\text{dB}} + \left(\frac{G_{AR}}{T_{\text{sistema}}}\right)_{\text{dB}} - k_{\text{dB}} - B_{\text{dB}}$$

$$= 52 - 205.73 + 14.96 - (-228.6) - 73.8$$

o

$$(C/N)_{\text{dB}} = 16.03 \text{ dB}$$

$(E_b/N_0)_{\text{dB}}$ puede evaluarse con la ecuación (8-44), donde $B = 24$ MHz y $R = 40$ Mb/s. Entonces,

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\text{dB}} = \left(\frac{C}{N}\right)_{\text{dB}} + \left(\frac{B}{R}\right)_{\text{dB}} = 16.03 - 2.22 = 13.81 \text{ dB}$$

Una $(E_b/N_0)_{\text{dB}}$ de 13.81 dB = 24.05 resulta en errores despreciables para la señalización por QPSK. Esto es, si no se usa codificación, la BER de QPSK se obtiene de la ecuación (7-69) como

$$P_e = Q\left(\sqrt{2\left(\frac{E_b}{N_0}\right)}\right) = Q\left(\sqrt{2(24.05)}\right) = 2.0 \times 10^{-12}$$

o un error cada 3.4 horas. Sin embargo, si existe desvanecimiento en la señal (debido a lluvia o a otras condiciones atmosféricas), ocurrirán errores significativos. Esto se examina en el ejemplo SA8-2.

SA8–2 Balance de enlace de DSS con desvanecimiento Repita el ejemplo SA8-1 y suponga que existe un desvanecimiento de señal de 4 dB de la señal de banda Ku a causa de lluvia. Calcule $(C/N)_{\text{dB}}$, (E_b/N_0) y la BER con y sin decodificación. Para el caso de codificación, asuma una ganancia de código de 3 dB.

Solución

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{\text{desvanecimiento en dB}} = \left(\frac{C}{N}\right)_{\text{dB}} - (L_{\text{desvanecimiento}})_{\text{dB}} = 16.03 - 4.0 = 12.03 \text{ dB}$$

y

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\text{desvanecimiento en dB}} = 9.81 \text{ dB} = 9.57$$

Entonces, la BER con desvanecimiento y sin codificación es

$$P_e = Q\left(\sqrt{2(9.57)}\right) = 6.04 \times 10^{-6}$$

o un error en 4.1 ms. Este rendimiento no es aceptable. En consecuencia, se requiere de codificación FEC. Utilizando ésta con una ganancia de código de 3 dB, calcule la (E_b/N_0) efectiva remitiéndose a la figura 1-8:

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\text{dB}} = 9.81 + 3.0 = 12.81 \text{ dB} = 19.10$$

Entonces, empleando la ecuación (7-69) se observa que la BER con desvanecimiento y con código se convierte en

$$P_e = Q\left(\sqrt{2(19.10}\right) = 3.2 \times 10^{-10}$$

o un error cada 78 s.

SA8–3 BER para un enlace a un dispositivo inalámbrico Evalúe la BER de una LAN inalámbrica (WLAN). Suponga que una computadora portátil/teléfono/terminal de video se conecta al mundo exterior vía un enlace inalámbrico dentro de un edificio. El enlace inalámbrico ocupa señalización por OOK en una frecuencia de portadora de 2.4 GHz y la tasa de datos es de 2 Mb/s. La potencia de transmisión del dispositivo en el enlace de subida es de 0.5 mW. El receptor en la estación base tiene una figura de ruido de 8 dB y un ancho de banda de IF de 4 MHz. Éste incorpora un detector de envolvente para detectar los datos. El ruido externo a la entrada del receptor es despreciable comparado con su ruido interno. Suponga que las antenas transmisora y receptora son dipolos simples. Cada una tiene una ganancia de 2.15 dB. La pérdida en trayectoria entre la antena transmisora y la receptora dentro del ambiente del edificio se modela mediante la ecuación (8-47) como

$$L_{\text{dB}}(d) = L_{\text{FSdB}}(d_0) + 10n \log\left(\frac{d}{d_0}\right) + X_{\text{dB}} \tag{8–67}$$

donde $L_{\text{dB}}(d)$ es la pérdida en trayectoria en dB para una distancia d entre las antenas, $L_{\text{FSdB}}(d_0)$ la pérdida en espacio libre para una distancia d_0 que está cercana al transmisor, pero en el campo lejano, y $d > d_0$. n es el exponente de la pérdida en trayectoria y X_{dB} representa el margen de pérdida debido a las variaciones en la pérdida en trayectoria a causa de múltiples reflexiones. Para este ejemplo, seleccione una $d_0 = 50$ pies, $n = 3$ y $X_{\text{dB}} = 7$ dB. (El exponente, n, sería 2 para el caso de espacio libre y 4 para una reflexión terrestre de 2 haces.)

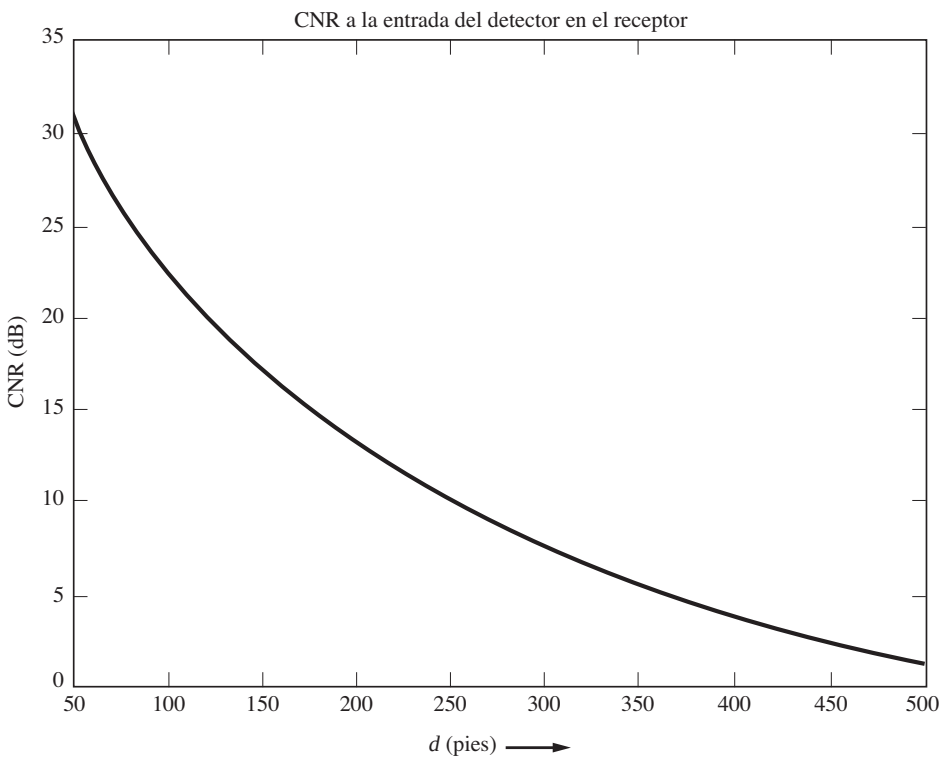


Figura 8–40 CNR para un enlace inalámbrico PCD.

Para una distancia de 200 pies entre el dispositivo y la estación base, calcule la CNR a la entrada del detector del receptor de la estación base y la BER para los datos detectados a la salida del receptor.

Solución. La CNR se obtiene mediante la ecuación (8-67) para reemplazar $(L_{FS})_{dB}$ en la ecuación (8-43). Con los valores proporcionados, se tiene que $(P_{EIRP})_{dBw} = -30.86$ dBw. $T_{sistema} = 1{,}540$ K y $L_{dB}(200) = 88.18$ dB. A partir de la ecuación (8-43) y con el dispositivo ubicado a 200 pies de la estación base, la CNR es

$$\left(\frac{C}{N}\right)_{dB} = 13.22 \text{ dB}, \qquad \text{separación de 200 pies}$$

Además, de la ecuación (8-44) se tiene que $(E_b/N_0)_{dB} = 16.23$ dB. Para este caso de OOK con detección (incoherente) de envolvente, la BER se obtiene con la ecuación (7-58). La velocidad de bit es $R = 1/T = 2$ Mb/s y el ancho de banda de IF es $B_p = 4$ MHz. Para una separación de 200 pies entre el dispositivo y la estación base, la BER del flujo de datos de salida de la estación base es

$$P_e = 1.36 \times 10^{-5}, \qquad \text{separación de 200 pies}$$

Con otros valores para d en estas ecuaciones, MATLAB puede calcular la CNR y la BER sobre un rango completo con separación desde 50 hasta 500 pies. Los gráficos con MATLAB se muestran en las figuras 8-40 y 8-41.

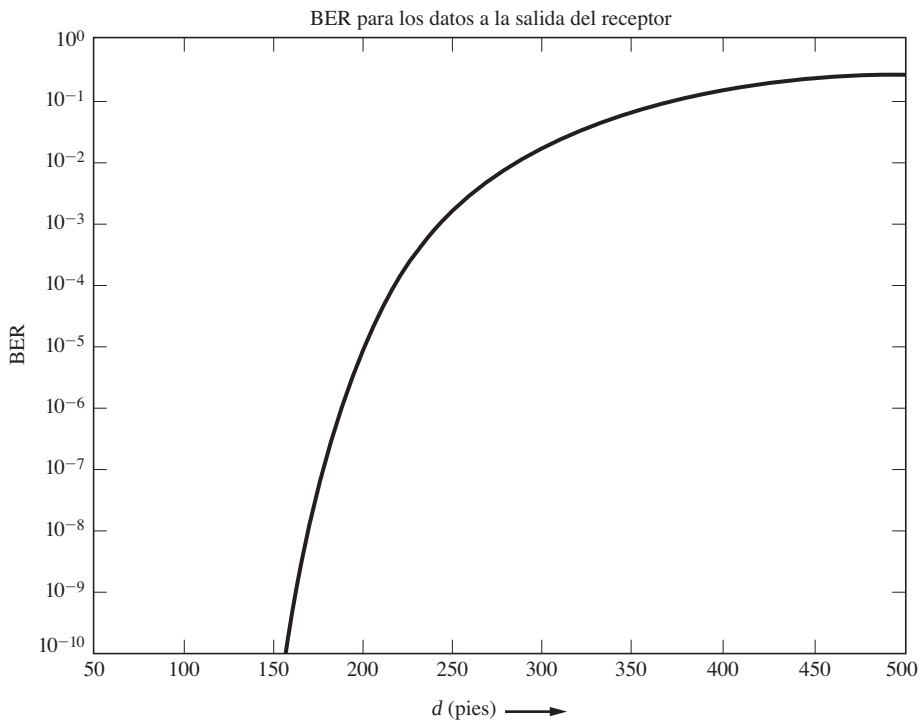


Figura 8–41 BER para un enlace inalámbrico PCD.

El rango de este enlace inalámbrico puede incrementarse si se aumenta la potencia de transmisión, si se reduce la figura de ruido del receptor o si se implementa un sistema de espectro ensanchado (SS). Si se usa un SS de secuencia directa con un registro de desplazamiento de 4 etapas, como se muestra en la figura 5-37, la longitud del código PN es de $N = 15$. Suponiendo que la longitud del código abarca un bit de datos, la velocidad de chip es $R_c = NR$. De la ecuación (5-131) se tiene que este sistema de SS proveería una ganancia de procesamiento de $G_p = R_c/R = N = 15$, o $G_{p\text{dB}} = 11.76$ dB. Si se implementa el desensanchado en el receptor después de la etapa de IF (es decir, después de la fuente de ruido interna del receptor), esta ganancia de procesamiento aumentaría la CNR a la entrada del detector por un factor de 11.76 dB. Esto resultaría en un incremento en el rango útil de alrededor de 500 pies. Es decir, considerando la figura 8-40 con $d = 500$ pies, se sabe que una ganancia de 11.76 dB resultaría en una CNR de 13.0 dB, lo cual corresponde a una BER de 2.1×10^{-5}.

PROBLEMAS

★ **8–1** Una terminal remota para una compañía telefónica suministra servicio a 300 suscriptores de VF y a 150 suscriptoresde DSL G.Lite (1.5 Mb/s de datos más una señal de VF que se convierte a una señal DS-0). Calcule la mínima velocidad de datos requerida para la línea de fibra óptica receptora que termina en la RT desde la CO.

8–2 Una línea de 50 pares provee servicio telefónico a 50 suscriptores en una subdivisión rural vía lazos locales a la CO. ¿A cuántos suscriptores se les puede proporcionar servicio si los 50 pares se convierten a líneas T1 y se instala una terminal remota en la subdivisión?

8–3 Suponga que una compañía telefónica tiene terminales remotas conectada a su CO vía líneas T1. Dibuje un diagrama de bloques que ilustre cómo las líneas T1 se conectan al conmutador de la CO si esta última utiliza:
(a) Un conmutador analógico.
(b) Un conmutador digital integrado.

8–4 Indique si una conexión a una llamada en conferencia es mejor o peor que una a un solo usuario si se emplea un conmutador digital (en la CO) en lugar de uno analógico. Explique su respuesta.

★ **8–5** Se envían datos *full duplex* de 24 kb/s en cada dirección desde una computadora personal vía una línea telefónica de par trenzado que tiene una banda de paso de 300-2,700 Hz. Explique por qué se requieren módems en ambas puntas de la línea.

8–6 Un satélite con 12 transpondedores con ancho de banda de 36 MHz opera en las bandas de 6/4 GHz con un ancho de banda de 500 MHz y una banda de guarda de 4 MHz en el enlace de bajada de 4 GHz, como se muestra en la figura 8-10. Calcule el porcentaje del ancho de banda que se ocupa para las bandas de guarda.

8–7 Una estación terrestre usa una antena parabólica de 3 m de diámetro para recibir una señal de 4 GHz de un satélite geosíncrono. Si el transmisor del satélite suministra 10 W a una antena transmisora de 3 m de diámetro y el satélite se ubica a 36,000 km del receptor, ¿cuál es la potencia recibida?

8–8 La figura 8-12b muestra una estación terrestre de FDM/FM para un sistema de comunicaciones vía satélite. Encuentre la desviación pico de frecuencia necesaria para alcanzar el ancho de banda espectral asignado para la señal de 6,240 MHz.

★ **8–9** Un transmisor por microondas cuenta con una salida de 0.1 W a 2 GHz. Suponga que este transmisor se utiliza en un sistema de comunicaciones por microondas donde las antenas transmisora y receptora son parabólicas, cada una de 4 pies de diámetro.
(a) Evalúe la ganancia de las antenas.
(b) Calcule la EIRP de la señal transmitida.
(c) Si la antena receptora está ubicada a 15 millas de la transmisora sobre una trayectoria de espacio libre, encuentre la señal de potencia de salida de la antena receptora en unidades de dBm.

★ **8–10** Empleando MATLAB o MathCAD, grafique la PSD para una fuente de ruido térmico con una resistencia de 10 kΩ sobre un rango de frecuencia de 10 a 100,000 GHz donde $T = 300$ K.

8–11 Dado el circuito *RC* que se muestra en la figura P8-11, donde *R* es una resistencia física a una temperatura *T*, encuentre el RMS del voltaje de ruido que aparece a la salida en términos de *k*, *T*, *R* y *C*.

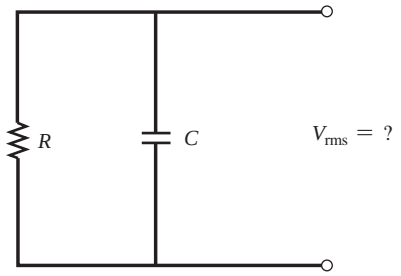


Figura P8–11

8–12 Un receptor se conecta a un sistema de antena que tiene una temperatura de ruido de 100 K. Encuentre la potencia del ruido que está disponible en la fuente sobre una banda de 20 MHz.

★ **8–13** Un amplificador de transistor bipolar se modela como se muestra en la figura P8-13. Encuentre una fórmula para la ganancia de potencia disponible en términos de los parámetros adecuados.

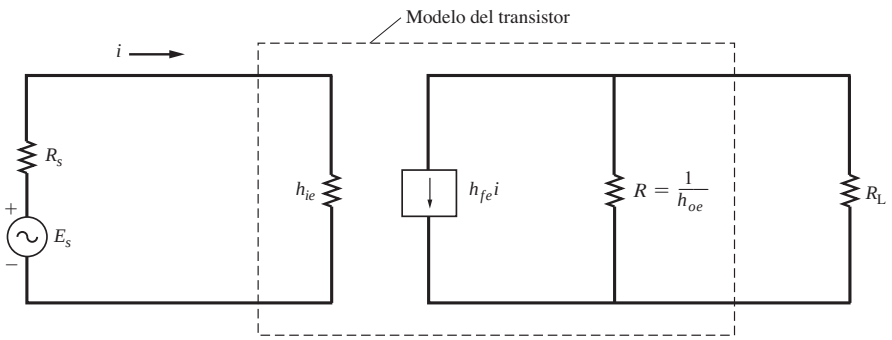


Figura P8–13

8–14 Ocupando la definición para la ganancia de potencia disponible, $G_a(f)$, como se obtiene de la ecuación (8-18), muestre que $G_a(f)$ depende de la impedancia de la fuente controladora, así como de los elementos del dispositivo, y no de la impedancia de carga. [*Sugerencia:* calcule $G_a(f)$ para una red resistiva simple.]

8–15 Muestre que la temperatura efectiva de ruido de entrada y la figura de ruido pueden evaluarse a partir de mediciones que usan el método del factor □. Con este método el dispositivo a prueba (DUT, por sus siglas en inglés) primero se conecta a una fuente de ruido que tiene una salida relativamente grande denotada por su temperatura de fuente, T_h, donde el subíndice *h* significa "caliente" (del inglés "hot"), y después la potencia del ruido disponible a la salida del DUT, P_{aoh}, se obtiene con un medidor de potencia. A continuación, el DUT se conecta a una fuente que tiene una temperatura de fuente relativamente baja, T_c, donde el subíndice *c* significa "frío" (del inglés "cold"), y se mide la potencia del ruido a la salida del DUT, P_{aoc}. Muestre que

(a) La temperatura efectiva de ruido de entrada del DUT es

$$T_e = \frac{T_h - YT_c}{Y - 1}$$

donde $Y = P_{aoh}/P_{aoc}$ se obtiene a partir de las mediciones.

(b) La figura de ruido del DUT es

$$F = \frac{[(T_h/T_0) - 1] - Y[(T_c/T_0) - 1]}{Y - 1}$$

donde $T_0 = 290$ K.

8–16 Si se alimenta una señal con ruido a un dispositivo lineal, muestre que la figura de ruido de dicho dispositivo se obtiene mediante $F = (S/N)_{\text{entrada}}/(S/N)_{\text{salida}}$ (*sugerencia:* inicie con la definición básica de la figura de ruido que se mencionó en este capítulo).

★ **8–17** Una antena se apunta en tal dirección que tiene una temperatura de ruido de 30 K. Ésta se conecta a un preamplificador con una figura de ruido de 1.6 dB y una ganancia disponible de 30 dB sobre un ancho de banda efectivo de 10 MHz.

(a) Encuentre la temperatura efectiva de ruido de entrada para el preamplificador.

(b) Halle la potencia de ruido disponible a la salida del preamplificador.

8–18 Una señal SSB-AM de 10 MHz, la cual se modula por una señal de audio que está limitada por banda a 5 kHz, se detecta por un receptor que tiene una figura de ruido de 10 dB. La potencia de la señal a la entrada del receptor es de 10^{-10} mW y la PSD del ruido de entrada, $\mathcal{P}(f) = kT/2$, es de 2×10^{-21}. Evalúe

(a) El ancho de banda de IF necesario.

(b) La SNR a la entrada del receptor.

(c) La SNR a la salida del receptor, asumiendo que se utiliza un detector de producto.

★ **8–19** Una señal FSK con $R = 110$ b/s se transmite a través de un canal de RF que tiene ruido blanco gaussiano. El receptor emplea un detector incoherente y tiene una figura de ruido de 6 dB. La impedancia de la entrada de la antena del receptor es de 50 Ω. El nivel de la señal a la entrada del receptor es de 0.05 μV y el del ruido es de $N_0 = kT_0$, donde $T_0 = 290$ K y k es la constante de Boltzmann. Encuentre la P_e para la señal digital a la salida del receptor.

8–20 Resuelva el problema 8-19 para el caso de señalización por DPSK.

8–21 Demuestre que la temperatura efectiva general de ruido de entrada para dispositivos lineales en cascada se obtiene de la ecuación (8-37).

★ **8–22** Un aparato televisor se conecta a un sistema de antena, como se muestra en la figura P8-22. Evalúe

(a) La figura de ruido general.

(b) La figura de ruido general si se inserta en el punto *B* un preamplificador de RF de 20 dB con una figura de ruido de 3 dB.

(c) La figura de ruido general si el preamplificador se inserta en el punto *A*.

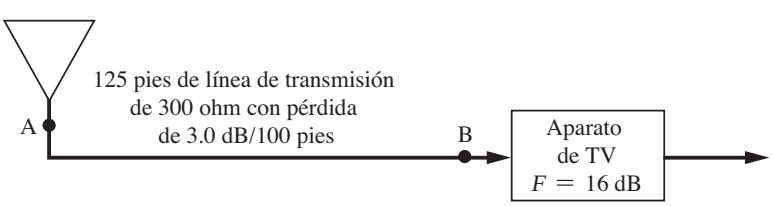


Figura P8–22

8–23 Un sistema receptor de estación terrestre consiste en una antena con ganancia de 20 dB con $T_{AR} = 80$ K, un amplificador de RF con $G_a = 40$ dB y $T_e = 30$ K, y un convertidor reductor con $T_e = 15{,}000$ K. ¿Cuál es la temperatura efectiva general de ruido de entrada de este sistema?

8–24 Un amplificador de bajo ruido (LNA), un convertidor reductor y un amplificador de RF se conectan en cascada. El LNA tiene una ganancia de 40 dB y una T_e de 25 K. El convertidor reductor tiene una figura de ruido de 8 dB y una ganancia de conversión de 6 dB. El amplificador de IF tiene una ganancia de 60 dB y una figura de ruido de 14 dB. Evalúe la temperatura efectiva general de ruido de entrada para este sistema.

8–25 Un satélite geosíncrono transmite 12.5 dBW de EIRP en un enlace de bajada de 4 GHz a una estación terrestre. El sistema receptor tiene una ganancia de 60 dB, una temperatura efectiva de ruido de entrada de 30 K, una temperatura de ruido de la fuente de la antena de 60 K y un ancho de banda de IF de 36 MHz. Si el satélite se ubica a 24,500 millas del receptor, ¿cuál es la $(C/N)_{dB}$ a la entrada del circuito detector en el receptor?

★ **8–26** Una antena con $T_{AR} = 160$ K se conecta a un receptor por medio de una guía de onda que tiene una temperatura física de 290 K y una pérdida de 2 dB. El receptor tiene un ancho de banda de ruido de 1 MHz, una temperatura efectiva de ruido de entrada de 800 K y una ganancia de 120 dB de su entrada de antena a su salida de IF. Ocupando MATLAB o MathCAD, encuentre

(a) La temperatura de ruido del sistema a la entrada del receptor.
(b) La figura de ruido general.
(c) La potencia de ruido disponible a la salida de IF.

8–27 El satélite *Intelsat IV* usa transpondedores de 36 MHz con enlaces de bajada que operan en la banda de 4 GHz. Cada transpondedor del satélite tiene una potencia de salida de 3.5 W y puede manejarse con una antena de cobertura global de 17° que tiene una ganancia de 20 dB.

(a) Para los usuarios ubicados en el punto subsatelital (es decir, directamente por debajo del satélite), muestre que $(C/N)_{dB} = (G_{AR}T_{sistema})_{dB} - 17.1$, donde $(G_{AR}/T_{sistema})_{dB}$ es la figura de mérito de la estación terrestre receptora.
(b) Diseñe una estación terrestre receptora (diagrama de bloques) donde se muestren especificaciones razonables para cada bloque de tal forma que la CNR de salida de IF sea de 12 dB. Discuta los compromisos involucrados.

★ **8–28** La eficiencia de una antena parabólica se determina mediante la exactitud de la superficie parabólica reflectora y otros factores. La ganancia es $G_A = 4\pi\eta A/\lambda^2$, donde η es la eficiencia de la antena. En la tabla 8-4 se utilizó una eficiencia de 56% para llegar a la fórmula $G_A = 7A/\lambda^2$. En un sistema terrestre receptor para el satélite *Intelsat IV*, suponga que se requiere de una $(G_{AR}T_{sistema})$ de 40 dB. Empleando una antena de 30 m, obtenga la eficiencia de la antena requerida si la temperatura de ruido del sistema es de 85 K. ¿Cómo cambia la eficiencia de la antena requerida si se ocupa una antena de 25 m?

8–29 Evalúe el rendimiento de un sistema TVRO. Suponga que la terminal TVRO se ubica en Miami, Florida (latitud 26.8° Norte, longitud 80.2° Oeste). Se usa una antena parabólica receptora de 10 pies de diámetro y se apunta hacia el satélite *Galaxy I*. En la tabla 8-5 y figuras 8-25 y 8-27 se proporcionan otros parámetros de la TVRO.

(a) Encuentre los ángulos de búsqueda de la antena TVRO al satélite y la distancia en declive.
(b) Halle la temperatura general del sistema receptor.
(c) Determine la $(C/N)_{dB}$ a la entrada del detector en el receptor.
(d) Busque la $(S/N)_{dB}$ a la salida del receptor.

8–30 Repita el problema 8-29 para cuando la terminal de TVRO se ubica en Anchorage, Alaska (latitud 61.2° Norte, longitud 149.8° Oeste) y si se utiliza una antena parabólica de 8 m de diámetro.

8–31 Un sistema receptor de TVRO consiste en una antena parabólica de 8 pies de diámetro que alimenta a un LNA de 50 dB y 25 K. La temperatura de ruido celeste (con alimentación) es de 32 K. El sistema se diseña para recibir señales del satélite *Galaxy I*. El LNA tiene un circuito de mezcla posterior que hace una

conversión reductora de la señal del satélite a 70 MHz. Esta señal se alimenta al receptor de TVRO vía un cable coaxial de 120 pies de longitud de 75 Ω. El cable tiene una pérdida de 3 dB/100 pies. El receptor tiene un ancho de banda de 36 MHz y una temperatura de ruido de 3,800 K. Suponga que el sitio de TVRO se ubica en Los Ángeles, California (latitud 34° Norte, longitud 118.3° Oeste) y es de interés una polarización vertical.

(a) Encuentre los ángulos de búsqueda de la antena TVRO al satélite y la distancia en declive.
(b) Halle la temperatura general del sistema.
(c) Determine la $(C/N)_{\text{dB}}$ a la entrada del detector en el receptor.

★ **8–32** Un sistema receptor de estación terrestre opera a 11.95 GHz y consiste en una antena de 20 m con una ganancia de 65.35 dB y $T_{\text{AR}} = 60$ K□una guía de onda con una pérdida de 1.28 dB y una temperatura física de 290 K□un LNA con $T_e = 50$ K y ganancia de 60 dB, y un convertidor reductor con $T_e = 11{,}000$ L. Utilizando MATLAB o MathCAD, encuentre $(G/T)_{\text{dB}}$ para el sistema receptor evaluado a

(a) La entrada al LNA.
(b) La entrada a la guía de onda.
(c) La entrada al convertidor reductor.

8–33 Resuelva el ejemplo 8-4 para el caso de recepción de señales de TV de un satélite de difusión directa (DBS). Suponga que los parámetros del sistema son parecidos a los que se presentan en la tabla 8-5, a excepción de que la potencia del satélite es de 316 kW de EIRP radiada en la banda de 12 GHz. Aún más, suponga que se emplea una antena parabólica receptora de 0.5 m y que el LNA tiene una temperatura de ruido de 50 K.

★ **8–34** Lo que se suponía que era un planeta (más distante de nuestro Sol) fue por mucho tiempo Plutón, el cual se ubica a una (la más grande) distancia de la Tierra de 7.5×10^9 km. Suponga que un vehículo espacial no tripulado con un transpondedor de 2 GHz y 10 W se encuentra en la vecindad de Plutón. Una estación terrestre receptora con una antena de 64 m está disponible y tiene una temperatura de ruido de sistema de 16 K a 2 GHz. Calcule el tamaño de una antena para el vehículo espacial que se requiere para un enlace de datos de QPSK a 300 b/s a la Tierra que tiene una BER de 10^{-3} (correspondiente a E_b/N_0 de 9.88 dB). Considere 2 dB para pérdidas de incidencia.

8–35 Ocupando MATLAB, MathCAD o algún programa de hoja de cálculo que ejecute en una computadora personal (PC), diseñe una hoja de cálculo que resuelva el problema 8-31. Ejecútela en su PC y verifique que obtiene los resultados correctos e imprímalos. Intente también otros parámetros, como los apropiados para su ubicación, e imprímalos también.

8–36 Suponga que desea analizar el rendimiento general de un sistema de difusión vía satélite que usa un transpondedor de guía ondas acodado. Sea $(C/N)_{\text{subida}}$ la relación portadora a ruido para el transpondedor, como se evalúa en la banda de IF del transpondedor del satélite, y $(C/N)_{\text{bajada}}$ la relación CNR de IF en la estación terrestre receptora del enlace de bajada cuando el satélite envía una señal perfecta (libre de ruido). Muestre que la relación CNR de operación general en la IF de la estación terrestre receptora, $(C/N)_{\text{general}}$, se obtiene mediante

$$\frac{1}{(C/N)_{\text{general}}} = \frac{1}{(C/N)_{\text{subida}}} + \frac{1}{(C/N)_{\text{bajada}}}$$

★ **8–37** Una estación base de emplazamiento de células de PCS opera a 10 W en una antena con ganancia de 18 dB a 1,800 MHz. La distancia de referencia de la pérdida en trayectoria es $d_0 = 0.25$ millas, $X_{\text{dB}} = 0$ y la antena del teléfono PCS tiene una ganancia de 0 dB. Encuentre la potencia recibida en dBm a la salida de la antena del teléfono PCS cuando éste se ubica a distancias de 1, 2, 5 y 10 millas de la estación base si el exponente de pérdida en trayectoria es

(a) $n = 2$ (condición de espacio libre).
(b) $n = 3$.
(c) $n = 4$.

8–38 El transmisor de un teléfono celular PCS CDMA alimenta 200 mW a su antena con ganancia de 0 dB. La señal PCS se ensancha sobre el ancho de banda de 1.25 MHz en la banda de 1,900 MHz. Calcule la potencia de la señal recibida en dBm a la salida de la antena de la estación base donde el teléfono PCS se ubica a 2 km de ella. Suponga un modelo de pérdida en trayectoria dado por la ecuación (8-47), donde $d_0 = 100$ m, $n = 3$ y $X_{dB} = 0$. La antena de la estación base tiene una ganancia de 16 dB.

8–39 Considere un enlace de teléfono celular CDMA como se describe en el problema 8-38 y el estándar IS-95 mostrado en la tabla 8-10. El sistema receptor de la estación base tiene una figura de ruido de 8 dB e interferencia de acceso múltiple (MAI) a causa de otros teléfonos que agregan 20 dB al nivel de ruido en la circuitería central del receptor de la estación base. Calcule la CNR, $(C/N)_{dB}$, después del desensanchado (es decir, a la entrada del detector de datos) en el receptor de la estación base. Además encuentre $(E_b/N_0)_{dB}$ después del desensanchado. Suponga que el ancho de banda después del desensanchado es de $B = 19.2$ kHz, ya que la velocidad de datos con codificación es de 19.2 kb/s (velocidad de datos de subida útil de 9.6 kb/s con $\frac{1}{2}$ de razón de codificación) en cada portadora I y Q BPSK en la señal QPSK.

8–40 Una estación de TV de baja potencia tiene licencia para operar en el canal 35 con una potencia visual radiada efectiva de 1,000 W. La altitud de la antena es de 400 pies y la línea de transmisión de 450 pies de largo. Suponga que se utilizará una línea de transmisión coaxial semirrígidode 50 Ω de $1\frac{5}{8}$ pulgadas de diámetro que tiene una pérdida de 0.6 dB/100 pies (a la frecuencia de operación). La antena tiene una ganancia de 5.6 dB y la pérdida en el duplexor es despreciable. Encuentre la PEP requerida a la salida del transmisor visual.

★ **8–41** Un transmisor visual de TV analógica se prueba modulándolo con una señal periódica de prueba. La envolvente de la salida del transmisor se visualiza en un osciloscopio, como se muestra en la figura P8-41, donde K es una constante desconocida. La salida del transmisor se conecta a una carga ficticia de 50 Ω que tiene un wattímetro de lectura promedio calibrado, mismo que lee 6.9 kW. Encuentre la PEP de la salida del transmisor.

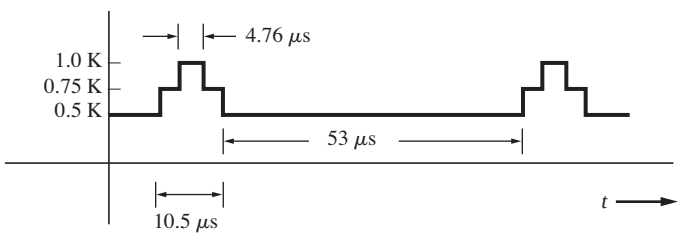


Figura P8–41

8–42 La figura 8-33 presenta especificaciones para el sistema de audio de MTS en estéreo para la TV analógica. Empleando esta figura,

(a) Diseñe un diagrama de bloques para la circuitería del receptor de TV que detectará las señales de audio en estéreo y la señal del segundo programa de audio (SAP).

(b) Describa cómo funciona el circuito. Es decir, obtenga expresiones matemáticas para la señal en cada punto de su diagrama de bloques y explíquelo con sus palabras. Asegúrese de especificar todas las funciones de transferencia de filtro, las frecuencias centrales del VCO, y así sucesivamente.

★ **8–43** Un difusor de TV analógica desea enviar datos digitales a sus suscriptores referentes a la bolsa de valores usando la subportadora de audio profesional. Proponga dos técnicas de señalización digital que satisfarán los requisitos espectrales de la figura 8-33, donde el ancho de banda disponible es de $0.5f_h$. Específicamente, diseñe y dibuje diagramas de bloques de los módems de transmisión y recepción y proporcione las especificaciones para transmitir datos a una velocidad de **(a)** 1,200 b/s y **(b)** 9,600 b/s. Discuta por qué cree tener un buen diseño.

8–44 En el sistema de demodulación de subportadora de TV a color *R-Y*, *B-Y*, la señal *G-Y* se obtiene a partir de las señales *R-Y* y *B-Y*. Es decir,

$$[m_G(t) - m_Y(t)] = K_1[m_R(t) - m_Y(t)] + K_2[m_B(t) - m_Y(t)]$$

(a) Encuentre los valores requeridos para K_1 y K_2.
(b) Dibuje un posible diagrama de bloques para un sistema *R-Y*, *B-Y* y explique cómo funciona.

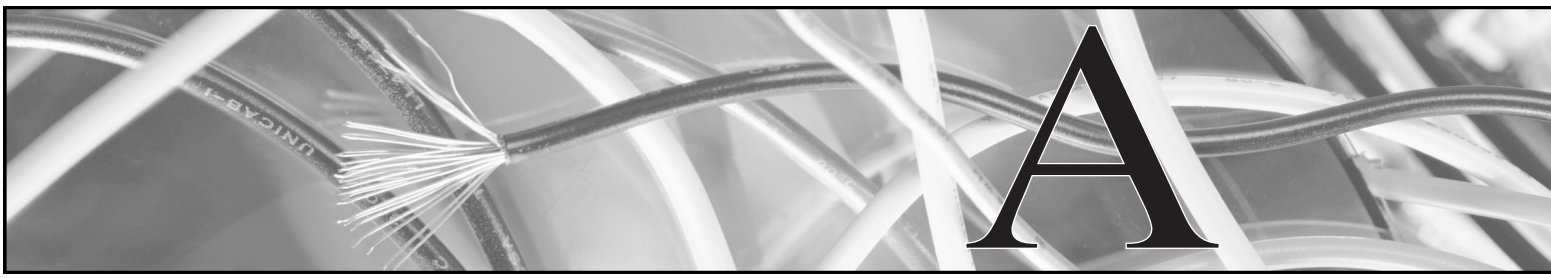
★ **8–45** Remitiéndose a los estándares de DTV digital en la tabla 8-15, la velocidad de datos de subida útil con sincronización es de 19.39 Mb/s. Muestre que con la adición de bits de codificación y bits de entrenamiento, la señal 8VSB tiene una velocidad de símbolo de 10.76 MBauds.

8–46 En Estados Unidos se maneja señalización 8VSB para la transmisión de DTV. Para prevenir la ISI, el espectro de la señal 8VSB se diseña para decaer con una característica de filtro de coseno realzado de raíz cuadrada, como se muestra en la figura 8-39.
(a) Muestre que el ancho de banda absoluto de una señal VSB con filtrado por coseno realzado es

$$B_{\text{VSB}} = \frac{1}{2}(1 + 2r)D$$

donde D es la velocidad de símbolo y r el factor de *rolloff*. [*Sugerencia:* la derivación de esta fórmula es parecida a la de la ecuación (3-74).]
(b) Empleando los parámetros para la DTV de la tabla 8-15 en la fórmula desarrollada en la parte **(a)**, muestre que el ancho de banda absoluto para la DTV es de 6 MHz.

Apéndice



TÉCNICAS, IDENTIDADES Y TABLAS MATEMÁTICAS

A–1 TRIGONOMETRÍA Y NÚMEROS COMPLEJOS

Definiciones

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \qquad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{j\left(e^{jx} + e^{-jx}\right)}$$

Identidades trigonométricas y números complejos

$e^{\pm jx} = \cos x \pm j \operatorname{sen} x$ (teorema de Euler)

$$e^{\pm j\pi/2} = \pm j \qquad e^{\pm jn\pi} = \begin{Bmatrix} 1, & n \text{ par} \\ -1, & n \text{ impar} \end{Bmatrix}$$

$$x + jy = Re^{j\theta}, \quad \text{donde} \quad R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}(y/x)$$

$$(Re^{j\theta})^y = R^y e^{jy\theta} \qquad (R_1 e^{j\theta_1})(R_2 e^{jy\theta_2}) = R_1 R_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{sen}\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

$$2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

$$2 \operatorname{sen} x \cos y = \operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)$$

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

$$2 \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$4 \cos^3 x = 3 \cos x + \cos 3x$$

$$4 \operatorname{sen}^3 x = 3 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x$$

$$8 \cos^4 x = 3 + 4 \cos 2x + \cos 4x$$

$$8 \operatorname{sen}^4 x = 3 - 4 \cos 2x + \cos 4x$$

$$R\cos(x + \theta) = A\cos - B\operatorname{sen} x$$

donde $R = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\theta = \tan^{-1}(B/A)$, $A = R\cos\theta$, $B = R\operatorname{sen}\theta$

A–2 CÁLCULO DIFERENCIAL

Definición

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + (\Delta x/2)) - f(x - (\Delta x/2))}{\Delta x}$$

Reglas de diferenciación

$$\frac{du(x)\,v(x)}{dx} = u(x)\frac{dv(x)}{dx} + v(x)\frac{du(x)}{dx} \quad \text{(productos)} \qquad \frac{du[v(x)]}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} \quad \text{(regla de cadena)}$$

$$\frac{d\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)}{dx} = \frac{v(x)\dfrac{du(x)}{dx} - u(x)\dfrac{dv(x)}{dx}}{v^2(x)} \quad \text{(cociente)}$$

Tabla de derivadas

$$\frac{d[x^n]}{dx} = nx^{n-1} \qquad \frac{d\tan^{-1} ax}{dx} = \frac{a}{1 + (ax)^2}$$

$$\frac{d\,\text{sen}\,ax}{dx} = a\cos ax \qquad \frac{d\cos^{-1}ax}{dx} = -\frac{a}{\sqrt{1-(ax)^2}}$$

$$\frac{d\cos ax}{dx} = -a\,\text{sen}\,ax \qquad \frac{d[e^{ax}]}{dx} = ae^{ax}$$

$$\frac{d\tan ax}{dx} = \frac{a}{\cos^2 ax} \qquad \frac{d[a^x]}{dx} = a^x \ln a$$

$$\frac{d\,\text{sen}^{-1}ax}{dx} = \frac{a}{\sqrt{1-(ax)^2}} \qquad \frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d(\log_a x)}{dx} = \frac{1}{x}\log_a e$$

$$\frac{d\left[\int_{a(x)}^{b(x)} f(\lambda, x)\,d\lambda\right]}{dx} = f(b(x), x)\frac{db(x)}{dx} - f(a(x), x)\frac{da(x)}{dx}$$

$$+\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial x}\,d\lambda \qquad \text{(regla de Leibniz)}$$

A–3 FORMAS INDETERMINADAS

Si $\lim_{x\to a} f(x)$ es de la forma

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^\circ,\ \infty^\circ,\ 1^\infty$$

entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left[\frac{N(x)}{D(x)}\right] = \lim_{x\to a}\left[\frac{(dN(x)/dx)}{(dD(x)/dx)}\right] \qquad \text{(regla de L'Hopital)}$$

donde $N(x)$ es el numerador de $f(x)$, $D(x)$ el denominador de $f(x)$, $N(a) = 0$ y $D(a) = 0$.

A–4 CÁLCULO DE INTEGRALES

Definición

$$\int f(x)\,dx = \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\sum_n [f(n\,\Delta x)]\,\Delta x\right\}$$

Técnicas de integración

1. Cambio en variable. Sea $v = u(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} \left(\frac{f(x)}{dv/dx}\bigg|_{x\,=\,u^{-1}(v)} \right) dv$$

2. Integración por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

3. Tablas de integrales.

4. Técnicas de variables complejas.

5. Métodos numéricos.

A–5 TABLAS DE INTEGRALES

Integrales indefinidas

$$\int (a + bx)^n\,dx = \frac{(a + bx)^{n+1}}{b(n + 1)}, \qquad 0 < n$$

$$\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b} \ln|a + bx|$$

$$\int \frac{dx}{(a + bx)^n} = \frac{-1}{(n - 1)b(a + bx)^{n-1}}, \qquad 1 < n$$

$$\int \frac{dx}{c + bx + ax^2} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \tan^{-1}\left(\dfrac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right), & b^2 < 4ac \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln\left| \dfrac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right|, & b^2 > 4ac \\ \dfrac{-2}{\sqrt{2ax + b}}, & b^2 = 4ac \end{cases}$$

$$\int \frac{x\,dx}{c + bx + ax^2} = \frac{1}{2a} \ln|ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{c + bx + ax^2}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab} \tan^{-1}\left(\frac{bx}{a} \right)$$

$$\int \frac{x\,dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} \ln(a^2 + x^2)$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x \qquad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$

$$\int x \cos x\,dx = \cos x + x \operatorname{sen} x \qquad \int x \operatorname{sen} x\,dx = \operatorname{sen} x - x \cos x$$

$$\int x^2 \cos x\, dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \operatorname{sen} x \qquad \int x^2 \operatorname{sen} x\, dx = 2x \operatorname{sen} x - (x^2 - 2) \cos x$$

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a} \qquad \int x^3 e^{ax}\, dx = e^{ax}\left(\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4}\right)$$

$$\int x e^{ax}\, dx = e^{ax}\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) \qquad \int e^{ax} \operatorname{sen} x\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 1}(a \operatorname{sen} x - \cos x)$$

$$\int x^2 e^{ax}\, dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) \qquad \int e^{ax} \cos x\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 1}(a \cos x - \operatorname{sen} x)$$

Integrales definidas

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1 + x^n}\, dx = \frac{\pi/n}{\operatorname{sen}(m\pi/n)}, \qquad n > m > 0$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx = \Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0, \quad \text{donde} \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$
$$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$
$$\Gamma(n) = (n - 1)! \text{ si } n \text{ es un entero positivo}$$

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2}\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-a^2x^2 + bx}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{b^2/(4a^2)}, \qquad a > 0$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2 + b^2}, \qquad a > 0$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{b}{a^2 + b^2}, \qquad a > 0$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos bx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}\, e^{-b^2/4a^2}}{2a}, \qquad a > 0$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} \cos bx\, dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{b^\alpha} \cos \tfrac{1}{2}\pi\alpha, \qquad 0 < \alpha < 1,\ b > 0$$

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{b^a} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\pi\alpha, \qquad 0 < |\alpha| < 1,\ b > 0$$

$$\int_0^\infty xe^{-ax^2} I_k(bx)\,dx = \frac{1}{2a}\,e^{b^2/4a}, \qquad \text{donde} \quad I_k(bx) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{bx\cos\theta}\cos k\theta\,d\theta$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^\infty \operatorname{Sa}(x)\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad \int_0^\infty \frac{\cos ax}{b^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{2b}\,e^{-ab},\ a > 0,\ b > 0$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 dx = \int_0^\infty \operatorname{Sa}^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2} \qquad \int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen} ax}{b^2 + x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^{-ab},\ a > 0,\ b > 0$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{\pm j2\pi yx}\,dx = \delta(y)$$

A–6 EXPANSIONES DE SERIES

Series finitas

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2} \qquad \sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{a^{N+1} - 1}{a - 1}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \qquad \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{n!(N-n)!}x^n y^{N-n} = (x+y)^N$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} \qquad \sum_{n=0}^{N} e^{j(\theta+n\phi)} = \frac{\operatorname{sen}[(N+1)\phi/2]}{\operatorname{sen}(\phi/2)}\,e^{j[\theta+(N\phi/2)]}$$

$$\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}a^{N-k}b^k = (a+b)^N, \qquad \text{donde} \quad \binom{N}{k} = \frac{N!}{(N-k)!k!}$$

Series infinitas

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right)(x-a)^n \qquad \text{(serie de Taylor)}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 x}, \qquad \text{para } a \le x \le a+T \qquad \text{(serie de Fourier)}$$

$$\text{donde} \quad c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)e^{-jn\omega_0 x}dx \qquad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

A–7 PARES DE TRANSFORMADA DE HILBERT[1]

Definición de la transformada de Hilbert: $\hat{x}(t) \triangleq x(t) * \dfrac{1}{\pi t} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\lambda)}{t-\lambda}\, d\lambda$

Función	Transformada de Hilbert
1. $x(at+b)$	$\hat{x}(at+b)$
2. $x(t) + y(t)$	$\hat{x}(t) + \hat{y}(t)$
3. $\dfrac{d^n x(t)}{dt^n}$	$\dfrac{d^n}{dt^n}\hat{x}(t)$
4. Una constante	0
5. $\dfrac{1}{t}$	$-\pi\delta(t)$
6. $\operatorname{sen}(\omega_0 t + \theta)$	$-\cos(\omega_0 t + \theta)$
7. $\dfrac{\operatorname{sen} at}{at} = \operatorname{Sa}(at)$	$-\dfrac{1}{2\pi} at\, \operatorname{Sa}^2(at)$
8. $e^{\pm j\omega_0 t}$	$\mp j e^{\pm j\omega_0 t}$
9. $\delta(t)$	$\dfrac{1}{\pi t}$
10. $\dfrac{a}{\pi(t^2+a^2)}$	$\dfrac{t}{\pi(t^2+a^2)}$
11. $\prod\left(\dfrac{t}{T}\right) \triangleq \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert \le T/2 \\ 0, & t \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$	$\dfrac{1}{\pi}\ln\left\lvert\dfrac{2t+T}{2t-T}\right\rvert$

A–8 LA FUNCIÓN DELTA DE DIRAC

DEFINICIÓN. La *función delta* de Dirac $\delta(x)$, también llamada *función impulso unitario*, satisface las dos condiciones siguientes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1, \qquad \text{y} \qquad \delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

En consecuencia, $\delta(x)$ es una función "singular".[2]

[1] Los teoremas de la transformada de Fourier se presentan en la tabla 2-1 y los pares de la transformada de Fourier en la tabla 2-2.

[2] La función delta de Dirac no es una función ordinaria, ya que realmente es indefinida cuando $x = 0$. Sin embargo, ésta se describe mediante la teoría matemática de distribuciones [Bremermann, 1965].

Propiedades de las funciones delta de Dirac

1. $\delta(x)$ puede expresarse en términos del límite de algunas funciones ordinarias tales que, en cuanto al límite de algún parámetro se refiere, la función ordinaria satisface la definición para $\delta(x)$. Por ejemplo,

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \right) \quad \text{o} \quad \delta(x) = \lim_{a \to \infty} \left[\frac{a}{\pi} \left(\frac{\operatorname{sen} ax}{ax} \right) \right]$$

Para los dos ejemplos, $\delta(-x) = \delta(x)$, así que para *estos* casos se dice que $\delta(x)$ es una *función delta centrada*, que se utiliza a lo largo de este texto, excepto cuando se especifica la PDF de una variable aleatoria discreta.

$$\delta(x) = \begin{cases} \lim\limits_{a \to \infty} (ae^{ax}), & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Este es un ejemplo de una función delta de un solo lado. En particular, es una *función delta del lado izquierdo*. Este tipo de función se emplea para especificar la PDF de un punto discreto de una variable aleatoria (consulte el apéndice B).

2. Propiedad de corrimiento:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\, \delta(x - x_0)\, dx = w(x_0)$$

3. Para funciones delta *centradas*

$$\int_a^b w(x)\, \delta(x - x_0)\, dx = \begin{cases} 0, & x_0 < a \\ \frac{1}{2} w(a), & x_0 = a \\ w(x_0), & a < x_0 < b \\ \frac{1}{2} w(b), & x_0 = b \\ 0, & x_0 > b \end{cases}$$

donde $b > a$.

4. Para funciones delta del *lado izquierdo*,

$$\int_a^b w(x) \delta(x - x_0)\, dx = \begin{cases} 0, & x_0 \leq a \\ w(x_0), & a < x_0 \leq b \\ 0, & x_0 > b \end{cases}$$

donde $b > a$.

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\, \delta^{(n)}(x - x_0)\, dx = (-1)^n w^{(n)}(x_0)$

donde el exponente (n) denota la n-ésima derivada con respecto a x.

6. La transformada de Fourier de $\delta(x)$ es la unidad. Es decir,

$$\mathcal{F}[\delta(x)] = 1$$

De manera recíproca,

$$\delta(x) = \mathcal{F}^{-1}[1]$$

7. La propiedad de escala es

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

8. Para funciones delta *centradas*,

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j2\pi xy}\, dy$$

A–9 TABULACIÓN DE Sa$(x) = (\text{sen } x)/x$

x	Sa(x)	Sa$^2(x)$	x	Sa(x)	Sa$^2(x)$
0.0	1.0000	1.0000	5.2	−0.1699	0.0289
0.2	0.9933	0.9867	5.4	−0.1431	0.0205
0.4	0.9735	0.9478	5.6	−0.1127	0.0127
0.6	0.9411	0.8856	5.8	−0.0801	0.0064
0.8	0.8967	0.8041	6.0	−0.0466	0.0022
1.0	0.8415	0.7081	6.2	−0.0134	0.0002
1.2	0.7767	0.6033	2π	0.0000	0.0000
1.4	0.7039	0.4955	6.4	0.0182	0.0003
1.6	0.6247	0.3903	6.6	0.0472	0.0022
1.8	0.5410	0.2927	6.8	0.0727	0.0053
2.0	0.4546	0.2067	7.0	0.0939	0.0088
2.2	0.3675	0.1351	7.2	0.1102	0.0122
2.4	0.2814	0.0792	7.4	0.1214	0.0147
2.6	0.1983	0.0393	7.6	0.1274	0.0162
2.8	0.1196	0.0143	7.8	0.1280	0.0164
3.0	0.0470	0.0022	8.0	0.1237	0.0153
π	0.0000	0.0000	8.2	0.1147	0.0132
3.2	−0.0182	0.0003	8.4	0.1017	0.0104
3.4	−0.0752	0.0056	8.6	0.0854	0.0073
3.6	−0.1229	0.0151	8.8	0.0665	0.0044
3.8	−0.1610	0.0259	9.0	0.0458	0.0021
4.0	−0.1892	0.0358	9.2	0.0242	0.0006
4.2	−0.2075	0.0431	9.4	0.0026	0.0000
4.4	−0.2163	0.0468	3π	0.0000	0.0000
4.6	−0.2160	0.0467	9.6	−0.0182	0.0003
4.8	−0.2075	0.0431	9.8	−0.0374	0.0014
5.0	−0.1918	0.0368	10.0	−0.0544	0.0030

A–10 TABULACIÓN DE $Q(z)$

$$Q(z) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-\lambda^2/2}\, d\lambda$$

Para $z \geq 3$, $\quad Q(z) \approx \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, z} e^{-z^2/2}$ (Vea la figura B–7.)

También,

$$Q(-z) = 1 - Q(z)$$

$$Q(z) = \tfrac{1}{2}\text{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{1}{2}\left[1 - \text{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

donde $\quad \text{erfc}(x) \triangleq \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_x^\infty e^{-\lambda^2}\, d\lambda \quad$ y $\quad \text{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\lambda^2}\, d\lambda$

Para $z \geq 0$, una aproximación por función racional es [Abramowitz y Stegun, 1964; Ziemer y Tranter, 1995]

$$Q(z) = \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} (b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5)$$

donde $t = 1/(1 + pz)$ y $p = 0.2316419$,

$b_1 = 0.31981530$ $\quad b_2 = -0.356563782$ $\quad b_3 = 1.781477937$

$b_4 = -1.821255978$ $\quad b_5 = 1.330274429$

Otra aproximación para $Q(z)$ para $z \geq 0$ es [Börjesson y Sunberg, 1979; Peebles, 1993]

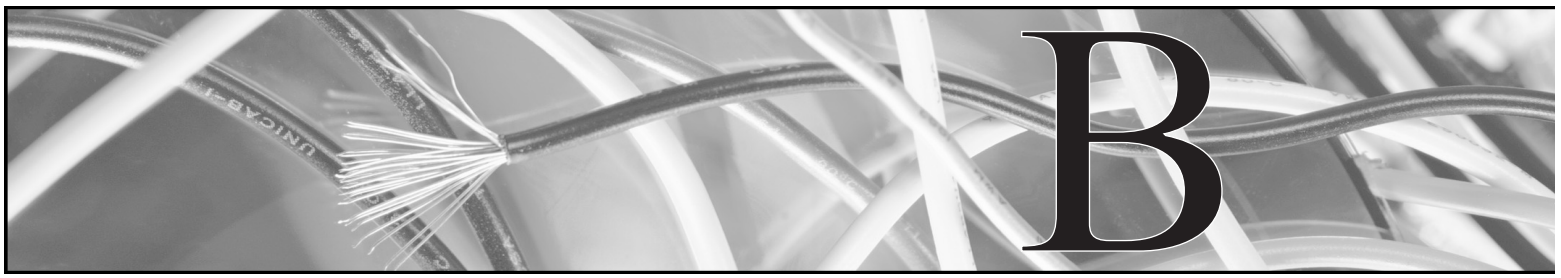
$$Q(z) = \left[\frac{1}{(10.339)z + 0.339\sqrt{z^2 + 5.510}}\right] \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Esta aproximación tiene un máximo error absoluto de 0.27 □ para $z \geq 0$.

z	$Q(z)$	z	$Q(z)$
0.0	0.50000	2.0	0.02275
0.1	0.46017	2.1	0.01786
0.2	0.42074	2.2	0.01390
0.3	0.38209	2.3	0.01072
0.4	0.34458	2.4	0.00820
0.5	0.30854	2.5	0.00621
0.6	0.27425	2.6	0.00466
0.7	0.24196	2.7	0.00347
0.8	0.21186	2.8	0.00256
0.9	0.18406	2.9	0.00187
1.0	0.15866	3.0	0.00135
1.1	0.13567	3.1	0.00097
1.2	0.11507	3.2	0.00069
1.3	0.09680	3.3	0.00048
1.4	0.08076	3.4	0.00034
1.5	0.06681	3.5	0.00023
1.6	0.05480	3.6	0.00016
1.7	0.04457	3.7	0.00011
1.8	0.03593	3.8	0.00007
1.9	0.02872	3.9	0.00005
		4.0	0.00003

Vea también la figura B-7 para un gráfico de $Q(z)$.

Apéndice



B

PROBABILIDAD Y VARIABLES ALEATORIAS

B–1 INTRODUCCIÓN

La necesidad de una teoría de probabilidad surge en toda disciplina científica, ya que es imposible estar completamente seguro de los valores que se obtienen a través de mediciones. Por ejemplo, se puede decir que se está 90□ seguro de que un voltaje estará dentro de ±0.1 V de un nivel de 5 V. Esta es una descripción estadística del parámetro de voltaje, a diferencia de una descripción determinista, en la cual se pudiera definir el voltaje siendo exactamente de 5 V.

El objetivo de este apéndice es convertirse en un breve curso de probabilidad y variables aleatorias. Varios libros excelentes cubren este tema con mayor detalle [Childers, 1997□ Papoulis, 1991□ Peebles, 1993□ Shanmugan y Breipohl, 1988]. Este apéndice proporcionará una buena introducción al tema para el nuevo estudiante o un repaso rápido para quien ya posee cierto conocimiento del área.

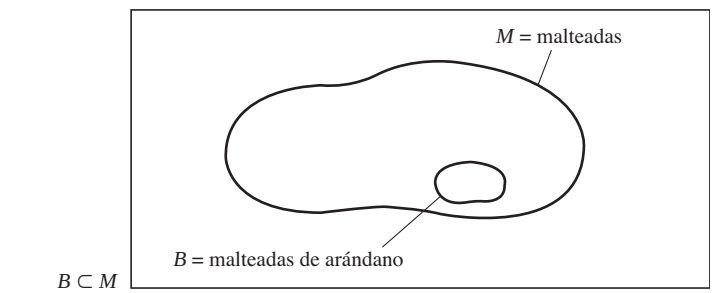
Si la probabilidad y las variables aleatorias son temas nuevos para usted, pronto se dará cuenta que para comprenderlas necesitará dominar muchas definiciones que parecen introducirse todas al mismo tiempo. Es importante que memorice dichas definiciones para emplearlas cuando discuta

sobre resultados estadísticos. Además deberá desarrollar una idea de las aplicaciones en ingeniería de estas definiciones y teoremas. Ello se logrará al principio, y así podrá comprender fácilmente términos estadísticos más complejos.

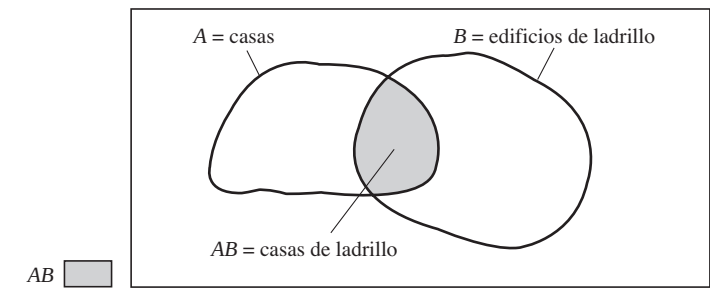
B–2 CONJUNTOS

DEFINICIÓN. Un *conjunto* es una colección (o clase) de objetos.

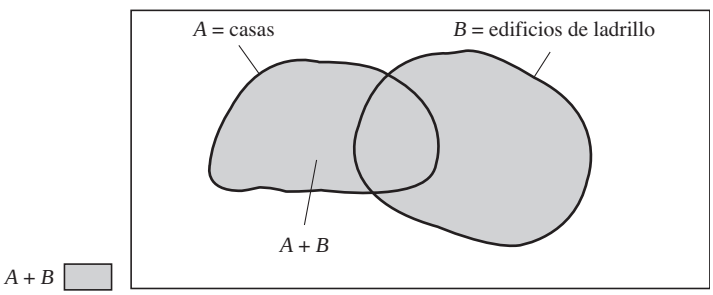
El conjunto más grande o el conjunto que abarca todos los objetos bajo consideración en un experimento se conoce como *conjunto universal*. Todos los demás conjuntos bajo consideración en el experimento son subconjuntos, o *eventos*, del conjunto universal. Esto se ilustra en la figura B-1a,



(a) Subconjuntos



(b) Intersección



(c) Unión

Figura B–1 Diagrama de Venn.

donde se presenta un *diagrama de Venn*. Por ejemplo, M puede representar al conjunto que contiene todos los tipos de malteadas, y B el subconjunto de malteadas de arándano. Por lo tanto, M contiene a B, lo cual se representa con $B \subset M$. En las partes b y c de esta figura se muestran dos conjuntos, A y B. Las dos formas básicas para describir la combinación del conjunto A y el conjunto B se llaman *intersección* y *unión*.

DEFINICIÓN. La *intersección* del conjunto A y el conjunto B, denotada por AB, es el conjunto de elementos que es común a A y B (los matemáticos utilizan la nomenclatura $A \cap B$).

La intersección de A y B es análoga a la operación AND utilizada en la lógica digital. Por ejemplo, si A representa casas y B representa edificios de ladrillo, entonces el evento $C = AB$ representaría sólo casas de ladrillo. Esto se ilustra en la figura B-1b.

DEFINICIÓN. La *unión* del conjunto A y el conjunto B, denotada por $A + B$, es el conjunto que contiene todos los elementos de A o todos los elementos de B, o de ambos (los matemáticos utilizan la nomenclatura $A \cup B$).

La unión de A y B es análoga a la operación OR utilizada en la lógica digital. Continuando con el ejemplo anterior, $D = A + B$ sería el conjunto que contiene todos los edificios de ladrillo, todas las casas y todas las casas de ladrillo. Esto se ilustra en la figura B-1c.

Los eventos A y B se conocen como *eventos simples*, y los eventos $C = AB$ y $D = A + B$ se llaman *eventos compuestos*, ya que son funciones lógicas de los eventos simples.

B–3 PROBABILIDAD Y FRECUENCIA RELATIVA

Probabilidad simple

La probabilidad de un evento A, denotada por $P(A)$, puede definirse en términos de la frecuencia relativa de A que ocurre en un número n de pruebas.

DEFINICIÓN. [1]

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n_A}{n} \right) \tag{B–1}$$

donde n_A es el número de veces que A ocurre en n pruebas.

En la práctica la n se toma como un número razonable de manera que un valor más grande de n daría aproximadamente el mismo valor para $P(A)$. Por ejemplo, suponga que una moneda se lanza 40 veces y que el evento de "águila", representada por A, ocurre 19 veces. Entonces, la probabilidad de que caiga "águila" se puede evaluar aproximadamente como $P(A) = \frac{19}{40}$, donde el valor verdadero de $P(A) = 0.5$ pudo haberse obtenido si se hubiese utilizado $n = \infty$.

[1] En este caso se emplea un enfoque ingenieril para definir a la probabilidad. Hablando estrictamente, los expertos estadísticos han desarrollado la teoría de probabilidad basados en tres axiomas: (1) $P(A) > 0$, (2) $P(S) = 1$, donde S es el evento seguro y (3) $P(A + B) = P(A) + P(B)$, siempre y cuando AB sea el evento nulo (es decir, $AB = \square$). Los expertos estadísticos definen a $P(A)$ como una función de A que satisface estos axiomas. La definición ingenieril es consistente con este enfoque, ya que satisface estos axiomas.

A partir de la definición de probabilidad dada por la ecuación (B-1) se puede observar que todas las funciones de probabilidad tienen la propiedad

$$0 \leq P(A) \leq 1 \tag{B–2}$$

donde $P(A) = 0$ si el evento A es un *evento nulo* (nunca ocurre) y $P(A) = 1$ si es un *evento seguro* (siempre ocurre).

Probabilidad conjunta

DEFINICIÓN. La probabilidad de un *evento conjunto*, AB, es

$$P(AB) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_{AB}}{n}\right) \tag{B–3}$$

donde n_{AB} es el número de veces que el evento AB ocurre en n pruebas.

Además de esto, dos eventos, A y B, son *mutuamente exclusivos* si AB es un evento nulo, lo cual implica que $P(AB) \equiv 0$.

Ejemplo B–1 EVALUACIÓN DE PROBABILIDADES

Sea un evento A que denote un accidente automovilístico que bloquee cierta intersección durante un intervalo de un minuto. Sea un evento B que represente que llueve en la intersección durante un periodo de un minuto. Entonces, el evento $E = AB$ sería una intersección bloqueada mientras llueve, evaluado en incrementos de un minuto.

Suponga que se tabulan medidas experimentales continuamente durante una semana y se encuentra que $n_A = 25$, $n_B = 300$, $n_{AB} = 20$ y hay $n = 10{,}080$ intervalos de un minuto en la semana de medición ($n_A = 25$ no significa que ocurrieron 25 accidentes en un periodo de una semana sino que la intersección se bloqueó durante 25 periodos de un minuto debido a accidentes automovilísticos—esto es igualmente verdadero para n_B y n_{AB}). Estos resultados indican que la probabilidad de que exista una intersección bloqueada es de $P(A) = 0.0025$—la probabilidad de lluvia es $P(B) = 0.03$, y la probabilidad de que exista una intersección bloqueada y de que llueva es $P(AB) = 0.002$.

La probabilidad de la unión de dos eventos puede evaluarse midiendo el evento compuesto directamente o a partir de las probabilidades de los eventos simples, como se define con el siguiente teorema:

TEOREMA. *Sea* $E = A + B$—entonces,

$$P(E) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{B–4}$$

Demostración. Sea un evento A que sólo ocurre n_1 veces durante n pruebas, un evento B que ocurre n_2 veces durante n pruebas y el evento AB que ocurre n_{AB} veces. Entonces,

$$\begin{aligned} P(A+B) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_1 + n_2 + n_{AB}}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_1 + n_{AB}}{n}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_2 + n_{AB}}{n}\right) - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_{AB}}{n}\right) \end{aligned}$$

lo cual es idéntico a la ecuación (B-4), ya que

$$P(A) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_1 + n_{AB}}{n}\right),$$

$$P(B) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_2 + n_{AB}}{n}\right), \text{ y } P(AB) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_{AB}}{n}\right)$$

Ejemplo B–1 (Continuación)

La probabilidad de que exista una intersección bloqueada o de que llueva o de que ambas ocurran es entonces

$$P(A + B) = 0.0025 + 0.03 - 0.002 \approx 0.03 \tag{B–5}$$

Probabilidades condicionales

Definición. La probabilidad de que ocurra un evento A, dado que también ocurrió un evento B, se denota por $P(A|B)$, lo cual se define como

$$P(A|B) = \lim_{n_B\to\infty}\left(\frac{n_{AB}}{n_B}\right) \tag{B–6}$$

Ejemplo B–1 (Continuación)

La probabilidad de que exista una intersección bloqueada mientras llueve es aproximadamente

$$P(A|B) = \tfrac{20}{300} = 0.066 \tag{B–7}$$

Teorema. *Sea $E = AB$ entonces*

$$P(AB) = P(A)\,P(B|A) = P(B)\,P(A|B) \tag{B–8}$$

Esto se conoce como teorema de Bayes.

Demostración.

$$P(AB) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_{AB}}{n}\right) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ n_A\to\text{grande}}}\left(\frac{n_{AB}}{n_A}\,\frac{n_A}{n}\right) = P(B|A)\,P(A) \tag{B–9}$$

Es notable que los valores que se obtienen para $P(AB)$, $P(B)$ y $P(A|B)$ en el ejemplo B-1 se pueden verificar mediante la ecuación (B-8).

Definición. Se dice que dos eventos, A y B, son *independientes* si

$$P(A|B) = P(A) \tag{B–10}$$

o

$$P(B|A) = P(B) \tag{B–11}$$

Utilizando esta definición es factible demostrar fácilmente que los eventos A y B del ejemplo B-1 no son independientes. Recíprocamente, si el evento A se hubiera definido como la obtención

de "águilas" al lanzar una moneda mientras B fuese el evento cuando llueve en la intersección, entonces A y B hubiesen sido independientes. ☐Por qué?

Usando las ecuaciones (B-8) y (B-10) se puede mostrar que si un conjunto de eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, son independientes, entonces una condición necesaria es[2]

$$P(A_1A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n) \tag{B–12}$$

B–4 VARIABLES ALEATORIAS

DEFINICIÓN. Una *variable aleatoria* con valor real es una función con valor real definida en los eventos (elementos) del sistema de probabilidad.

Comprender por qué se requiere esta definición es fundamental en la teoría de probabilidad. Hasta ahora se han definido las probabilidades en términos de los eventos A, B, C y así sucesivamente. Este método es un poco difícil de emplear cuando los conjuntos son objetos (manzanas, naranjas, etc.) en lugar de números. Es más conveniente describir a los conjuntos mediante valores numéricos para así poder obtener ecuaciones como una función de valores numéricos en lugar de funciones de parámetros alfanuméricos. Este método se logra mediante la variable aleatoria.

Ejemplo B–2 VARIABLE ALEATORIA

Considerando la figura B-2 se pueden mostrar los eventos mutuamente exclusivos A, B, C, D, E, F, G y H mediante un diagrama de Venn. Estos son todos los posibles resultados de un experimento, así que el evento seguro es $S = A + B + C + D + E + F + G + H$. Cada uno de estos eventos se representa mediante un valor conveniente de la variable aleatoria x, como se muestra en la tabla en esta figura. Los valores asignados para x pueden ser positivos, negativos, fraccionales o enteros siempre y cuando sean números reales. ☐a que todos los eventos son mutuamente exclusivos, ocupando la ecuación (B-4) resulta que

$$P(S) = 1 = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E) + P(F) + P(G) + P(H) \tag{B–13}$$

Es decir, la suma de las probabilidades debe ser igual a la unidad (la probabilidad de un evento seguro), como se muestra en la tabla, y las probabilidades individuales se han dado o medido como se muestra. Por ejemplo, $P(C) = P(-1.5) = 0.2$. Estos valores para las probabilidades pueden graficarse como una función de la variable aleatoria x, como se muestra en el gráfico de $P(x)$. ☐sta es una distribución *discreta* (o *punto*), ya que la variable aleatoria toma sólo valores discretos, y no continuos.

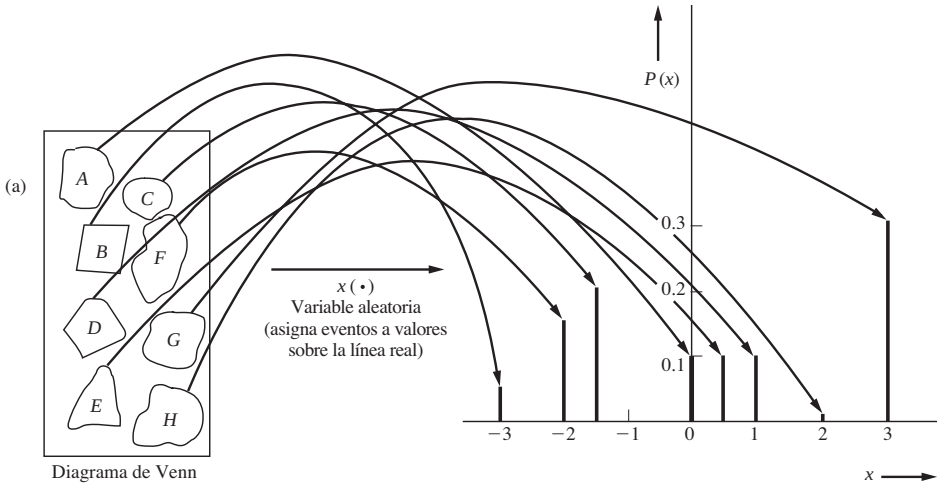
B–5 FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN ACUMULATIVA Y FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

DEFINICIÓN. La *función de distribución acumulativa* (CDF, por sus siglas en inglés) de la variable aleatoria x está dada por $F(a)$, donde

$$F(a) \triangleq P(x \leq a) \equiv \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n_{x\leq a}}{n}\right) \tag{B–14}$$

donde $F(a)$ *es* una función sin unidades.

[2] La ecuación (B-12) no es una condición suficiente para que A_1, A_2, ..., A_n sean independientes [Papoulis, 1984, p. 34].



Evento $[\cdot]$	Valor de la variable aleatoria $x[\cdot]$	Probabilidad del evento $P(x)$
A	0.0	0.10
B	−3.0	0.05
C	−1.5	0.20
D	−2.0	0.15
E	+0.5	0.10
F	+1.0	0.10
G	+2.0	0.00
H	+3.0	0.30
		Total = 1.00

Figura B–2 Variable aleatoria y funciones de probabilidad para el ejemplo B-2.

DEFINICIÓN. La *función de densidad de probabilidad* (PDF, por sus siglas en inglés) de la variable aleatoria x está dada por $f(x)$, donde

$$f(x) = \frac{dF(a)}{da}\bigg|_{a=x} = \frac{dP(x \leq a)}{da}\bigg|_{a=x} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x \to 0}} \left[\frac{l}{\Delta x} \left(\frac{n_{\Delta x}}{n} \right) \right] \tag{B–15}$$

donde $f(x)$ tiene unidades de $1/x$.

Ejemplo B–2 (Continuación)

La CDF para el ejemplo que se ilustró en la figura B-2 puede obtenerse fácilmente con la ecuación (B-14). La CDF resultante se muestra en la figura B-3. Note que la CDF inicia en un valor de cero a la izquierda ($a = -\infty$) y que la probabilidad se acumula hasta que la CDF sea igual a la unidad en el lado derecho ($a = +\infty$).

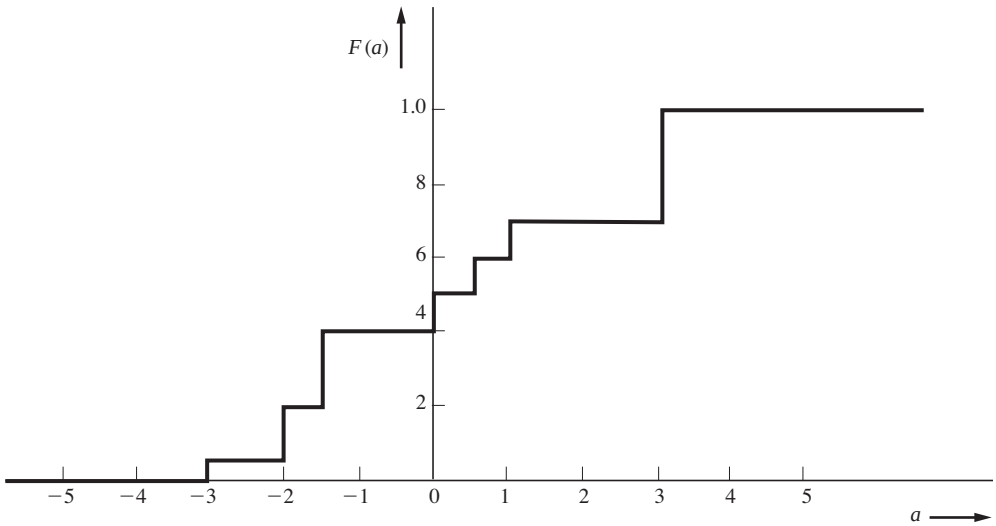


Figura B–3 CDF para el ejemplo B-2.

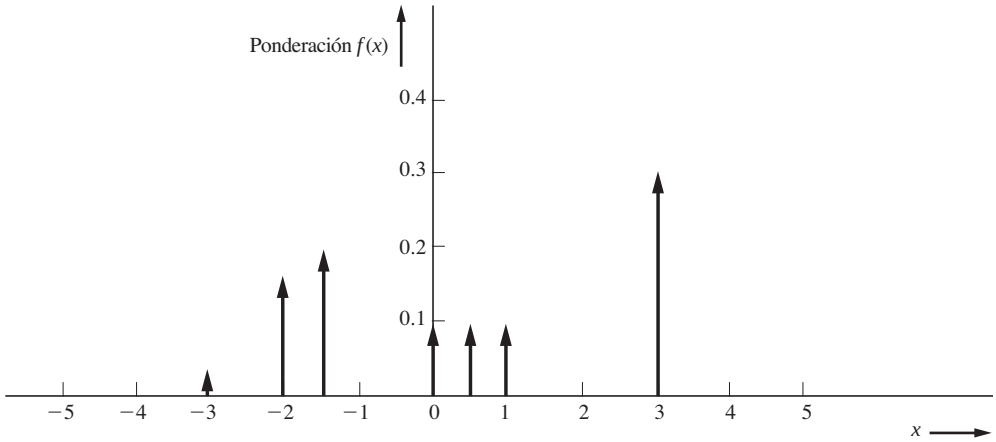


Figura B–4 PDF para el ejemplo B-2.

Ocupando la ecuación (B-15) se obtiene la PDF tomando la derivada de la CDF. El resultado se muestra en la figura B-4. La PDF consiste en funciones delta de Dirac localizadas a los valores asignados (discretos) de la variable aleatoria y poseen ponderaciones igual a las probabilidades del evento asociado.[3]

[3] En este caso se utilizan funciones delta del lado izquierdo de tal manera que $x = a$ resulta ser un punto discreto. $F(a) = P(x \leq a)$ incluye todas las probabilidades desde $x = -\infty$ hasta e *incluso* el punto $x = a$. Consulte la sección A-8 (apéndice A) para las propiedades de las funciones delta de Dirac.

Propiedades de CDF y PDF

A continuación se describen algunas *propiedades de la CDF*:

1. $F(a)$ es una función sin decremento.
2. $F(a)$ es continua *al lado derecho*. Esto es,

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} F(a + \varepsilon) = F(a)$$

3.

$$F(a) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\infty}^{a+\varepsilon} f(x)\, dx \tag{B–16}$$

4. $0 \leq F(a) \leq 1$.
5. $F(-\infty) = 0$.
6. $F(+\infty) = 1$.

Note que ε se requiere para considerar un punto discreto que puede ocurrir cuando $x = a$. Si no existe un punto discreto en $x = a$ entonces el límite no es necesario.

A continuación se describen algunas *propiedades de la PDF*:

1. $f(x) \geq 0$. Es decir, $f(x)$ *es* una función no negativa.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = F(+\infty) = 1$. (B–17)

Como se verá más tarde, $f(x)$ puede contener valores más grandes que la unidad□sin embargo, el área bajo $f(x)$ es igual a la unidad. Estas propiedades de la CDF y la PDF son muy útiles en la verificación de los resultados de problemas. Es decir, si una CDF o una PDF se aparta de cualquiera de estas propiedades, usted *sabrá* que se ha cometido un error en los cálculos.

Distribuciones discretas y continuas

El ejemplo B-2 es un caso de *distribución discreta* o *de punto*. Esto es, la variable aleatoria posee M valores discretos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_M$ (para este ejemplo, $M = 7$). Como consecuencia, la CDF aumentó sólo en saltos [es decir, $F(a)$ fue discontinua] conforme aumenta a, y la PDF consistió en funciones delta ubicadas en los valores discretos de la variable aleatoria. Contrariamente a este ejemplo de distribución discreta, existen distribuciones continuas, una de las cuales se ilustrará a continuación. Si se permite que una variable aleatoria tome cualquier valor en algún intervalo, entonces es una variable aleatoria *continuamente distribuida* en dicho intervalo.

Ejemplo B–3 UNA DISTRIBUCIÓN CONTINUA

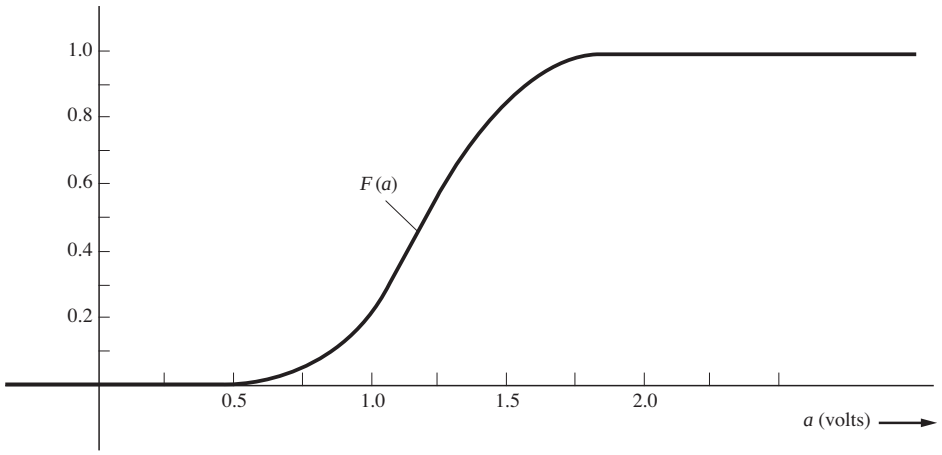
Sea una variable aleatoria que representa los voltajes asociados a una colección de un gran número de baterías para lámparas de mano (celdas de 1.5 V). Si el número de baterías en la colección fuera infinito, el número de valores de voltaje (eventos) diferentes que se pueden obtener sería infinito, de tal

forma que las distribuciones (PDF y CDF) serían funciones continuas. Suponga que, por medición, primero se evalúa la CDF utilizando $F(a) = P(x \leq a) = \lim_{n \to \infty} (n_{x \leq a}/n)$, donde n es el número de baterías en la colección completa y $n_{x \leq a}$ es el número de baterías en la colección con voltajes menores o iguales que a V, donde a es un parámetro. La CDF que pudiera obtenerse se ilustra en la figura B-5a. La PDF asociada se obtiene tomando la derivada de la CDF, como se muestra en la figura B-5b. Note que $f(x)$ excede la unidad para ciertos valores de x, pero que el área bajo $f(x)$ es igual a la unidad (una propiedad de la PDF). (Quizá también deba verificar que se satisfarán las otras propiedades de CDF y PDF.)

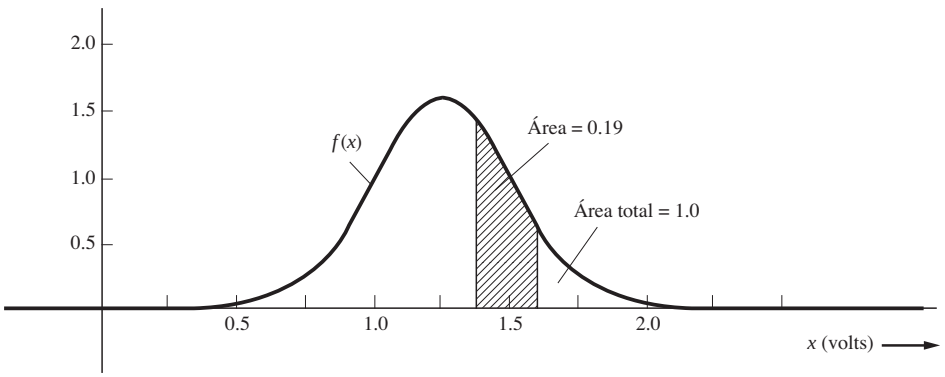
TEOREMA.

$$F(b) - F(a) = P(x \leq b) - P(x \leq a) = P(a < x \leq b)$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left[\int_{a+\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(x)\, dx \right] \tag{B–18}$$



(a) Función de distribución acumulativa



(b) Función de densidad de probabilidad

Figura B–5 CDF y PDF de una distribución continua (ejemplo B-3).

Demostración.

$$F(b) - F(a) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left[\int_{-\infty}^{b+\varepsilon} f(x)\, dx - \int_{-\infty}^{a+\varepsilon} f(x)\, dx \right]$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left[\int_{-\infty}^{a+\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{a+\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(x)\, dx \int_{-\infty}^{a+\varepsilon} f(x)\, dx \right]$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left[\int_{a+\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(x)\, dx \right]$$

Ejemplo B–3 (Continuación)

Suponga que se desea calcular la probabilidad de obtener una batería que posea un voltaje entre 1.4 y 1.6 V. Utilizando este teorema junto con la figura B-5 se obtiene que

$$P(1.4 < x \leq 1.6) = \int_{1.4}^{1.6} f(x)\, dx = F(1.6) - F(1.4) = 0.19$$

También se puede observar que la probabilidad de obtener una batería de 1.5 V es de cero. ☐Por qué? Sin embargo, la probabilidad de obtener una batería de 1.5 V $\pm$ 0.1 V es de 0.19.

En los sistemas de comunicación existen señales digitales que pueden tener distribuciones discretas (un valor discreto para cada nivel permitido en una señal multinivel) y también hay señales analógicas y ruido que tienen distribuciones continuas. Pueden existir además distribuciones mezcladas, las cuales contienen valores tanto discretos como continuos, como cuando una señal continua y ruido se truncan por un amplificador que se controla hasta llegar a su saturación.

TEOREMA. *Si x está discretamente distribuida, entonces*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{M} P(x_i)\, \delta(x - x_i) \tag{B–19}$$

donde M es el número de eventos discretos y $P(x_i)$ la probabilidad de obtener el evento discreto x_i.

Este teorema se ilustró mediante el ejemplo B-2, donde la PDF de esta distribución discreta se grafica en la figura B-4.

TEOREMA. *Si x está discretamente distribuida, entonces*[4]

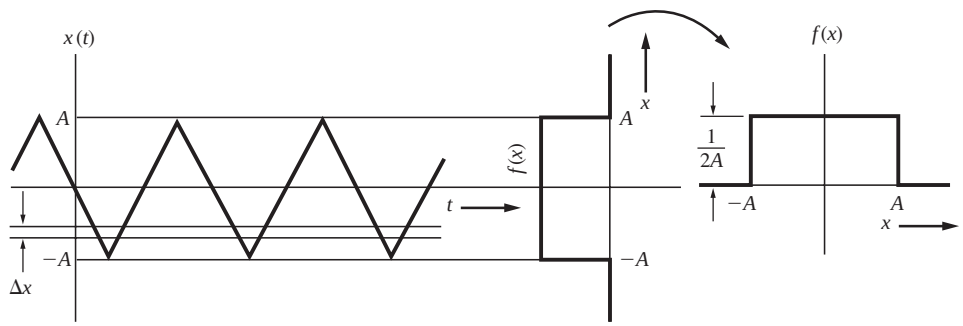
$$F(a) = \sum_{i=1}^{L} P(x_i) \tag{B–20}$$

[4] La ecuación (B-20) es idéntica a $F(a) = \Sigma_{i=1}^{M} P(x_i)u(a - x_i)$, donde $u(y)$ es una función escalón unitario [definida en la ecuación (2-49)].

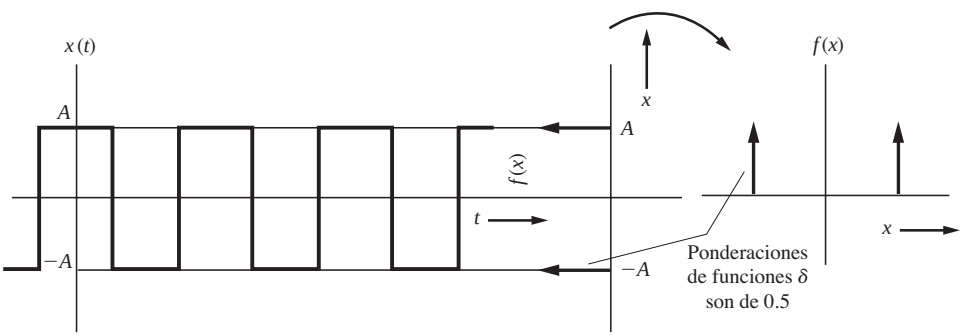
L es el entero más grande tal que $x_L \leq a$, $L \leq M$ y M es el número de puntos en la distribución discreta. En este caso se asume que los puntos discretos x_i están indexados de tal forma que ocurren en orden ascendente del índice. Esto es, $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_M$.

Este teorema se ilustró en la figura B-3, la cual es un gráfico de la ecuación (B-20) para el ejemplo B-2.

En los problemas de ingeniería eléctrica, las CDF o PDF son relativamente fáciles de obtener utilizando el enfoque de la frecuencia relativa, como se describe en las ecuaciones (B-14) y (B-15). Por ejemplo, las PDF para ondas triangulares y cuadradas se presentan en la figura B-6. Éstas se obtienen barriendo una ventana horizontal estrecha, de Δx volts de ancho, verticalmente a lo largo de las formas de onda y después midiendo la frecuencia relativa de la ocurrencia de voltajes en la ventana Δx. El eje del tiempo se divide en n intervalos y la forma de onda aparece $n\Delta x$ veces dentro de estos intervalos en la ventana Δx. Se puede también obtener una idea general de la forma de onda si ésta se observa en un osciloscopio analógico. Si *no* se usa un barrido horizontal, la intensidad de la presentación como una función del voltaje (eje y) resulta en la PDF. (Esto asume que la intensidad de la imagen es proporcional al tiempo que la forma de onda reside en la ventana de Δy unidades de ancho.) La PDF es proporcional a la intensidad como una función de y (la variable aleatoria).



(a) Forma de onda triangular y su PDF asociada



(b) Forma de onda cuadrada y su PDF asociada

Figura B–6 PDF para ondas triangulares y cuadradas.

B–6 PROMEDIO CONJUNTO Y MOMENTOS

Promedio conjunto

Una de las principales aplicaciones de la teoría de la probabilidad es la evaluación del valor promedio de una variable aleatoria, la cual representa algún fenómeno físico, o la del valor promedio de alguna función de la variable aleatoria. En general, asumiendo que la función de una variable aleatoria sea denotada por $y = h(x)$.

DEFINICIÓN. El *valor esperado*, que también se conoce como *promedio conjunto*, de $y = h(x)$ *está* dado por

$$\overline{y} = \overline{[h(x)]} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} [h(x)]\, f(x)\, dx \tag{B–21}$$

Esta definición puede emplearse para variables aleatorias tanto discretas como continuas. Note que el operador es lineal. El operador es

$$\overline{[\cdot]} = \int_{-\infty}^{\infty} [\cdot]\, f(x)\, dx \tag{B–22}$$

Observe que algunos autores pueden representar el promedio conjunto de y mediante $E[y]$ o $\langle y \rangle$. Se utilizará la nomenclatura de $\overline{y}$, ya que es más fácil de escribir y más conveniente de usar cuando se evalúan ecuaciones largas con un gran número de operadores de promedio.

TEOREMA. *Si x es una variable aleatoria* ***discretamente*** *distribuida, entonces el valor esperado se puede evaluar ocupando*

$$\overline{y} = \overline{[h(x)]} = \sum_{i=1}^{M} h(x_i) P(x_i) \tag{B–23}$$

donde M es el número de puntos discretos en la distribución.

Demostración. Empleando la ecuación (B-19) dentro de (B-21) se obtiene que

$$\begin{aligned}
\overline{[h(x)]} &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \left[\sum_{i=1}^{M} P(x_i)\, \delta(x - x_i) \right] dx \\
&= \sum_{i=1}^{M} P(x_i) \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, \delta(x - x_i)\, dx \\
&= \sum_{i=1}^{M} P(x_i) h(x_i)
\end{aligned}$$

Ejemplo B–4 EVALUACIÓN DE UN PROMEDIO

A continuación se mostrará que la ecuación (B-23) y, en consecuencia, la definición del valor esperado como se obtiene de la ecuación (B-21), son consistentes en la manera en que generalmente se evalúan los promedios. Suponga que se tiene una clase de $n = 40$ estudiantes que presentan un examen. Las califica-

ciones resultantes son de 1 examen con una calificación de 100, 2 con calificaciones de 95, 4 con calificaciones de 90, 6 con 85, 10 con 80, 10 con 75, 5 con 70, 1 con 65 y 1 examen con una calificación de 60. Entonces, el promedio de la clase es

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{100(1) + 95(2) + 90(4) + 85(6) + 80(10) + 75(10) + 70(5) + 65(1) + 60(1)}{40} \\ &= 100\left(\frac{1}{40}\right) + 95\left(\frac{2}{40}\right) + 90\left(\frac{4}{40}\right) + 85\left(\frac{6}{40}\right) + 80\left(\frac{10}{40}\right) + 75\left(\frac{10}{40}\right) \\ &\quad + 70\left(\frac{5}{40}\right) + 65\left(\frac{1}{40}\right) + 60\left(\frac{1}{40}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{9} x_i P(x_i) = 79.6 \end{aligned} \tag{B–24}$$

Momentos

Los *momentos* se definen como promedios conjuntos de algunas funciones específicas utilizadas para $h(x)$. Por ejemplo, para el r-ésimo momento (que se define a continuación), sea $y = h(x) = (x - x_0)^r$.

DEFINICIÓN. El r-ésimo *momento* de la variable aleatoria x tomado alrededor del punto $x = x_0$ se obtiene mediante

$$\overline{(x - x_0)^r} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^r f(x)\, dx \tag{B–25}$$

DEFINICIÓN. La *media* m es el primer momento tomado alrededor del origen (es decir, $x_0 = 0$). Por tanto,

$$m \triangleq \overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \tag{B–26}$$

DEFINICIÓN. La *varianza* σ^2 es el segundo momento tomado alrededor de la media. Por tanto,

$$\sigma^2 = \overline{(x - \overline{x})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^2 f(x)\, dx \tag{B–27}$$

DEFINICIÓN. La *desviación estándar* σ es la raíz cuadrada de la varianza. Por tanto,

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^2 f(x)\, dx} \tag{B–28}$$

Como ingeniero usted puede reconocer las integrales de las ecuaciones (B-26) y (B-27) como se relacionan con las aplicaciones en problemas mecánicos. La media es equivalente al centro de gravedad de una masa que se distribuye a través de una sola dimensión, mientras que $f(x)$ denota la densidad de la masa como una función del eje x. La varianza es equivalente al momento de inercia alrededor del centro de gravedad. Sin embargo, puede preguntarse: "¿Cuál es el significado de la media, la varianza y otros momentos en los problemas de ingeniería eléctrica?" En el capítulo 6 se

muestra que si x representa una forma de onda de voltaje o de corriente, la media resulta en el valor de DC de la forma de onda. El segundo momento $(r = 2)$ tomado alrededor del origen $(x_0 = 0)$, el cual es $\overline{x^2}$, resulta en la potencia normalizada□σ^2 resulta en la potencia normalizada en la forma de onda acoplada a la AC correspondiente. Como consecuencia, $\sqrt{\overline{x^2}}$ es el RMS de la forma de onda y σ el RMS de la forma de onda acoplada a la AC correspondiente.

En términos de estadística, m resulta en el *centro de gravedad* de la PDF y σ en el *ensanchado* de la PDF alrededor de este centro de gravedad. Por ejemplo, en la figura B-5 se presenta la distribución de voltaje de una colección de baterías para lámparas de mano. La media es $\overline{x} = 1.25$ V y la desviación estándar es $\sigma = 0.25$ V. La figura ilustra una distribución gaussiana que se estudiará a detalle en la sección B-7. Para esta distribución gaussiana, el área bajo $f(x)$ desde $x = 1.0$ a 1.5 V, lo cual corresponde al intervalo $\overline{x} \pm \sigma$, es 0.68. Por lo tanto, se puede concluir que 68□ de las baterías posee voltajes dentro de una desviación estándar del valor de la media (distribución gaussiana).

Existen diversas maneras de especificar un número que se utilice para describir el valor típico, o más común, de x. La *media* m es un ejemplo de dichas medidas de las cuales se obtiene el centro de gravedad. Otra medida es la *mediana*, la cual corresponde al valor de $x = a$, donde $F(a) = \frac{1}{2}$. Una tercera medida se conoce como *moda*, la cual corresponde al valor de x donde $f(x)$ es un máximo, suponiendo que la PDF tiene un solo máximo. Para la distribución gaussiana, todas estas medidas resultan en el mismo número, es decir, $x = m$. Para otros tipos de distribuciones, los valores obtenidos para la media, mediana y moda generalmente serán casi el mismo número. La varianza también se relaciona al segundo momento alrededor del origen y la media, como se describe en el siguiente teorema:

TEOREMA.

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 \tag{B–29}$$

Una demostración de este teorema ilustra cómo se usa la nomenclatura del operador para el promedio conjunto.

Demostración.

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \overline{(x - \overline{x})^2} \\ &= \overline{[x^2]} - \overline{[2\,x\overline{x}]} + \overline{[(\overline{x})^2]} \end{aligned} \tag{B–30}$$

Debido a que $\overline{[\cdot]}$ es un operador lineal, entonces $\overline{[2\,x\overline{x}]} = 2\,\overline{x}\,\overline{x} = 2(\overline{x})^2$. Aún más, $(\overline{x})^2$ es una constante, y el valor promedio de una constante es la constante misma. Esto es, para la constante c,

$$\overline{c} = \int_{-\infty}^{\infty} c\,f(x)\,dx = c\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c \tag{B–31}$$

Así que ocupando la ecuación (B-31) dentro de la ecuación (B-30) se obtiene que

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - 2(\overline{x})^2 + (\overline{x})^2$$

lo cual es equivalente a la ecuación (B-29).

En consecuencia, existen dos formas de evaluar la varianza: (1) mediante la definición dada por la ecuación (B-27) o (2) con el teorema que es la ecuación (B-29).

B–7 EJEMPLOS DE DISTRIBUCIONES IMPORTANTES

Existen numerosos tipos de distribuciones. Algunas de las más importantes empleadas en los problemas de comunicaciones y de estadística se resumen en la tabla B-1. Aquí se muestran ecuaciones para su PDF y CDF, se hace un diagrama de la PDF y se obtienen las fórmulas para la media y la varianza. Estas distribuciones se estudiarán con más detalle en los párrafos siguientes.

Distribución binomial

La distribución binomial es útil para describir problemas digitales y otros problemas estadísticos. Su aplicación se ilustra mejor a través de un ejemplo.

Suponga que se tiene una palabra binaria de n bits de longitud y que la probabilidad de enviar un 1 binario es p. Por lo tanto, la probabilidad de enviar un binario 0 es de $1 - p$. Se desea evaluar la probabilidad de obtener palabras de n bits que contienen un número k de 1 binarios. Una de esas palabras es de k 1 binarios seguidos de $n - k$ 0 binarios. La probabilidad de obtener esta palabra es de $p^k(1 - p)^{n-k}$. Existen también otras palabras de n bits que contienen k 1 binarios. De hecho, el número de diferentes palabras de n bits que contienen k 1 binarios es

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \tag{B–32}$$

(Esto se puede demostrar tomando un ejemplo numérico, como $n = 8$ y $k = 3$.) El símbolo $\binom{n}{k}$ se utiliza en álgebra para denotar la operación descrita por la ecuación (B-32) y se lee "la combinación de n cosas tomadas k a la vez". Por tanto, la probabilidad de obtener una palabra de n bits que contenga k 1 binarios es

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \tag{B–33}$$

Si la variable aleatoria x denota estos valores discretos, entonces $x = k$, donde k puede tomar los valores de 0, 1, 2, . . . , n, y se obtiene la *PDF binomial*

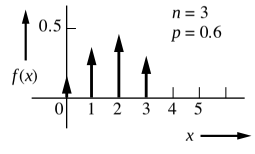
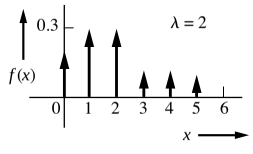
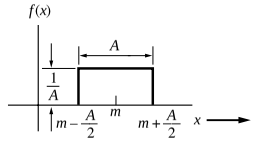
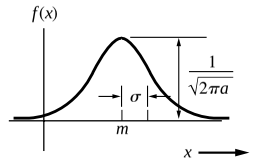
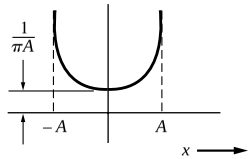
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} P(k)\delta(x-k) \tag{B–34}$$

donde $P(k)$ se obtiene de la ecuación (B-33).

El concepto *binomial* viene del hecho de que $P(k)$ son los términos individuales en una expansión binomial. Es decir, sea $q = 1 - p$, se obtiene

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} P(k) \tag{B–35}$$

TABLA B–1 ALGUNAS DISTRIBUCIONES Y SUS PROPIEDADES

Nombre de la distribución	Tipo	Diagrama de la PDF	Ecuación para: Función de distribución acumulativa (CDF)	Ecuación para: Función de densidad de probabilidad (PDF)	Media	Varianza
Binomial	Discreta		$F(a) = \sum_{\substack{k=0 \\ m \le a}}^{m} P(k)$ donde $P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$f(x) = \sum_{k=0}^{n} P(k)\,\delta(x-k)$ donde $P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson	Discreta		$F(a) = \sum_{\substack{k=0 \\ m \le a}}^{m} P(k)$ donde $P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k)\,\delta(xk)$ donde $P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
Uniforme	Continua		$F(a) = \begin{cases} 0, & a < \left(\frac{2m-A}{2}\right) \\ \frac{1}{A}\left[a - \left(\frac{2m-A}{2}\right)\right], & \lvert a-m\rvert \le \frac{A}{2} \\ 1, & a \ge \left(\frac{2m-A}{2}\right) \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 0, & x < \left(\frac{2m-A}{2}\right) \\ \frac{1}{A}, & \lvert x-m\rvert \le \frac{A}{2} \\ 0, & x > \left(\frac{2m+A}{2}\right) \end{cases}$	m	$\frac{A^2}{12}$
Gaussiana	Continua		$F(a) = Q\left(\frac{m-a}{\sigma}\right)$ donde $Q(\sigma) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-(x-m)^2/2\sigma^2]$	m	σ^2
Sinusoidal	Continua		$F(a) = \begin{cases} 0, & a \le -A \\ \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{a}{A}\right)\right], & \lvert a\rvert \le A \\ 1, & a \ge A \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -A \\ \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}, & \lvert x\rvert \le A \\ 0, & x > A \end{cases}$	0	$\frac{A^2}{2}$

La combinación $\binom{n}{k}$, los cuales también son los coeficientes binomiales, se pueden evaluar ocupando el triángulo de Pascal:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
n = 0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n = 1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n = 2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n = 3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n = 4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n = 5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\vdots & & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Para un valor en particular de n, las combinaciones $\binom{n}{k}$, para $k = 0, 1, \ldots, n$, son los elementos en el n-ésimo renglón. Por ejemplo, para $n = 3$,

$$\binom{3}{0} = 1, \quad \binom{3}{1} = 3, \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \text{y} \quad \binom{3}{3} = 1$$

El valor de la media de la distribución binomial se evalúa mediante la ecuación (B-23):

$$m = \bar{x} = \sum_{k=0}^{n} x_k P(x_k) = \sum_{k=0}^{n} kP(k)$$

o

$$m = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{B–36}$$

Empleando la identidad

$$k\binom{n}{k} = \frac{kn!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$$
$$= n\left[\frac{(n-1)!}{((n-1)(k-1))!(k-1)!}\right]$$

o

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} \tag{B–37}$$

se tiene que

$$m = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} \tag{B–38}$$

Cambiando el índice, sea $j = k - 1$. Por tanto,

$$m = \sum_{j=0}^{n-1} n\binom{n-1}{j} p^{j+1} q^{n-(j+1)}$$
$$= np\left[\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} p^j q^{(n-1)-j}\right] = np\left[(p+q)^{n-1}\right] \tag{B–39}$$

Recordando que p y q son probabilidades y que $p + q = 1$, se observa que $(p + q)^{n-1} = 1$. Por lo tanto, la ecuación (B-39) se reduce a

$$m = np \tag{B–40}$$

De la misma manera, se puede mostrar que la varianza es $np(1 - p)$ usando $\sigma^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$.

Distribución de Poisson

La distribución de Poisson (tabla B-1) se obtiene como una aproximación limitante de una distribución binomial cuando n es muy grande y p es muy pequeña, pero el producto $np = \lambda$ es de algún valor razonable [Thomas, 1969].

Distribución uniforme

La distribución uniforme es

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < \left(\dfrac{2m - A}{2}\right) \\ \dfrac{1}{A}, & |x - m| \le \dfrac{A}{2} \\ 0, & x > \left(\dfrac{2m + A}{2}\right) \end{cases} \tag{B–41}$$

donde A es el valor pico a pico de la variable aleatoria. Esto se ilustra mediante el diagrama que se muestra en la tabla B-1. La media de esta distribución es

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{m-(A/2)}^{m+(A/2)} x\, \frac{1}{A}\, dx = m \tag{B–42}$$

y la varianza es

$$\sigma^2 = \int_{m-(A/2)}^{m+(A/2)} (x - m)^2\, \frac{1}{A}\, dx \tag{B–43}$$

Cambiando variables, sea $y = x - m$:

$$\sigma^2 = \frac{1}{A} \int_{-A/2}^{A/2} y^2\, dy = \frac{A^2}{12} \tag{B–44}$$

La distribución uniforme es útil en la descripción del ruido de cuantización que se genera cuando una señal analógica se convierte a una señal PCM, como se discute en el capítulo 3. En el capítulo 6 se muestra que ésta también describe al ruido a la salida de un detector de fase cuando la entrada es ruido gaussiano, como se explica a continuación.

Distribución gaussiana

La distribución gaussiana, también conocida como *distribución normal*, es una de las más importantes, si no es que la distribución *más* importante. Como se discute en el capítulo 5, el ruido térmico tiene una distribución gaussiana. Muchos otros fenómenos pueden describirse mediante la estadísticas

gaussianas, y los matemáticos han desarrollado teoremas basados en ellas. La distribución gaussiana es muy importante en el análisis tanto de problemas de comunicación como estadísticos, y es factible mostrar que se puede obtener como la forma limitante de la distribución binomial cuando n se vuelve muy grande, mientras se mantenga la media $m = np$ finita, y si se considera que la varianza $\sigma^2 = np(1-p)$ sea mucho más grande que la unidad [Feller, 1957□Papoulis, 1984].

DEFINICIÓN. La distribución gaussiana es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)} \tag{B–45}$$

donde m es la media y σ^2 la varianza.

La figura B-5 presenta un diagrama de la ecuación (B-45), junto a la CDF para la variable aleatoria gaussiana donde $m = 1.25$ y $\sigma = 0.25$. La PDF gaussiana es simétrica alrededor de $x = m$, donde el área bajo la PDF es de $\frac{1}{2}$ para $(-\infty \le x \le m)$ y $\frac{1}{2}$ para $(m \le x \le \infty)$. El valor pico de la PDF es de $1/(\sqrt{2\pi}\,\sigma)$, así que conforme $\sigma \to 0$, la PDF gaussiana se lleva hasta una función δ ubicada en $x = m$, debido a que el área bajo la PDF es siempre igual a la unidad.

A continuación se mostrará que la ecuación (B-45) está adecuadamente normalizada, es decir que el área bajo $f(x)$ es igual a la unidad. Esto se puede lograr si se considera que I representa la integral de la PDF:

$$I \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}\,dx \tag{B–46}$$

Cambiando variables, sea $y = (x-m)/\sigma$. Entonces,

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}(\sigma\,dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy \tag{B–47}$$

Se puede mostrar que la integral I es igual a la unidad si se muestra que I^2 es igual a la unidad:

$$\begin{aligned} I^2 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,dy\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx\,dy \end{aligned} \tag{B–48}$$

Cambie las variables de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. Sea $r^2 = x^2 + y^2$, y sea $\theta = \tan^{-1}(y/x)$□entonces,

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r\,dr\right] d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = 1 \tag{B–49}$$

Por lo tanto, $I^2 = 1$ y, en consecuencia, $I = 1$.

Hasta ahora se ha *asumido* que los parámetros m y σ^2 de la ecuación (B-45) fueron la media y la varianza de la distribución. Se necesita *mostrar* que esto es así, lo cual es posible si se escribe la forma gaussiana en términos de algunos parámetros arbitrarios α y β:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\beta} e^{-(x-\alpha)^2/(2\beta^2)} \tag{B–50}$$

Esta función continúa adecuadamente normalizada, como se demostró mediante la ecuación (B-49). Primero se requiere mostrar que el parámetro α es la media:

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \beta} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-\alpha)^2/(2\beta^2)}\, dx \tag{B–51}$$

Cambiando variables, sea $y = (x - \alpha)/\beta$, entonces,

$$m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\beta y + \alpha)\, e^{-y^2/2}\, dy$$

o

$$m = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (y e^{-y^2/2})\, dy + \alpha \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-y^2/2}\, dy \right) \tag{B–52}$$

La primera integral a la derecha de la ecuación (B-52) es cero, ya que el término en la integral es una función impar, y la integral se evalúa a través de límites simétricos. La segunda integral a la derecha es la integral de una PDF gaussiana adecuadamente normalizada, así que la integral tiene un valor igual a la unidad. Por lo tanto, la ecuación (B-52) se convierte en

$$m = \alpha \tag{B–53}$$

y se demuestra que el parámetro α es la media.

La varianza es

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2\, f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \beta} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 e^{-(x-m)^2/(2\beta^2)}\, dx \end{aligned} \tag{B–54}$$

De la misma manera, se requiere demostrar que $\sigma^2 = \beta^2$. Esto se dejará como un problema de tarea.

La siguiente pregunta a responder es: "¿Cuál es la CDF para la distribución gaussiana?"

Teorema. *La función de distribución acumulativa (CDF) para la distribución gaussiana es*

$$F(a) = Q\left(\frac{m - a}{\sigma}\right) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{m - a}{\sqrt{2}\,\sigma}\right) \tag{B–55}$$

donde la función Q se define como

$$Q(z) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z}^{\infty} e^{-\lambda^2/2}\, d\lambda \tag{B–56}$$

y la función de error complementaria (erfc) se define como

$$\mathrm{erfc}(z) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{z}^{\infty} e^{-\lambda^2}\, d\lambda \tag{B–57}$$

Se puede también demostrar que

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z) \tag{B–58}$$

cuando la función de error se define como

$$\operatorname{erf}(z) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\lambda^2}\, d\lambda \tag{B–59}$$

La función Q y la función de error complementaria, como se utilizan en la ecuación (B-55), resultan en la misma curva para $F(a)$. Como ninguna de las integrales correspondientes, dadas por las ecuaciones (B-56) y (B-57), pueden evaluarse en forma cerrada, se deben emplear tablas matemáticas (consulte la sección A-10, apéndice A), técnicas de integración numéricas o aproximaciones de forma cerrada para evaluarlas. La equivalencia entre ambas funciones es

$$Q(z) = \tfrac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \tag{B–60}$$

Con frecuencia, los ingenieros en comunicación prefieren usar la función Q en lugar de la erfc, ya que las soluciones a problemas escritos en términos de la función Q no requieren escribir los factores de $\frac{1}{2}$ y $1/\sqrt{2}$. Recíprocamente, la ventaja de ocupar las funciones $\operatorname{erf}(z)$ y $\operatorname{erfc}(z)$ es que son una de las funciones estándares en MATLAB y MathCAD, y también están disponibles en algunas calculadoras portátiles. Sin embargo, los libros de probabilidad y estadística a menudo presentan una tabulación de la CDF normalizada. Ésta es una tabulación de $F(a)$ para el caso de $m = 0$ y $\sigma = 1$, y es equivalente a $Q(-a)$ y $\frac{1}{2}$ erfc $(-a/\sqrt{2})$. Debido a que $Q(z)$ y $\frac{1}{2}\operatorname{erfc}(z/\sqrt{2})$ son equivalentes, se deja a su preferencia cuál de ellas utilizar. En este libro se emplea la nomenclatura de la función Q.

Demostración. Demostración de un teorema para la CDF gaussiana

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} \int_{-\infty}^{a} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}\, dx \tag{B–61}$$

Cambiando variables, sea $y = (m - x)/\sigma$:

$$F(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} \int_{\infty}^{(m-a)/\sigma} e^{-y^2/2}\, (-\sigma\, dy) \tag{B–62}$$

o

$$F(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(m-a)/\sigma}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = Q\left(\frac{m\ -\ a}{\sigma}\right) \tag{B–63}$$

De manera similar, se puede expresar $F(a)$ en términos de la función de error complementaria.

Como se mencionó anteriormente, desgraciadamente las integrales para $Q(z)$ o $\operatorname{erfc}(z)$ no pueden evaluarse en forma cerrada. Sin embargo, para valores grandes de z, se pueden obtener excelentes aproximaciones a la forma cerrada, y aplicar fácilmente técnicas de integración numéricas para valores pequeños de z. La figura B-7 muestra un gráfico de $Q(z)$ para $z \geq 0$, y en la sección A-10 se presenta una tabulación de $Q(z)$.

Un límite superior de forma cerrada relativamente simple para $Q(z)$, $z > 0$, es

$$Q(z) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ z} e^{-z^2/2}, \quad z > 0 \tag{B–64}$$

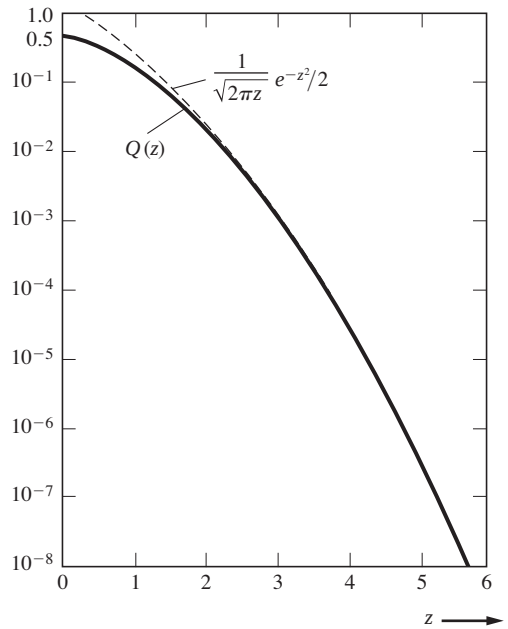


Figura B–7 La función $Q(z)$ y un sobrelímite, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\, z}\, e^{-z^2/2}$.

Esto también se muestra en la figura B-7. Se obtiene al evaluar la integral de $Q(z)$ por partes:

$$Q(z) = \int_z^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\lambda^2/2} d\lambda = \int_z^\infty u\, dv = uv \Big|_z^\infty - \int_z^\infty v\, du$$

donde $u = 1/(\sqrt{2\pi}\lambda)$ y $dv = \lambda e^{-\lambda^2/2} d\lambda$. Por lo tanto,

$$Q(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\lambda}\right)\left(-\, e^{-\lambda^2/2}\right)\Big|_z^\infty - \int_z^\infty \left(-\, e^{-\lambda^2/2}\right)\left(-\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\lambda^2}\, d\lambda\right)$$

Si se remueve la integral, la cual es una cantidad positiva, se adquiere el límite superior sobre $Q(z)$, como se obtiene de la ecuación (B-64). Si se requiere, también se puede llegar a un límite inferior [Wozencraft y Jacobs, 1965]. Una aproximación por función racional para $Q(z)$ se presenta en la sección (A-10), y una aproximación de forma cerrada tiene un error menor a 0.27□.

Para valores de $z \geq 3$, este límite superior tiene un error menor a 10□ cuando se compara con el valor real para $Q(z)$. Esto es que $Q(3) = 1.35 \times 10^{-3}$, y el límite superior tiene un valor de 1.48×10^{-3} para $z = 3$, esto es, un error de 9.4□. Para $z = 4$ el error es de 5.6□, y para $z = 5$ de 3.6□. Al evaluar la probabilidad de error para sistemas digitales, como se discute en los capítulos 6, 7 y 8, a menudo se encuentra que el resultado es una función Q. Debido a que la mayoría de los sistemas digitales útiles tiene una probabilidad de error de 10^{-3} o menor, este límite superior se vuelve muy práctico en la evaluación de $Q(z)$. De cualquier forma, si se usa la aproximación del límite superior, se sabe que el valor obtenido indica un rendimiento un poco peor de lo que es teóricamente posible. En este sentido, la aproximación dará el resultado para el peor de los casos.

Para el caso de una z negativa, la $Q(z)$ puede evaluarse mediante la siguiente identidad

$$Q(-z) = 1 - Q(z) \tag{B–65}$$

donde se ocupa el valor de Q para una z positiva, como se obtiene a partir de la figura B-7, para calcular la Q del valor negativo de z.

Distribución senoidal

TEOREMA. *Si $x = A$ sen ψ, donde ψ tiene una distribución uniforme,*

$$f_\psi(\psi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & |\psi| \le \pi \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{B–66}$$

entonces la PDF para la senoide se obtiene a partir de

$$f_x(x) = \begin{cases} 0, & x < -A \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}, & |x| \le A \\ 0, & x > A \end{cases} \tag{B–67}$$

En la sección B-8 se presentará una demostración de este teorema.

En la tabla B-1 se presenta un diagrama de la PDF para una senoide, así como las ecuaciones para la CDF y la varianza. No debe sorprender que la desviación estándar, la cual es equivalente al RMS, como se discute en el capítulo 6, es de $\sigma = A/\sqrt{2}$.

La distribución senoidal puede emplearse para modelar fenómenos observados. Por ejemplo, x puede representar un voltaje de oscilador donde $\psi = \omega_0 t + \theta_0$. En este caso la frecuencia del oscilador es f_0, y se asume que ω_0 y t son valores deterministas□θ_0 representa la fase de inicialización aleatoria del oscilador (un oscilador desincronizado funciona inicialmente con un voltaje de ruido presente en el circuito cuando se enciende su poder). En otro modelo de un oscilador, quizá el tiempo se considere una variable aleatoria uniformemente distribuida, donde $\psi = \omega_0 t$. En este caso, una vez más, se tendría una distribución senoidal para x.

B–8 TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS

Como se ilustró en la distribución senoidal previa, con frecuencia se requiere evaluar la PDF para una variable aleatoria que es una función de otra variable aleatoria cuya distribución se conoce. Lo anterior se aprecia en la figura B-8. En este caso la variable aleatoria de entrada se representa por x, y la variable aleatoria de salida por y. Debido a que se involucran varias PDF, se utilizan *subíndices* (como x en f_x) para indicar a qué variable aleatoria se asocia la PDF. Los argumentos para las PDF pueden cambiar dependiendo de las sustituciones hechas conforme se reducen las ecuaciones.

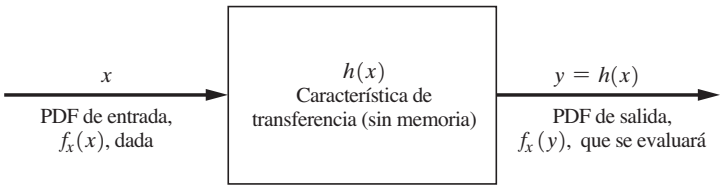


Figura B–8 Transformación de función de variables aleatorias.

TEOREMA. *Si $y = h(x)$, donde $h(\cdot)$ es la característica de salida a entrada (transferencia) del dispositivo* ***sin memoria,***[5] *entonces la PDF de la salida es*

$$f_y(y) = \sum_{i=1}^{M} \frac{f_x(x)}{|dy/dx|}\bigg|_{x=x_i=h_i^{-1}(y)} \tag{B–68}$$

donde $f_x(x)$ es la PDF de la entrada, x; M el número de raíces reales de $y = h(x)$. Es decir, la inversa de $y = h(x)$ resulta en $x_1, x_2, \ldots, x_M$ para un solo valor de y; $|\cdot|$ denota el valor absoluto, y la línea vertical la evaluación de la cantidad cuando $x = x_i = h_i^{-i}(y)$.

A continuación se desarrollarán dos ejemplos para demostrar la aplicación de este teorema y después se hará la comprobación.

Ejemplo B–5 DISTRIBUCIÓN SENOIDAL

Sea

$$y = h(x) = A \operatorname{sen} x \tag{B–69}$$

donde x está uniformemente distribuido desde $-\pi$ a π, como se obtiene de la ecuación (B-66). Esto se ilustra en la figura B-9. Para un valor dado de y, por ejemplo $-A < y_0 < A$, existen dos posibles valores inversos para x, en otras palabras, x_1 y x_2, como se muestra en la figura. Por lo tanto, $M = 2$, siempre y cuando $|y| < A$. De otra manera, $M = 0$. Evaluando la derivada de la ecuación (B-69) se obtiene que

$$\frac{dy}{dx} = A \cos x$$

y para $0 \leq y \leq A$ se tiene que

$$x_1 = \operatorname{Sen}^{-1}\left(\frac{y}{A}\right)$$

y

$$x_2 = \pi - x_1$$

donde la mayúscula S en $\operatorname{Sen}^{-1}(\square)$ denota el ángulo principal. Se obtiene un resultado similar para $-A \leq y \leq 0$. Empleando la ecuación (B-68) se encuentra que la PDF para y es

[5] No debe confundirse la característica de salida a entrada $h(x)$ con la respuesta de impulso de una red lineal, la cual se representa mediante $h(t)$.

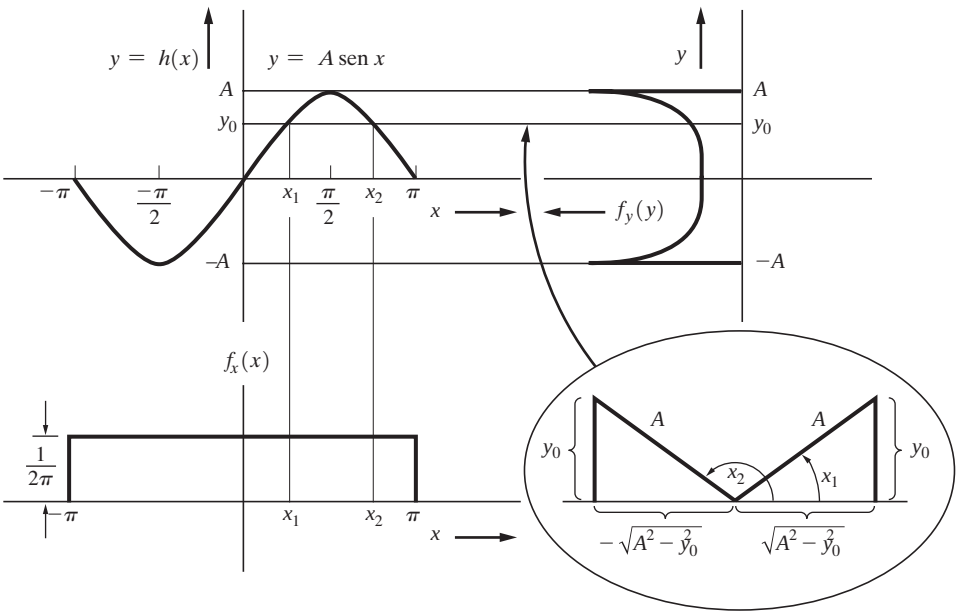


Figura B–9 Evaluación de la PDF de una senoide (ejemplo B-5).

$$f_y(y) = \begin{cases} \dfrac{f_x(x_1)}{|A\cos x_1|} + \dfrac{f_x(x_2)}{|-A\cos x_2|}, & |y| \le A \\ 0, & y \text{ en cualquier otro caso} \end{cases} \tag{B–70}$$

Los denominadores de estos dos términos se evalúan con la ayuda de los triángulos mostrados con detalle en la figura B-9. Usando este resultado y sustituyendo la PDF uniforme para $f_x(x)$, la ecuación (B-70) se convierte en

$$f_y(y) = \begin{cases} \dfrac{1/2\pi}{|\sqrt{A^2 - y^2}|} + \dfrac{1/2\pi}{|-\sqrt{A^2 - y^2}|}, & |y| \le A \\ 0, & y \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

o

$$f_y(y) = \begin{cases} 0, & y < -A \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2 - y^2}}, & |y| \le A \\ 0, & y > A \end{cases} \tag{B–71}$$

la cual es la PDF para una senoide, como se obtuvo primero de la ecuación (B-67). Este resultado es intuitivamente obvio, ya que se puede observar que la forma de onda senoidal pasa la mayor parte de su tiempo cerca de sus valores pico, y pasa relativamente rápido por cero. Por lo tanto, la PDF deberá tener sus valores pico en $+A$ y $-A$ V.

Ejemplo B–6 PDF DE SALIDA PARA LA CARACTERÍSTICA DE UN DIODO

Suponga que una característica de corriente y voltaje de diodo se modela mediante la característica ideal que se muestra en la figura B-10, donde y es la corriente a lo largo del diodo y x el voltaje a través del diodo. Este tipo de característica también se conoce como *rectificación lineal de onda media*.

$$y = \begin{cases} Bx, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \tag{B–72}$$

donde $B > 0$. Para $y > 0$, $M = 1$, y para $y < 0$, $M = 0$. Sin embargo, si $y = 0$, existe un número infinito de raíces para x (es decir, toda $x \leq 0$). Como consecuencia, existirá un punto discreto en $y = 0$ si el área bajo $f_x(x)$ es diferente de cero para $x \leq 0$ (es decir, para todos los valores de x que están asignados a $y = 0$). Utilizando la ecuación (B-68) se tiene que

$$f_y(y) = \left\{ \begin{cases} \dfrac{f_x(y/B)}{B}, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \right\} + P(y = 0)\,\delta(y) \tag{B–73}$$

donde

$$P(y = 0) = P(x \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} f_x(x)\,dx = F_x(0) \tag{B–74}$$

Suponga que x tiene una distribución gaussiana con una media de cero□entonces estas ecuaciones se reducen a

$$f_y(y) = \left\{ \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}B\sigma}\, e^{-y^2/(2B^2\sigma^2)}, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \right\} + \tfrac{1}{2}\,\delta(y) \tag{B–75}$$

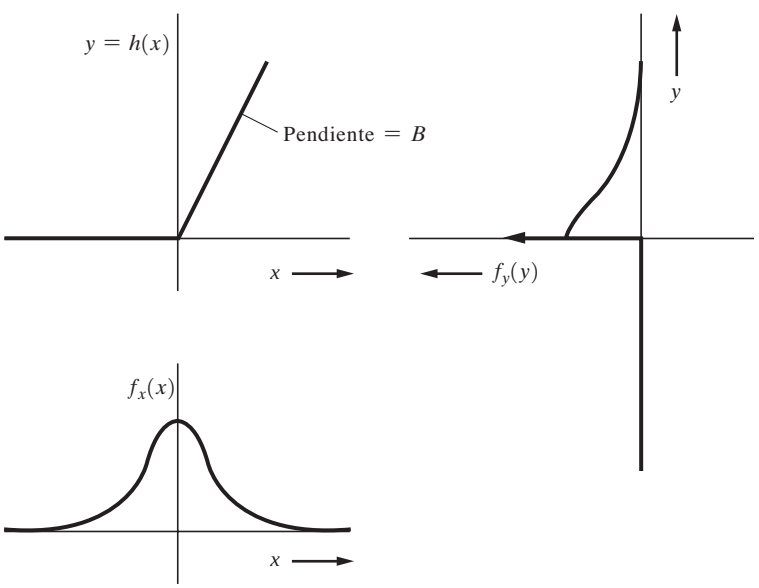


Figura B–10 Evaluación de la PDF de salida de la característica de un diodo para el ejemplo B-6.

En la figura B-10 se muestra un diagrama para este resultado. Para $B = 1$ note que la salida es la misma que la entrada para una x positiva (es decir, $y = x > 0$), así que la PDF de la salida es la misma que la PDF de la entrada para $y > 0$. Para $x < 0$, los valores de x se asignan al punto $y = 0$, así que la PDF de y contiene una función δ con ponderación de $\frac{1}{2}$ en el punto $y = 0$.

Demostración. Se demostrará que la ecuación (B-68) es válida al seccionar el eje x en intervalos sobre los cuales $h(x)$ aumenta monotónicamente, disminuye monotónicamente o es una constante. Como se observó en el ejemplo B-6, cuando $h(x)$ es una constante sobre algún intervalo de x, es posible un punto discreto en y igual a dicha constante. Además, los puntos discretos en la distribución de x se asignarán a puntos discretos en y, aun en las regiones donde $h(x)$ no es una constante.

A continuación se demostrará que el teorema, como se describe en la ecuación (B-68), es correcto si se toma el caso, por ejemplo, cuando $y = h(x)$ disminuye monotónicamente para $x < x_0$ y aumenta monotónicamente para $x > x_0$. Esto se ilustra en la figura B-11. La CDF para y es entonces

$$\begin{aligned} F_y(y_0) &= P(y \leq y_0) = P(x_1 \leq x \leq x_2) \\ &= P[(x = x_1) + (x_1 < x \leq x_2)] \end{aligned} \tag{B–76}$$

donde el signo + denota la operación de unión. Entonces, empleando la ecuación (B-4), se tiene que

$$F_y(y_0) = P(x_1) + P(x_1 < x \leq x_2)$$

o

$$F_y(y_0) = P(x_1) + F_x(x_2) - F_x(x_1) \tag{B–77}$$

La PDF de y se obtiene tomando la derivada de ambos lados de esta ecuación:

$$\frac{dF_y(y_0)}{dy_0} = \frac{dF_x(x_2)}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_0} - \frac{dF_x(x_1)}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_0} \tag{B–78}$$

donde $dP(x_1)/dy_0 = 0$ debido a que $P(x_i)$ es una constante. □a que

$$dF_x(x_2)/dx_2 = f_x(x_2) \qquad \text{y} \qquad dF_x(x_1)/dx_1 = f_x(x_1)$$

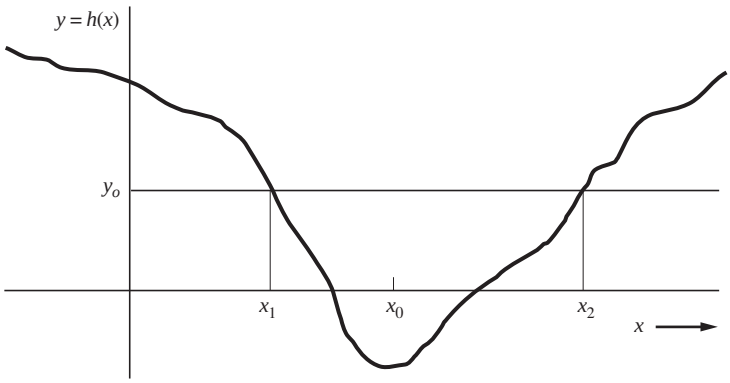


Figura B–11 Ejemplo de una función $h(x)$ que disminuye monotónicamente para $x < x_0$ y aumenta monotónicamente para $x > x_0$.

la ecuación (B-98) se convierte en

$$f_y(y_0) = \frac{f_x(x_2)}{dy_0/dx_2} + \frac{f_x(x_1)}{-\,dy_0/dx_1} \tag{B–79}$$

En el punto $x = x_1$, la pendiente de y es negativa debido a que la función disminuye monotónicamente para $x < x_0$ por lo tanto, $dy_0/dx_1 < 0$ y la ecuación (B-79) se convierte en

$$f_y(y_0) = \sum_{i=1}^{M=2} \frac{f_x(x)}{|dy_0/dx|}\bigg|_{x=x_i=h_i^{-1}(y_0)} \tag{B–80}$$

Este procedimiento se puede extender cuando existen más de dos intervalos durante los cuales $h(x)$ aumenta o disminuye monotónicamente para obtener la ecuación (B-68).

Concluyendo esta discusión sobre la transformación de función de una variable aleatoria, debe enfatizarse que la descripción de la función de asignación $y = h(x)$ asume que la salida y, en cualquier instante, depende del valor de la entrada x sólo en ese mismo instante y no en los valores previos (o futuros) de x. Por lo tanto, esta técnica es aplicable a dispositivos que no contienen elementos con memoria (es decir, sin inductancia ni capacitancia) no obstante, el dispositivo puede ser no lineal como se ha visto en los ejemplos anteriores.

B–9 ESTADÍSTICAS MULTIVARIANTES

En la sección B-3 se definieron las probabilidades simples, las conjuntas y las condicionales, así como los eventos. En las secciones B-4 y B-5, utilizando la probabilidad de eventos simples, se desarrollaron los conceptos de PDF y CDF, mismas que involucraron sólo una variable aleatoria, así que estos son problemas unidimensionales. De la misma manera, los momentos involucraron sólo integración unidimensional.

En esta sección se desarrollarán problemas multidimensionales, llamados también *estadísticas multivariantes*, que involucran PDF y CDF asociadas a las probabilidades de eventos de intersección y con probabilidades condicionales. Además se obtendrán momentos multidimensionales como una extensión de los momentos unidimensionales que se estudiaron en la sección B-6. *Si el lector entiende claramente el caso unidimensional* (desarrollado en las secciones anteriores)*, tendrá poca dificultad en generalizar dichos resultados al caso N-dimensional.*

CDF y PDF multivariantes

DEFINICIÓN. La *CDF N-dimensional* es

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_N) = P[(x_1 \le a_1)(x_2 \le a_2) \cdots (x_N \le a_N)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n_{(x_1 \le a_1)\,(x_2 \le a_2) \cdots (x_N \le a_N)}}{n} \right] \tag{B–81}$$

donde la nomenclatura de $(x_1 \le a_1)(x_2 \le a_2) \cdots (x_N \le a_N)$ es el evento de intersección que consiste en la intersección de los eventos asociados con $x_1 \le a_1$, $x_2 \le a_2$, etcétera.

DEFINICIÓN. La *PDF N-dimensional* es

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \left.\frac{\partial^N F(a_1, a_2, \ldots, a_N)}{\partial a_1 \partial a_2 \ldots \partial a_N}\right|_{\mathbf{a}=\mathbf{x}} \tag{B–82}$$

donde **a** y **x** son los vectores renglón, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$, y $\mathbf{x} = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$.

DEFINICIÓN. El valor esperado de $y = h(\mathbf{x})$ es

$$\overline{[y]} = \overline{h(x_1, x_2, \ldots, x_N)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

$$\times f(x_1, x_2, \ldots, x_N)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_N \tag{B–83}$$

Algunas *propiedades* de las variables aleatorias *N*-dimensionales son

1. $f(x_1, x_2, \ldots, x_N) \geq 0$ (B–84a)

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_N)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_N = 1$ (B–84b)

3. $F(a_1, a_2, \ldots, a_N)$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{-\infty}^{a_1+\varepsilon}\int_{-\infty}^{a_2+\varepsilon}\ldots\int_{-\infty}^{a_N+\varepsilon} f(x_1, x_2, \ldots, x_N)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_N \tag{B–84c}$$

4. $F(a_1, a_2, \ldots, a_N) \equiv 0$ si *cualquier* $a_i = -\infty, \quad i = 1, 2, \ldots, N$ (B–84d)

5. $F(a_1, a_2, \ldots, a_N) = 1$ cuando *toda* $a_i = +\infty, \quad i = 1, 2, \ldots, N$ (B–84e)

6. $P[(a_1 < x_1 \leq b_1)(a_2 < x_2 \leq b_2) \cdots (a_N < x_N \leq b_N)]$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{a_1+\varepsilon}^{b_1+\varepsilon}\int_{a_2+\varepsilon}^{b_2+\varepsilon}\ldots\int_{a_N+\varepsilon}^{b_N+\varepsilon} f(x_1, x_2, \ldots, x_N)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_N \tag{B–84f}$$

Las definiciones y propiedades para las PDF y CDF multivariantes se basan en los conceptos de probabilidades conjuntas, como se discutieron en la sección B-3. Las PDF y CDF condicionales pueden obtenerse de una manera similar [Papoulis, 1984]. Usando la propiedad de $P(AB) = P(A)P(B|A)$ de la ecuación (B-8) se encuentra que la PDF conjunta de x_1 y x_2 es

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)\, f(x_2|x_1) \tag{B–85}$$

donde $f(x_2|x_1)$ es la PDF condicional de x_2 dada x_1. Generalizando aún más se obtiene que

$$f(x_1, x_2|x_3) = f(x_1|x_3)\, f(x_2|x_1, x_3) \tag{B–86}$$

Deben también ser aparentes muchas otras expresiones para las relaciones entre PDF multidimensionales. Cuando x_1 y x_2 son *independientes*, $f(x_2|x_1) = f_{x_2}(x_2)$ y

$$f_{\mathbf{x}}(x_1, x_2) = f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2) \tag{B–87}$$

donde el subíndice x_1 denota la PDF asociada con x_1, y el subíndice x_2 la PDF asociada con x_2. Para N variables aleatorias independientes, esto se convierte en

$$f_{\mathbf{x}}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2) \cdots f_{x_N}(x_N) \tag{B–88}$$

TEOREMA. *Si la PDF de N-ésima dimensión de x no es conocida, entonces la PDF de L-ésima dimensión de x puede obtenerse cuando $L < N$ mediante*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_L) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty}}_{N-L \text{ integrales}} f(x_1, x_2, \ldots, x_N)\, dx_{L+1}\, dx_{L+2} \cdots dx_N \tag{B–89}$$

Esta PDF de L-ésima dimensión, donde $L < N$, es a veces llamada ***PDF marginal****, ya que se obtiene a partir de una PDF de mayor orden dimensional (N-ésima).*

Demostración. Muestre primero que este resultado es correcto si $N = 2$ y $L = 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) f(x_2|x_1)\, dx_2$$

$$= f(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} f(x_2|x_1)\, dx_2 = f(x_1) \tag{B–90}$$

ya que el área bajo $f(x_2|x_1)$ es igual a la unidad. Este procedimiento se extiende fácilmente para demostrar el caso de L-ésima dimensión de la ecuación (B-89).

Estadísticas bivariantes

Las distribuciones bivariantes (o conjuntas) son el caso cuando $N = 2$ dimensiones. En esta sección se emplearán definiciones antes vistas para evaluar momentos de dos dimensiones. Como se muestra en el capítulo 6, las estadísticas bivariantes tienen aplicaciones muy importantes en los problemas de ingeniería eléctrica□por tanto, se estudiarán algunas definiciones adicionales.

DEFINICIÓN. La *correlación* (o *media conjunta*) de x_1 y x_2 es

$$m_{12} = \overline{x_1 x_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \tag{B–91}$$

DEFINICIÓN. Se dice que las dos variables aleatorias x_1 y x_2 *no están correlacionadas* si

$$m_{12} = \overline{x_1 x_2} = \overline{x_1}\ \overline{x_2} = m_1 m_2 \tag{B–92}$$

Si x_1 y x_2 son independientes, resulta que tampoco están correlacionadas, pero lo recíproco generalmente no es verdadero. No obstante, como se observará, lo recíproco es verdadero para las variables aleatorias gaussianas bivariantes.

DEFINICIÓN. Se dice que dos variables aleatorias son *ortogonales* si

$$m_{12} = \overline{x_1 x_2} \equiv 0 \tag{B–93}$$

Note la similitud de la definición de variables aleatorias ortogonales con la de las funciones ortogonales dada por la ecuación (2-73).

DEFINICIÓN. La *covarianza* es

$$\begin{aligned} u_{11} &= \overline{(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_1)(x_2 - m_2) f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \end{aligned} \tag{B–94}$$

Debe quedar claro que si x_1 y x_2 son independientes, la covarianza es cero (y x_1 y x_2 no están correlacionadas). Lo recíproco generalmente no es verdadero, pero sí es verdadero para el caso de variables aleatorias gaussianas bivariantes.

DEFINICIÓN. El *coeficiente de correlación* es

$$\rho = \frac{u_{11}}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\overline{(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}}{\sqrt{\overline{(x_1 - m_1)^2}}\sqrt{\overline{(x_2 - m_2)^2}}} \tag{B–95}$$

Esto también se conoce como *covarianza normalizada*. El coeficiente de correlación siempre está dentro del rango

$$-1 \leq \rho \leq +1 \tag{B–96}$$

Por ejemplo, suponga que $x_1 = x_2$, entonces $\rho = +1$. Si $x_1 = -x_2$, entonces $\rho = -1$, y si x_1 y x_2 son independientes, $\rho = 0$. Por lo tanto, el coeficiente de correlación indica, en promedio, qué tan probable es que el valor x_1 sea proporcional al valor para x_2. Este tema se discute con mayor detalle en el capítulo 6, donde estos resultados se extienden para incluir procesos aleatorios (funciones de tiempo). En ese caso, la dependencia del valor de una forma de onda a cierto tiempo se compara con el valor de una forma de onda que ocurre a otro tiempo. Esto añadirá el concepto de respuesta en frecuencia al problema.

Distribución gaussiana bivariante

Un buen ejemplo de distribución conjunta $(N = 2)$ que es de gran importancia es la distribución gaussiana bivariante. La PDF gaussiana bivariante es

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]} \tag{B–97}$$

donde σ_1^2 es la varianza de x_1, σ_2^2, la varianza de x_2, m_1 es la media de x_1 y m_2 la media de x_2. Si se examina la ecuación (B-97) se observa que si $\rho = 0$, entonces $f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2)$, donde $f(x_1)$ y $f(x_2)$ son las PDF unidimensionales de x_1 y x_2. Por lo tanto, si las variables aleatorias *gaussianas* bivariantes no están correlacionadas, lo cual implica que $\rho = 0$, entonces son independientes.

La figura B-12 muestra un dibujo de la PDF gaussiana bivariante (unidimensional).

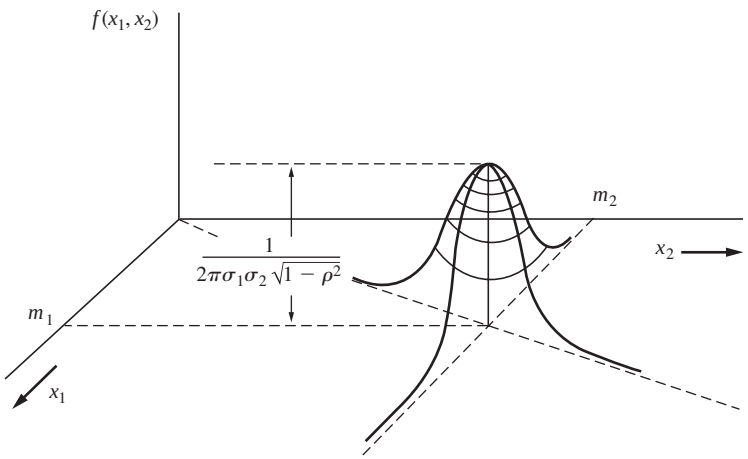


Figura B–12 PDF gaussiana bivariante.

Transformación de función multivariante

A continuación se generalizará la sección B-8 para el caso multivariante. Considerando la figura B-13, se obtiene la PDF para $\mathbf{y}$, denotada por $f_y(\mathbf{y})$ en términos de la PDF para $\mathbf{x}$, denotada por $f_x(\mathbf{x})$.

TEOREMA. *Sea* $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$ *la característica de transferencia de un dispositivo (sin memoria) que tiene N entradas, representadas por* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$*; N salidas, representadas por* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$*; y* $y_i = h_i(\mathbf{x})$*. Es decir,*

$$\begin{aligned} y_1 &= h_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) \\ y_2 &= h_2(x_1, x_2, \ldots, x_N) \\ &\vdots \\ y_N &= h_N(x_1, x_2, \ldots, x_N) \end{aligned} \tag{B–98}$$

Aún más, sean $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, M$ *las raíces reales (vectores) de la ecuación* $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$*. La PDF de la salida es entonces*

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{M} \frac{f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})}{|J(\mathbf{y}/\mathbf{x})|}\bigg|_{\mathbf{x} = \mathbf{x}_i = \mathbf{h}_i^{-1}(\mathbf{y})} \tag{B–99}$$

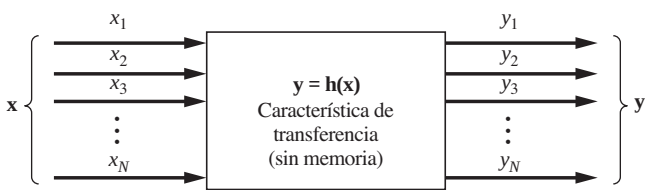


Figura B–13 Transformación de función multivariante de variables aleatorias.

donde $|\cdot|$ *denota la operación de valor absoluto y* $J(\mathbf{y}/\mathbf{x})$ *es el jacobiano de la transformación de coordenadas de* $\mathbf{y}$ *a partir de* $\mathbf{x}$. *El jacobiano se define como*

$$J\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}\right) = \text{Det}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_1(\mathbf{x})}{\partial x_N} \\ \dfrac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_2(\mathbf{x})}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial h_N(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_N(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_N(\mathbf{x})}{\partial x_N} \end{bmatrix} \tag{B–100}$$

donde $\text{Det}[\cdot]$ *denota el determinante de la matriz* $[\cdot]$.

No se demostrará este teorema, pero debe quedar claro que es una generalización del teorema para el caso unidimensional que se estudió en la sección B-8. La transformación de coordenadas relaciona diferenciales en un sistema de coordenadas con las de otro sistema [Thomas, 1969]:

$$dy_1\ dy_2\ \cdots\ dy_N = J\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}\right) dx_1\ dx_2\ \cdots\ dx_N \tag{B–101}$$

Ejemplo B–7 PDF PARA LA SUMA DE DOS VARIABLES ALEATORIAS

Suponga que se tiene una configuración de circuitos (como un amplificador operacional) que suma dos entradas, x_1 y x_2, para producir la salida

$$y = A(x_1 + x_2) \tag{B–102}$$

donde A es la ganancia del circuito. Suponga que $f(x_1, x_2)$ es conocida y que se desea obtener una fórmula para la PDF de la salida en términos de la PDF conjunta para las entradas.

Se puede emplear el teorema descrito por la ecuación (B-99) para resolver este problema. Sin embargo, para dos entradas se requieren dos salidas para satisfacer las suposiciones del teorema. Esto se logra mediante la definición de una variable auxiliar para la salida, por ejemplo y_2. Por tanto,

$$y_1 = h_1(\mathbf{x}) = A(x_1 + x_2) \tag{B–103}$$

$$y_2 = h_2(\mathbf{x}) = Ax_1 \tag{B–104}$$

La opción de cuál ecuación ocupar para la variable auxiliar, ecuación (B-104), no es importante, siempre y cuando sea independiente de tal forma que el determinante, $J(\mathbf{y}/\mathbf{x})$, no sea cero. Sin embargo, la ecuación a menudo se selecciona para simplificar las matemáticas resultantes. Utilizando las ecuaciones (B-103) y (B-104) se tiene que

$$J = \text{Det}\begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix} = -A^2 \tag{B–105}$$

Sustituyendo ésta dentro de la ecuación (B-99) resulta en

$$f_{\mathbf{y}}(y_1, y_2) = \left.\frac{f_x(x_1, x_2)}{|-A^2|}\right|_{x\,=\,h^{-1}(\mathbf{y})}$$

o

$$f_{\mathbf{y}}(y_1, y_2) = \frac{1}{A^2} f_x\left(\frac{y_2}{A}, \frac{1}{A}(y_1 - y_2)\right) \tag{B–106}$$

Se desea encontrar una fórmula para $f_{y_1}(y_1)$, ya que $y_1 = A(x_1 + x_2)$. Esto se obtiene al evaluar la PDF marginal a partir de la ecuación (B-106).

$$f_{y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{y}}(y_1, y_2)\, dy_2$$

o

$$f_{y_1}(y_1) = \frac{1}{A^2} \int_{-\infty}^{\infty} f_x\left(\frac{y_2}{A}, \frac{1}{A}(y_1 - y_2)\right) dy_2 \tag{B–107}$$

Este resultado general relaciona la PDF de $y = y_1$ con la PDF conjunta de $\mathbf{x}$, donde $y = A(x_1 + x_2)$. Si x_1 y x_2 son *independientes* y $A = 1$, entonces la ecuación (B-107) se convierte en

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_1}(\lambda) f_{x_2}(y - \lambda)\, d\lambda$$

o

$$f(y) = f_{x_1}(y) * f_{x_2}(y) \tag{B–108}$$

donde * denota la operación de convolución. De manera similar, si se realiza una suma de N variables aleatorias independientes, la PDF para la suma es la $(N - 1)$-ésima convolución de las PDF unidimensionales para las N variables aleatorias.

Teorema del límite central

Si se tiene la suma de un número de variables aleatorias independientes con PDF unidimensionales arbitrarias, el *teorema del límite central* establece que la PDF para dicha suma se aproxima a una distribución gaussiana (normal) bajo condiciones muy generales. Hablando estrictamente, el teorema del límite central no se cumple para la PDF si las variables aleatorias independientes están discretamente distribuidas. En este caso, la PDF para la suma consistirá en funciones delta (no gaussianas, que son continuas); sin embargo, si estas funciones delta se "borran" (por ejemplo, si se reemplazan con rectángulos que tienen áreas correspondientes), entonces la PDF resultante será aproximadamente gaussiana. De cualquier manera, la función de distribución acumulativa (CDF) para la suma se aproximará a una CDF gaussiana.

El teorema del límite central se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo B–8 PDF PARA LA SUMA DE TRES VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES Y UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDAS

El teorema del límite central se mostrará evaluando la PDF exacta para la suma de tres variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas. Este resultado exacto se comparará con la PDF gaussiana, como se puede predecir a partir del teorema del límite central.

Sea que cada variable aleatoria independiente x_i tenga una distribución uniforme, como se muestra en la figura B-14a. La PDF para $y_1 = x_1 + x_2$, denotada por $f(y_1)$, se obtiene mediante la operación de convolución descrita en la ecuación (B-108) y la figura 2-7. Este resultado se muestra en la figura B-14b. Se observa que después de sólo una operación de convolución la PDF para la suma (la cual es un triángulo) se aproxima a una forma gaussiana. La PDF para $y_2 = x_1 + x_2 + x_3$, $f(y_2)$, se obtiene al realizar una convolución de la PDF triangular con otra PDF uniforme. El resultado es

$$f(y_2) = \begin{cases} 0, & y_2 \le -\dfrac{3}{2}A \\ \dfrac{1}{2A^3}\left(\dfrac{3}{2}A + y_2\right)^2, & -\dfrac{3}{2}A \le y_2 \le -\dfrac{1}{2}A \\ \dfrac{1}{2A^3}\left(\dfrac{3}{2}A^2 - 2y_2^2\right), & |y_2| \le \dfrac{1}{2}A \\ \dfrac{1}{2A^3}\left(\dfrac{3}{2}A - y_2\right)^2, & \dfrac{1}{2}A \le y_2 \le \dfrac{3}{2}A \\ 0, & y_2 \ge \dfrac{3}{2}A \end{cases} \tag{B–109}$$

Esta curva se grafica mediante la línea continua de la figura B-14c. Para fines de comparación también se muestra una curva gaussiana correspondiente, con $1/(\sqrt{2\pi}\,\sigma) = 3/(4A)$, mediante la línea punteada. Se observa que $f(y_2)$ es bastante parecida a la curva gaussiana para $|y_2| < \frac{3}{2}A$, como se predijo mediante el teorema del límite central. Claro que $f(y_2)$ ciertamente no es gaussiana para $|y_2| > \frac{3}{2}A$, debido a que $f(y_2) \equiv 0$ en esta región, mientras que la curva gaussiana no es igual a cero excepto en $y = \pm\infty$. Así, se aprecia que la aproximación gaussiana, como se predice con el teorema del límite central, no es muy buena en las *orillas* de la distribución. En el capítulo 7 se muestra que la probabilidad de error en bit para los sistemas digitales se obtiene evaluando el área bajo las orillas de una distribución. Si no se sabe si la distribución es gaussiana y se emplea el teorema del límite central para aproximar la distribución mediante una PDF gaussiana, los resultados a menudo no son muy exactos, como se ve en este ejemplo. No obstante, si se necesita que el área bajo la distribución esté cerca de la media, la aproximación gaussiana puede ser muy buena.

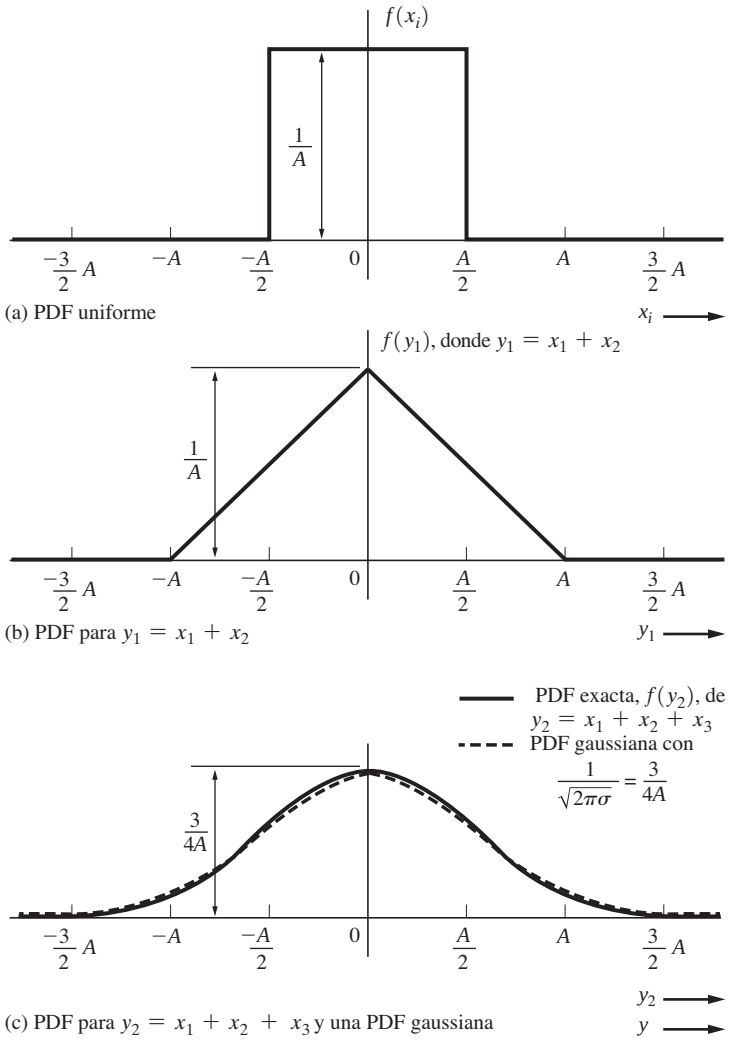


Figura B–14 Demostración del teorema del límite central (ejemplo B-8).

PROBLEMAS

★ **B–1** Un mensaje binario largo contiene 1,428 1 binarios y 2,668 0 binarios. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 binario en cualquier bit recibido?

★ **B–2** **(a)** Encuentre la probabilidad de obtener un 8 al lanzar dos dados.
(b) Halle la probabilidad de obtener un 5, un 7 o un 8 al lanzar dos dados.

B–3 Muestre que

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

★ **B–4** Se lanza un dado. La probabilidad de obtener cualquier lado es de $P(x) = \frac{1}{6}$, donde $x = k = 1, 2, 3, 4, 5,$ o 6.
(a) Encuentre la probabilidad de obtener un lado con número impar.
(b) Halle la probabilidad de obtener un 4 cuando al lanzar el dado se obtiene un lado con número par.

B–5 ¿Cuáles de las siguientes funciones satisfacen las propiedades para una PDF? ¿Por qué?

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{1 + x^2}\right)$

(b) $f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < 1 \\ 0, & x \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(8 - x), & 4 \le x \le 10 \\ 0, & x \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$

(d) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^k \delta(xk)$

B–6 Muestre que todas las funciones de distribución acumulativa deben satisfacer las propiedades dadas en la sección B-5.

B–7 Sea $f(x) = K^{-b|x|}$, donde K y b son constantes positivas. Encuentre la expresión matemática para la CDF y haga un diagrama de los resultados.

★ **B–8** Encuentre la probabilidad de que $-\frac{1}{4}A \le y_1 \le \frac{1}{4}A$ para la distribución triangular que se muestra en la figura B-14b.

B–9 Una PDF triangular se muestra en la figura B-14b.
(a) Encuentre la expresión matemática que describe la CDF.
(b) Haga un diagrama de la CDF.

B–10 Evalúe las PDF para las dos formas de onda que se muestran en la figura PB-10.

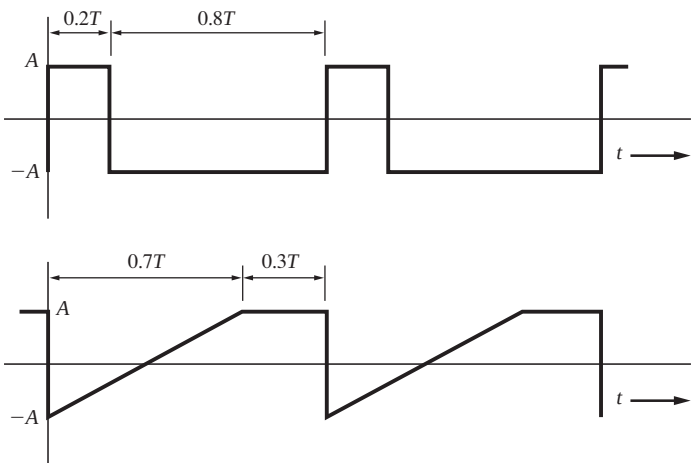


Figura PB–10

★ **B–11** Sea una PDF dada por $f(x) = Ke^{-bx}$, para $x \ge 0$, y $f(x) = 0$, para $x < 0$, donde K y b son constantes positivas.
(a) Encuentre el valor requerido para K en términos de b.
(b) Halle m en términos de b.
(c) Obtenga σ^2 en términos de b.

B–12 Una variable aleatoria x tiene una PDF

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(-x^2 + 8x12), & 2 < x < 6 \\ 0, & x \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

(a) Demuestre que $f(x)$ es una PDF válida.
(b) Halle la media.
(c) Encuentre el segundo momento.
(d) Obtenga la varianza.

B–13 Determine la desviación estándar para la distribución triangular que se muestra en la figura B-14b.

B–14 **(a)** Halle los términos en una distribución binomial para $n = 7$, donde $p = 0.5$.
(b) Haga un diagrama de la PDF para esta distribución binomial.
(c) Encuentre y haga un diagrama de la CDF para esta distribución.
(d) Determine $\overline{x^3}$ para esta distribución.

B–15 Para una distribución binomial, muestre que $\sigma^2 = np(1-p)$.

★ **B–16** Una variable aleatoria binomial x_k tiene valores de k, donde

$$k = 0, 1, \ldots, n \qquad P(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad q = 1 - p$$

Suponga que $n = 160$ y $p = 0.1$.
(a) Grafique $P(k)$.
(b) Compare el gráfico de la parte (a) con un gráfico de $P(k)$ utilizando la aproximación gaussiana

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(k-m)^2/2\sigma^2}$$

la cual es válida cuando $npq \gg 1$ y $|k - np|$ está alrededor de $\sqrt{npq}$, donde $\sigma = \sqrt{npq}$ y $m = np$.
(c) También grafique la aproximación de Poisson

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

donde $\lambda = np$, n es grande y p es pequeña.

B–17 Se recibe una orden de $n = 3{,}000$ transistores. La probabilidad de que cada transistor sea defectuoso es de $p = 0.001$. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de transistores defectuosos en el lote sea de 6 o menor? (*Nota:* la aproximación de Poisson es válida cuando n es grande y p es pequeña.)

B–18 En un sistema de comunicación de fibra óptica se emiten fotones con una distribución de Poisson, como se describe en la tabla B-1. $m = \lambda$ es el promedio de fotones que se emiten durante un intervalo de tiempo arbitrario y $P(k)$ la probabilidad de que k fotones se emitan durante el mismo intervalo.
(a) Grafique la PDF para $\lambda = 0.5$.
(b) Grafique la CDF para $\lambda = 0.5$.
(c) Compruebe que $m = \lambda$.
(d) Muestre que $\sigma = \sqrt{\lambda}$.

B–19 Sea x una variable aleatoria que tiene una distribución laplaciana. La PDF laplaciana es $f(x) = (1/2b)\ e^{-|\,x-m\,|/b}$, donde b y m son constantes reales y $b > 0$.
(a) Encuentre la media de x en términos de b y de m.
(b) Halle la varianza de x en términos de b y de m.

B–20 Dada la PDF gaussiana

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta} e^{-(x-m)^2/(2\beta^2)}$$

muestre que la varianza de esta distribución es β^2.

★ **B–21** En un proceso de manufactura de resistencias los valores obtenidos para éstas tienen una distribución gaussiana donde el valor deseado es la media. Si se desea que 95□ de las resistencias de 1 kΩ fabricadas tengan una tolerancia de ±10□, □cuál es el valor requerido para σ?

B–22 Suponga que x tiene una distribución gaussiana. Encuentre la probabilidad de que
(a) $|x - m| < \sigma$.
(b) $|x - m| < 2\sigma$.
(c) $|x - m| < 3\sigma$.
Obtenga resultados numéricos utilizando MATLAB, MathCAD o tablas, si es necesario.

B–23 Muestre que

(a) $Q(z) = \frac{1}{2}\,\text{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$.

(b) $Q(-z) = 1 - Q(z)$.

(c) $Q(z) = \frac{1}{2}\left[1 - \text{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right]$.

B–24 Para una distribución gaussiana, muestre que

(a) $F(a) = \frac{1}{2}\,\text{erfc}\left(\frac{m - a}{\sqrt{2}\sigma}\right)$. **(b)** $F(a) = \frac{1}{2}\left[1 + \text{erfc}\left(\frac{a - m}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right]$.

B–25 Un voltaje de ruido tiene una distribución gaussiana. El RMS es de 5 V y el valor de DC es de 1.0 V. Halle la probabilidad de que el voltaje tenga valores entre –5 y +5 V.

★ **B–26** Suponga que x es una variable aleatoria gaussiana con $m = 5$ y $\sigma = 0.6$.
(a) Obtenga la probabilidad de que $x \leq 1$.
(b) Encuentre la probabilidad de que $x \leq 6$.

B–27 La variable aleatoria gaussiana x tiene una media de cero y una varianza de 2. Sea A el evento tal que $|x| < 3$.

(a) Halle una expresión para la PDF condicional $f(x|A)$.
(b) Grafique $f(x|A)$ sobre el rango de $|x| < 5$.
(c) Grafique $f(x)$ sobre el rango de $|x| < 5$ y compare estos dos gráficos.

B–28 Sea una x con distribución senoidal con una PDF como se obtiene de la ecuación (B-67). Muestre que la CDF es

$$F(a) = \begin{cases} 0, & a \leq -A \\ \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{\pi}{2} + \text{sen}^{-1}\left(\dfrac{a}{A}\right)\right], & |a| \leq A \\ 1, & a \geq A \end{cases}$$

B–29 **(a)** Si x tiene una distribución senoidal con el valor pico de $x = A$, muestre que el RMS es $\sigma = A/\sqrt{2}$. [*Sugerencia:* utilice la ecuación (B-67).]
(b) Si $x = A\cos\psi$, donde ψ está uniformemente distribuida entre $-\pi$ y $+\pi$, muestre que el RMS de x es $\sigma = A/\sqrt{2}$.

★ **B–30** Dada $y = x^2$ y sea x una variable aleatoria gaussiana con una media m y varianza σ^2, encuentre una fórmula para la PDF de y en términos de m y σ^2.

B–31 x es una variable aleatoria uniformemente distribuida sobre el rango de $-1 \leq x \leq 1$ además de un punto discreto en $x = \frac{1}{2}$ con $P(x = \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

(a) Halle una expresión matemática para la PDF para x y grafique su resultado.

(b) Encuentre la PDF para y, donde

$$y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Haga un diagrama de su resultado.

B–32 Un amplificador en saturación se modela mediante

$$y = \begin{cases} Ax_0, & x > x_0 \\ Ax, & |x| \leq x_0 \\ -Ax_0, & x < -x_0 \end{cases}$$

Suponga que x es una variable aleatoria gaussiana con una media m y varianza σ^2. Encuentre una fórmula para la PDF de y en términos de A, x_0, m y σ^2.

★ **B–33** Una senoide con un valor pico de 8 V se aplica a la entrada de un cuantizador. La característica del cuantizador se muestra en la figura 3-8a. Calcule y grafique la PDF para la salida.

B–34 Una forma de onda de voltaje que tiene una distribución gaussiana se aplica a la entrada de un circuito rectificador de onda completa. El rectificador de onda completa se describe mediante $y(t) = |x(t)|$, donde $x(t)$ es la entrada y $y(t)$ la salida. La forma de onda de entrada tiene un valor de DC de 1 V y un RMS de 2 V.

(a) Grafique la PDF para la forma de onda de entrada.

(b) Grafique la PDF para la forma de onda de salida.

★ **B–35** Remítase al ejemplo B-6 y a la ecuación (B-75), los cuales describen la PDF para la salida de una característica de diodo ideal (rectificador de media onda). Encuentre la media (valor de DC) de la salida.

B–36 Dada la función de densidad conjunta,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-(1/2)(4x_1 + x_2)}, & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

(a) Verifique que $f(x_1, x_2)$ es una función de densidad.

(b) Muestre si x_1 y x_2 son independientes o dependientes.

(c) Evalúe $P(1 \leq x_1 \leq 2, x_2 \leq 4)$.

(d) Encuentre ρ.

★ **B–37** Una función de densidad conjunta es

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} K(x_1 + x_1 x_2), & 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 4 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

(a) Encuentre K.

(b) Determine si x_1 y x_2 son independientes.

(c) Halle $F_{x_1 x_2}(0.5,2)$.

(d) Obtenga $F_{x_2|x_1}(x_2|x_1)$.

B–38 Sea $y = x_1 + x_2$, donde x_1 y x_2 son variables aleatorias no correlacionadas. Muestre que

(a) $\overline{y} = m_1 + m_2$, donde $m_1 = \overline{x_1}$ y $m_2 = \overline{x_2}$.

(b) $\sigma_y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$, donde $\sigma_1^2 = \overline{(x_1 - m_1)^2}$ y $\sigma_2^2 = \overline{(x_2 - m_2)^2}$.

[*Sugerencia:* utilice la nomenclatura del operador conjunto parecido al empleado en la demostración para la ecuación (B-29).]

B–39 Sea $x_1 = \cos\theta$ y $x_2 = \text{sen}\,\theta$, donde θ está uniformemente distribuida sobre $(0, 2\pi)$. Muestre que

(a) x_1 y x_2 no están correlacionadas.

(b) x_1 y x_2 no son independientes.

★ **B–40** Dos variables aleatorias x_1 y x_2 son gaussianas conjuntas. La PDF conjunta se describe por la ecuación (B-97), donde $m_1 = m_2 = 0$, $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = 1$ y $\rho = 0.5$. Grafique $f(x_1, x_2)$ para x_1 sobre el rango de $|x_1| < 5$ y $x_2 = 0$. También grafique $f(x_1, x_2)$ para $|x_1| < 5$ y $x_2 = 0.4$, 0.8, 1.2 y 1.6.

B–41 Muestre que la PDF marginal de una PDF gaussiana bivariante es una PDF gaussiana unidimensional. Esto es, evalúe

$$f(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2$$

donde $f(x_1, x_2)$ está dada por la ecuación (B-97). [*Sugerencia:* factorice algunos términos fuera de la integral que contienen a x_1 (pero no a x_2). Complete el cuadrado en el exponente del término de la integral residual de tal manera que se obtenga una forma de PDF gaussiana. Utilice la propiedad de que la integral de una PDF gaussiana adecuadamente normalizada es igual a la unidad.]

B–42 **(a)** $y = A_1x_1 + A_2x_2$, donde A_1 y A_2 son constantes y la PDF conjunta de x_1 y x_2 es $f_x(x_1, x_2)$. Encuentre una fórmula para la PDF de y en términos de la PDF (conjunta) de $\mathbf{x}$.
(b) Si x_1 y x_2 son independientes, ¿cómo puede simplificarse esta fórmula?

B–43 Dos variables aleatorias independientes, x y y, tienen las PDF $f(x) = 5e^{-5x}\,u(x)$ y $f(y) = 2e^{-2y}\,u(y)$. Grafique la PDF para w, donde $w = x + y$.

★ **B–44** Dos variables aleatorias gaussianas x_1 y x_2 tienen un vector de media $\mathbf{m}_x$ y una matriz de covarianza $\mathbf{C}_x$, como se muestra. Se forman dos nuevas variables aleatorias y_1 y y_2 mediante la transformación lineal $\mathbf{y} = \mathbf{Tx}$.

$$\mathbf{m}_x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} 5 & -2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre el vector de la media para $\mathbf{y}$, el cual se representa por $\mathbf{m}_y$.
(b) Obtenga la matriz de covarianza para $\mathbf{y}$, la cual se representa por $\mathbf{C}_y$.
(c) Halle el coeficiente de correlación para y_1 y y_2. (*Sugerencia:* consulte la sección 6-6.)

B–45 Tres variables aleatorias gaussianas x_1, x_2 y x_3 tienen medias de cero. Se forman tres nuevas variables aleatorias y_1, y_2 y y_3 mediante la transformación lineal $\mathbf{y} = \mathbf{Tx}$, donde

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} 6.0 & 2.3 & 1.5 \\ 2.3 & 6.0 & 2.3 \\ 1.5 & 2.3 & 6.0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

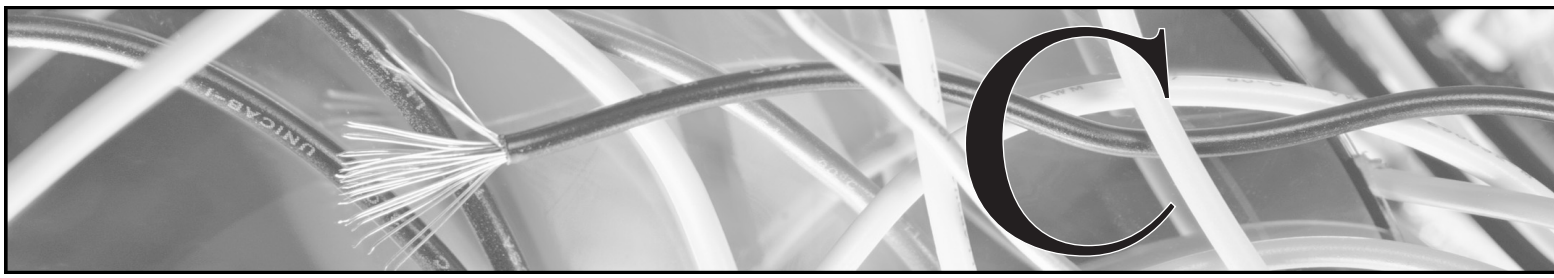
(a) Determine la matriz de covarianza para $\mathbf{y}$, la cual se representa por $\mathbf{C}_y$.
(b) Escriba una expresión para la PDF $f(y_1, y_2, y_3)$. (*Sugerencia:* consulte la sección 6-6.)

★ **B–46** **(a)** Encuentre una fórmula para la PDF de $y = Ax_1x_2$, donde x_1 y x_2 son variables aleatorias que cuentan con la PDF conjunta $f_{\mathbf{x}}(x_1, x_2)$.
(b) Si x_1 y x_2 son independientes, reduzca la fórmula obtenida en la parte (a) a un resultado más simple.

B–47 $y_2 = x_1 + x_2 + x_3$, donde x_1, x_2 y x_3 son variables aleatorias independientes. Cada una de las x_i tiene una PDF unidimensional que está uniformemente distribuida sobre $-(A/2) \leq x_i \leq (A/2)$. Muestre que la PDF de y_2 se obtiene a partir de la ecuación (B-109).

B–48 Utilice el generador de números aleatorios incorporado en MATLAB o MathCAD para demostrar el teorema del límite central. Esto es,
(a) Calcule muestras de la variable aleatoria y, donde $y = \sum x_i$ y los valores x_i se obtienen del generador de números aleatorios.
(b) Grafique la PDF para y utilizando la función de histograma de MATLAB o MathCAD.

Apéndice



C

EMPLEO DE MATLAB

MATLAB es una herramienta muy útil para el análisis y diseño de sistemas de comunicaciones usando una computadora personal (PC). Se ocupa ampliamente en cursos de ingeniería y con frecuencia en la industria para diseñar y simular sistemas.

MATLAB es un acrónimo de Matrix Laboratory (laboratorio de matrices), y trata a todas las constantes y variables como matrices, vectores renglón o vectores columna. En consecuencia, las operaciones estándares en MATLAB son operaciones de matriz. Por ejemplo, $a * b$ es la matriz de multiplicación de a y b. Esto significa que el código de programas en MATLAB llega a ser muy conciso. Las operaciones complicadas se expresan con muy pocas líneas de código sin bucles "do". Es factible calcular de forma muy eficiente los resultados con la PC. Sin embargo, esto puede hacer que el código sea difícil de entender, aunque es compacto y computacionalmente eficiente. El uso de matrices y vectores también permite poderosas habilidades para crear gráficos.

Este libro adopta el concepto de "mantener el código simple" en la programación en MATLAB. Ello significa que pueden aparecer bucles en el código aquí presente para que sea más entendible, aunque se puede utilizar un código más compacto que ejecutaría a mayor velocidad. El objetivo de este texto es ocupar MATLAB como herramienta para facilitar la comprensión de los sistemas de comunicaciones.

Para resolver un problema con MATLAB, primero se ejecuta el programa en la PC. MATLAB es un programa interpretativo, es decir, los resultados se calculan después de capturar cada línea de código. Se tiene la opción de capturar sentencias en MATLAB una línea a la vez para su ejecución inmediata o, como alternativa, el programa ejecuta un archivo script que contiene sentencias de código para MATLAB. Este archivo script o de texto también se conoce como archivo M, debido a que su nombre tiene la forma xxxx.M. Para programas con más de un par de líneas de código a menudo se utiliza el método del archivo M. Los resultados calculados se muestran en forma tabulada o gráfica. Los archivos M pueden crearse en el editor de texto en MATLAB o por algún otro editor de texto, como Notepad (que ejecuta bajo Windows en la PC).

Se suministran los archivos M a los instructores para resolver ecuaciones y problemas de estudio selectos en este libro. Las ecuaciones están marcadas con un símbolo de PC ( ). También se suministran los archivos MATLAB M para estudiantes para los problemas de tarea con solución por computadora que están marcados con una ★. Los archivos M pueden descargarse del sitio de Internet

www.pearsoneducacion.net/couch

Por ejemplo, el archivo *e1_006.m* calcula los resultados para la ecuación (1-6). *Table2_3.m* es el archivo M que se muestra en la tabla 2-3 y produce los gráficos en MATLAB que se ilustran en la figura 2-21.

C–1 GUÍA RÁPIDA PARA EJECUTAR ARCHIVOS M

Para ejecutar rápidamente un programa en MATLAB que grafica algunos resultados, se sugieren los siguientes pasos:

1. Instale MATLAB en su PC, siguiendo las instrucciones de Math Works, Inc. (Una edición estudiantil de MATLAB se halla disponible a un precio razonable.)
2. Descargue los archivos M para *Sistemas de comunicaciones digitales y analógicos, 6a. o 7a. ediciones*.
3. Instale los archivos M en su disco duro en un subdirectorio conveniente, como C:\COUCH.
4. Ejecute MATLAB.
5. Vaya al subdirectorio donde se localizan los archivos M con el comando para cambiar directorios *cd C:\COUCH* (o el lugar en donde descargó los archivos M) en el indicador de sistema de MATLAB.
6. Verifique que está en el subdirectorio correcto ocupando el comando para listar directorios *dir* en el indicador de sistema de MATLAB. Deberá aparecer el listado del directorio de los archivos M.
7. Ejecute uno de los archivos M. Por ejemplo, para graficar los resultados que se muestran en la figura 2-21, teclee *fig2_21* en el indicador de sistema. (Como alternativa, en el menú de File seleccione la opción Run Script y teclee *fig2_21*.) Deberá obtener un gráfico de los resultados. Si la ventana titulada MATLAB Figure no aparece, seleccione el menú Window. Utilice el espaciador de su teclado para seleccionar entre varios gráficos. Puede imprimir los resultados graficados si selecciona la opción Print del menú File, como se muestra en la ventana de Figure.
8. Puede analizar y editar un archivo M con la opción Open en el menú File de la ventana de comandos de MATLAB. Por ejemplo, para analizar el listado del programa que produce el gráfico de la figura 2-21, abra el archivo *fig2_21.m*. Como alternativa, obtenga un listado del archivo tecleando *type fig2_21* en el indicador de sistema de MATLAB, o edite el archivo tecleando *edit fig2_21* en el indicador de sistema.

C–2 PROGRAMACIÓN EN MATLAB

MATLAB contiene un excelente sistema de ayuda en línea. En el indicador de sistema de MATLAB escriba *help* para accesar a los temas de ayuda. Para ayuda en un tema específico, como el uso de los dos puntos, escriba *help colon*. Si el resultado es tan largo que se desplaza más allá de la pantalla, ocupe el apuntador del ratón en la barra de desplazamiento para volver al inicio de la descripción. Math Works también provee un manual impreso con el programa MATLAB y existen libros de referencia independientes sobre MATLAB. [Consulte Hanselman y Littlefield, 1998.]

Como se indicó, el tipo básico de variable empleado en MATLAB es una matriz, lo que establece la nomenclatura usada en sus programas. Para familiarizarse con los conceptos básicos de la programación en MATLAB, ejecute el programa en su PC. Después, en el indicador de sistema, escriba los ejemplos de una sola línea dados en la siguiente lista. Las teclas de cursor hacia arriba o hacia abajo ayudan a navegar a través de las líneas anteriores que haya escrito. La lista resume la nomenclatura básica utilizada en los programas en MATLAB.

1. Un vector renglón se crea mediante una lista delimitada por comas o por espacios. Por ejemplo, escriba *M1 = [1,2,3,4,5,6]* o *M1 = [1 2 3 4 5 6]*. Este es un vector renglón de seis elementos, o una matriz de 1×6 (1 renglón $\times$ 6 columnas).
2. Un vector columna se crea mediante una lista delimitada por punto y coma. Por ejemplo, *M2 = [1;2;3;4;5;6]* es un vector columna de seis elementos, o una matriz de 6×1.
3. Escriba *M3 = [1 2 3; 4 5 6]*. Esto crea una matriz de 2×3. Para obtener el elemento en el segundo renglón y la tercera columna, escriba *M3(2,3)*. Éste tiene el valor de 6.
4. Un escalar es una matriz de 1×1. Por ejemplo, escriba *M4 = 2.5*.
5. Escriba *M5 = 0.5 + 2j*. Esto especifica un número complejo que es una matriz de 1×1.
6. El operador de dos puntos se usa para indexar arreglos y crear elementos de vectores. La nomenclatura empleada es valor inicial:salto incremental:valor final. Por ejemplo, escriba *t = 1:2:6*. Esto crea el vector renglón **t** = [1 3 5]. Si se remueve el salto incremental, el incremento por defecto es 1. Por ejemplo, *u = 1:6* es el vector renglón **u** = [1 2 3 4 5 6]. Los dos puntos también pueden ocuparse de comodín. Así, en el número 3 de esta lista, *M3(1,3)* denota el elemento en el primer renglón y la tercera columna, pero *M3(1,:)* denotaría el vector renglón correspondiente al primer renglón de la matriz M3.
7. Una vez que se define una variable (es decir, una matriz), permanece en memoria hasta que se limpie. Es decir, su valor puede obtenerse escribiendo su símbolo. Por ejemplo, escriba *M3* en el indicador de sistema de MATLAB.
8. Escriba *whos*. Whos es el comando de MATLAB que genera una lista de todas las variables (es decir, matrices) que están almacenadas en memoria, con su respectivo tamaño.
9. MATLAB distingue entre mayúsculas y minúsculas. O sea, M3 es una variable diferente de la variable m3, la cual no se ha definido.
10. El operador de transposición es □ Por ejemplo, escriba *M1'*, lo cual es la transpuesta de M1.
11. Inserte un punto y coma al final de una sentencia en MATLAB para suprimir el despliegue en pantalla del resultado calculado para dicha sentencia. Por ejemplo, escriba *y = 6*3;*. El resultado calculado no se desplegará en la pantalla. Sin embargo, puede obtenerlo escribiendo *y*.

12. Si una sentencia en MATLAB es demasiado larga para una sola línea, puede continuarse en la siguiente línea insertando ... al final de la línea original.

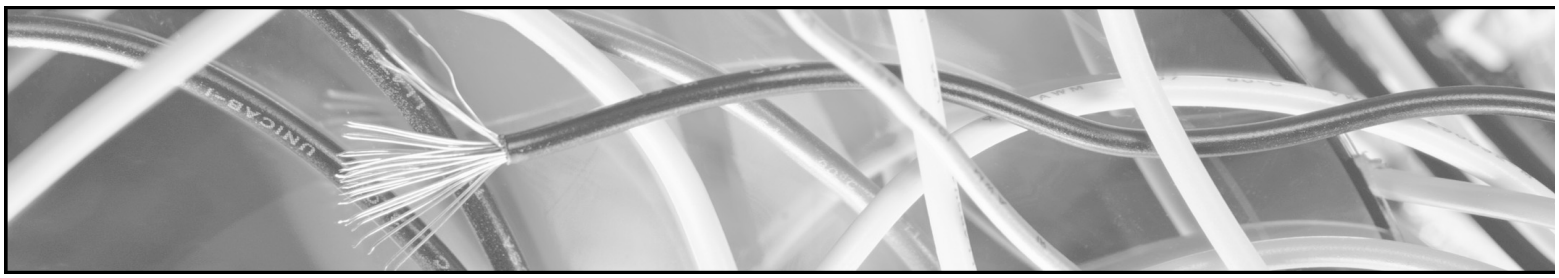
13. Se pueden capturar múltiples sentencias en la misma línea si se separan por comas o punto y coma. Por ejemplo, escriba *I = 1, i = 5*.

14. Si MATLAB se queda atrapado en un bucle debido a un error en programación, el cálculo puede terminarse presionando las teclas control-C. (La tecla de control se abrevia con ^. Por tanto, control-c se escribe aquí como ^*C*. Por ejemplo, escriba *for (i = 1:inf), i, end*. Termine el cálculo utilizando ^*C*.

15. Las funciones elementales comunes (es decir, trigonométricas y logarítmicas) están incorporadas en MATLAB. Para listarlas, escriba *help elfun*. Para ver las funciones especializadas, como las de Bessel, escriba *help specfun*. Se pueden crear funciones definidas por el usuario a través de archivos M□escriba *help function* para más detalles.

16. Las gráficas que se muestran en la figura 2-21 se obtuvieron ejecutando el programa en el archivo M en MATLAB cuyo listado aparece en la tabla 2-3. La función *plot (t, w)* genera un gráfico de la forma de onda, vector **w**, como una función del vector de tiempo, **t**, como se muestra al inicio de la figura 2-21. Se pueden obtener múltiples gráficos en una sola ventana con la función subplot, por ejemplo los presentados en un arreglo de tres renglones × una columna empleando *subplot (3,1,x)*, donde *x* es el número del gráfico dentro de tres posibles. Remitiéndose a la figura 2-21, note que los tres gráficos en los $\frac{3}{4}$ inferiores de la figura se crean con *subplot (3, 1, 1)*, *subplot (3, 1, 2)* y *subplot (3, 1, 3)*□, como se muestra en la tabla 2-3, con *subplot (3 1 1)*, *subplot (3 1 2)* y *subplot (3 1 3)*. En otro ejemplo, se pueden presentar múltiples gráficos en un arreglo de tres renglones × dos columnas con *subplot (3, 2, x)*, donde *x* es el número del gráfico dentro de seis posibles. Es decir, *subplot (3, 2, 3)* sería el tercero de seis gráficos, y aparece en la primera columna del segundo renglón.

17. El signo de □ se usa para definir una sentencia de comentario. Todo el texto en una línea que sigue del signo □ se interpreta como una sentencia de comentario. Por ejemplo, vea la primera línea de *table2_3.m*.



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAMOWITZ, M. e I. A. STEGUN (editores), *Handbook of Mathematical Funcions*, National Bureau of Standards, Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington DC, 1964. También disponible en rústica de Dover Publications, Nueva York, 1965.

AMOROSO, F., "The Bandwidth of Digital Data Signals", *IEEE Communications Magazine*, vol. 18, núm. 6, noviembre de 1980, pp. 13-24.

ANDERSON, R. R. y J. SALZ, "Spectra of Digital FM", *Bell System Technical Journal*, vol. 44, julio-agosto de 1965, pp. 1165-1189.

ANVARI, K. y D. WOO, "Susceptibility of $\pi/4$ DQPSK TDMA Channel to Receiver Impairments", *RF Design*, febrero de 1991, pp. 49-55.

AOYAMA, T., W. R. DAUMER y G. MODENA (editores), Special Issue on Voice Coding for Communications, *IEEE Journal on Selected Areas of Communications*, vol. 6, febrero de 1988.

ARRL., *The 2005 ARRL Handbook for Radio Amateurs*, 82a. edición, 2004; *The 1997 ARRL Handbook for Radio Amateurs*, 1996*; The 1992 ARRL Handbook for Radio Amateurs*, 1991, American Radio Relay League, Newington, CT.

AT&T, *FT-2000 OC-48 Lightwave System*, Publication No. AT/T 365-575-100, AT&T Regional Technical Assistance Center (800-432-6600), Holmdel, NJ, diciembre de 1994.

BAINES, R., "The DSP Bottleneck", *IEEE Communications Magazine*, vol. 33, mayo de 1995, pp. 46-54.

BALDUINO, P. R. H., "Latin America Goes Wireless via Satellite", *IEEE Communications Magazine*, vol. 33, núm. 9, septiembre de 1995, pp. 114-122.

BASCH, E. E. y T. G. BROWN, "Introduction to Coherent Optical Fiber Transmission", *IEEE Communications Magazine*, vol. 23, mayo de 1985, pp. 23-30.

BEDROSIAN, E. B. y S.O. RICE, "Distortion and Crosstalk of Linearly Filtered Angle-Modulated Signals", *Proceedings of the IEEE*, vol. 56, enero de 1968, pp. 2-13.

BELL TELEPHONE LABORATORIES, *Transmission Systems for Communications*, 4a. edición, Western Electric Company, Winston-Salem, NC, 1970.

BENDAT, J. S. y A. G. PIERSOL, *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, Wiley-Interscience, Nueva York, 1971.

BENEDETTO, S., E. BIGLIERI y V. CASTELLANI, *Digital Transmission Theory*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1987.

BENEDETTO, S., M. MONDIN y G. MONTORSI, "Performance Evaluation of Trellis-Coded Modulation Schemes", *Proceedings of the IEEE*, vol. 82, núm. 6, junio de 1994, pp. 833-855.

BENEDETTO, S. y G. MONTORSI, "Unveiling Turbo Codes: Some Results on Parallel Concatenated Coding Schemes", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-42, marzo de 1996, pp. 409-428.

BENNETT, W. R. y J. R. DAVEY, *Data Transmission*, Mc-Graw Hill Book Company, Nueva York, 1965.

BENNETT, W. R. y S. O. RICE, "Spectral Density and Autocorrelation Functions Associated with Binary Frequency Shift Keying", *Bell System Technical Journal*, vol. 42, septiembre de 1963, pp. 2355-2385.

BENSON, K. B. y J. C. WHITAKER, *Television Engineering Handbook*, edición revisada, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1992.

BERGLAND, G. D., "A Guided Tour of the Fast Fourier Transform", *IEEE Spectrum*, vol. 6, julio de 1969, pp. 41-52.

BEST, R. E., *Phase-Locked Loops*, 4a. edición, McGraw-Hill, Inc., Nueva York, 1999.

BHARGAVA, V. K., "Forward Error Correction Schemes for Digital Communications", *IEEE Communications Magazine*, vol. 21, enero de 1983, pp. 11-19.

BHARGAVA, V. K., D. HACCOUN, R. MATYAS y P. P. NUSPL, *Digital Communications by Satellite*, Wiley-Interscience, Nueva York, 1981.

BIC, J. C., D. DUPONTEIL y J. C. IMBEAUX, *Elements of Digital Communications*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1991.

BIGLIERI, E., D. DIVSALAR, P. J. MCLANE y M. K. SIMON, *Introduction to Trellis-Coded Modulation with Applications*, Macmillan Publishing Company, Nueva York, 1991.

BLACKMAN, R. B. y J. W. TUKEY, *The Measurement of Power Spectra*, Dover, Nueva York, 1958.

BLAHUT, R. E., *Theory and Practice of Error Control Codes*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1983.

BLANCHARD, A., *Phase-Locked Loops*, Wiley-Interscience, Nueva York, 1976.

BOASHASH, B., "Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal – Part 1: Fundamentals" y "Part 2: Algorithms and Applications", *Proceedings of IEEE*, vol. 80, núm. 4, abril de 1992, pp. 520-538 y 540-568.

BÖRJESSON P. P., y C. E. W. SUNDBERG, "Simple Approximations for the Error Function Q(x) for Communication Applications", *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-27, marzo de 1979, pp. 639-643.

BOWRON, P. y F. W. STEPHENSON, *Active Filters for Communications and Instrumentation*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1979.

BREMERMANN, H., *Distributions, Complex Variables and Fourier Transforms*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1965.

BRILEY, B. E., *Introduction to Telephone Switching*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1983.

BROADCASTING, *Broadcasting and Cable Yearbook 2006*, R. R. Bowker, Nueva Providencia, NJ, 2006.

BUDAGAVI, M. y J. D. GIBSON, "Speech Coding in Mobile Radio Communications", *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, núm. 7, julio de 1998, pp. 1402-1412.

BYLANSKI, P. y D. G. W. INGRAM, *Digital Transmission Systems*, Peter Peregrinus Ltd., Herts, Inglaterra, 1976.

CAMPANELLA, M., U. LOFASO y G. MAMOLA, "Optimum Pulse Shape for Minimum Spectral Occupancy in FSK Signals", *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. VT-33, mayo de 1984, pp. 67-75.

CARLSON, A. B., *Communication Systems*, 3a. edición, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1986.

CATTERMOLE, K. W., *Principles of Pulse-Coed Modulation*, American Elsevier, Nueva York, 1969.

CCITT STUDY GROUP XVII, "Recommendation V.32 for a Family of 2-Wire, Duplex Modems Operating on the General Switched Telephone Network and on Leased Telephone-Type Circuits", *Document AP VIII-43E*, mayo de 1984.

CHAKRABORTY, D., "VSAT Communication Networks – An Overview", *IEEE Communications Magazine*, vol. 26, núm. 5, mayo de 1988, pp. 10-24.

CHALLAPALI, K., X. LEBEQUE, J. S. LIM, W. H. PAIK, R. SAINT GIRONS, E. PETAJAN, V. SATHE, P. A. SNOPKO y J. ZDEPSKI, "The Grand Alliance System for US HDTV", *Proceedings of the IEEE*, vol. 83, núm. 2, febrero de 1995, pp. 158-173.

CHAPMAN, R. C. (editor), "The SLC96 Subscriber Loop Carrier System", *AT&T Bell Laboratories Technical Journal*, vol. 63, núm. 10, parte 2, diciembre de 1984, pp. 2273-2437.

CHESTER, D. B., "Digital IF Filter Technology for 3G Systems: An Introduction", *IEEE Communications Magazine*, vol. 37, febrero de 1999, pp. 102-107.

CHILDERS, D. G., *Probability and Random Processes Using MATLAB*, Irwin, Chicago, 1997.

CHILDERS, D. y A. DURLING, *Digital Filtering and Signal Processing*, West Publishing Company, Nueva York, 1975.

CHORAFAS, D. N., *Telephony, Today and Tomorrow*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

CLARK, G. C. y J. B. CAIN, *Error-Correction Coding for Digital Communications*, Plenum Publishing Corporation, Nueva York, 1981.

CONKLING, C., "Fractional-N Synthesizers Trim Current, Phase Noise", *Microwaves and RF*, febrero de 1998, pp. 126-134.

COOPER, G. R. y C. D. MCGILLEM, *Modern Communications and Spread Spectrum*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1986.

COUCH, L. W., "A Study of a Driven Oscillator with FM Feedback by Use of a Phase-Lock-Loop Model", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-19, núm. 4, abril de 1971, pp. 357-366.

COUCH, L. W., *Digital and Analog Communication Systems*, 4a. edición, Macmillan Publishing Company, Nueva York, 1993.

COUCH, L. W., *Modern Communications Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.

COURANT, R. y D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1, Wiley-Interscience, Nueva York, 1953.

DAMMANN, C. L., L. D. MCDANIEL y C. L. MADDOX, "D2 Channel Bank – Multiplexing and Coding", *Bell System Technical Journal*, vol. 51, octubre de 1972, pp. 1675-1700.

DAVENPORT, W. B., JR. y W. L. ROOT, *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1958.

DAVIDOFF, M. R., *Satellite Experimenter's Handbook*, 2a. edición, American Radio Relay League, Newington, CT, 1990.

DAVIS, D. W. y D. L. A. BARBER, *Communication Networks for Computers*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1973.

DEANGELO, J., "New Transmitter Design for the 80's", *BM/E (Broadcast Management/Engineering)*, vol. 18, marzo de 1982, pp. 215-226.

DECINA, M. y G. MODENA, "CCITT Standards on Digital Speech Processing", *IEEE Journal on Selected Areas of Communications*, vol. 6, febrero de 1988, pp. 227-234.

DEFFEBACH, H. L. y W. O. FROST, "A Survey of Digital Baseband Signaling Techniques", *NASA Technical Memorandum NASATM X-64615*, 30 de junio de 1971.

DEJAGER, F., "Delta Modulation, A Method of PCM Transmission Using a 1-Unit Code", *Phillips Reserch Report*, núm. 7, diciembre de 1952, pp. 442-466.

DEJAGER, F. y C. B. DEKKER, "Tamed Frequency Modulation: A Novel Method to Achieve Spectrum Economy in Digital Transmission", *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-26, mayo de 1978, pp. 534-542.

DESHPANDE, G. S. y P. H. WITTKE, "Correlative Encoding of Digital FM", *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-29, febrero de 1981, pp. 156-162.

DHAKE, A. M., *Television Engineering*, McGraw-Hill Book Company, Nueva Delhi, India, 1980.

DIXON, R. C., *Spread Spectrum Systems*, 3a. edición, John Wiley & Sons, Nueva York, 1994.

DORF, R. C. (redactor gerente), *The Electrical Engineering Handbook*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.

DORF, R. C. (editor), *The Engineering Handbook*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.

EDELSON, B. L. y A. M. WERTH, "SPADE System Progress and Application", *COM-SAT Technical Review*, primavera de 1972, pp. 221-242.

EILERS, C. G., "TV Multichannel Sound – The BTSC System", *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, vol. CE-31, febrero de 1984, pp. 1-7.

EVANS, J. V., "Satellite Systems for Personal Communications", *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, núm. 7, julio de 1998, pp. 1325-1341.

FASHANO, M. y A. L. STRODTBECK, "Communication System Simulation and Analysis with SYSTID", *IEEE Journal on Selected Areas of Communications*, vol. SAC-2, enero de 1984, pp. 8-29.

FEHER, K., *Digital Communications – Satellite/Earth Station Engineering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981.

FELLER, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1957, p. 168.

FIKE, J. L. y G. E. FRIEND, *Understanding Telephone Electronics*, 2a. edición, Texas Instruments, Dallas, 1984.

FINK, D. G. y H. W. BEATY (editores), *Standard Handbook for Electrical Engineers*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1978.

FLANAGAN, J. L., M. R. SCHROEDER, B. S. ATAL, R. E. CROCHIERE, N. S. JAYANT y J. M. TRIBOLET, "Speech Coding", *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-27, abril de 1979, pp. 710-737.

FOLEY, J., "Iridium: Key to World Wide Cellular Communications", *Telecommunications*, vol. 25, octubre de 1991, pp. 23-28.

FORNEY, G. D., "The Viterbi Algorithm", *Proceedings of the IEEE*, vol. 61, marzo de 1973, pp. 268-273.

FORNEY, G. D., L. BROWN, M. V. EYUBOGLU y J. L. MORAN, "The V.34 High-Speed Modem Standar", *IEEE Communications Magazine*, vol. 34, diciembre de 1996, pp. 28-33.

FROHNE, R., "A High-Performance, Single-Signal, Direct-Conversion Receiver with DSP Filtering", *QST*, vol. 82, abril de 1998, pp. 40-46.

GALLAGHER, R. G., *Information Theory and Reliable Communications*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1968.

GARDNER, F. M., *Phaselock Techniques*, 2a. edición, John Wiley & Sons, Nueva York, 1979.

GARDNER, F. M. y W. C. LINDSEY (editores invitados), Special Issue on Synchronization, *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-28, núm. 8, agosto de 1980.

GARG, V. K., *IS-95 CDMA and cdma 2000*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 2000.

GARG, V. K. y J. E. WILKES, *Principles and Applications of GSM*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 1999.

GERSHO, A., "Advances in Speed and Audio Compression", *Proceedings of the IEEE*, vol. 82, núm. 6, junio de 1994, pp. 900-912.

GERSHO, A., "Charge-Coupled Devices: The Analog Shift Register Comes of Age", *IEEE Communications Society Magazine*, vol. 13, noviembre de 1975, pp. 27-32.

GERSON, I. A. y M. A. JASIUK, "Vector Sum Excited Linear Predicion (VSELP) Speech Coding at 8kb/s", *Conferencia Internacional sobre Acústica, Voz y Procesamiento de Señales*, Albuquerque, NM, abril de 1990, pp. 461-464.

GIBSON, J. D. (editor), *The Communications Handbook*, CRC Press, Inc, Boca Raton, FL, 1997.

GLISSON, T. L., *Introduction to System Analysis*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1986.

GOLDBERG, R. R., *Fourier Transforms*, Cambridge University Press, Nueva York, 1961.

GOLOMB, S. W. (editor), *Digital Communications with Space Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964.

GOODMAN, D. J., "Trends in Cellular and Cordless Communication", *IEEE Communications Magazine*, vol. 29, junio de 1991, pp. 31-40.

GORDON, G. D. y W. L. MORGAN, *Principles of Communication Satellites*, Wiley-Interscience, Nueva York, 1993.

GRIFFITHS, J., *Radio Wave Propagation and Antennas*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

GROB, B. y C. A. HERNDON, *Basic Television*, 6a. edición, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1998.

GRUBB, J. L., "The Traveller's Dream Come True", *IEEE Communications Magazine*, vol. 29, noviembre de 1991, pp. 48-51.

GULSTAD, K., "Vibrating Cable Relay", *Electrical Review* (Londres), vol. 42, 1898; vol. 51, 1902.

GUPTA, S. C., "Phase Locked Loops," *Proceedings of the IEEE*, vol. 63, febrero de 1975, págs. 291-306.

HA, T. T., *Digital Satellite Communications*, Macmillan Publishing Company, Nueva York, 1986.

HA, T. T., *Digital Satellite Communications*, 2a. edición, John Wiley & Sons, Nueva York, 1989.

HAMMING, R. W., "Error Detecting and Error Correcting Codes", *Bell System Technical Journal*, vol. 29, abril de 1950, pp. 147-160.

HÄNDEL, R. y M. N. HUBER, *Integrated Broadband Networks*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1991.

HANSELMAN, D. y B. LITTLEFIELD, *Mastering MATLAB 5*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998.

HARRIS, A., "The New World of HDTV", *Electronics Now*, vol. 64, mayo de 1993, pp. 33-40 y 72.

HARRIS, F. J., "On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform", *Proceedings of the IEEE*, vol. 66, enero de 1978, pp. 51-83.

HARRIS, F. J., "The Discrete Fourier Transform Applied to Time Domain Signal Processing", *IEEE Communications Magazine*, vol. 20, mayo de 1982, pp. 13-22.

HARTLEY, R. V., "Transmission of Information", *Bell System Technical Journal*, vol. 27, julio de 1948, pp. 535-563.

HAUS, H. A., presidente del subcomité 7.9 de IRE sobre el ruido, "Description of Noise Performance of Amplifiers and Receiving Systems", *Proceedings of the IEEE*, vol. 51, núm. 3, marzo de 1963, pp. 436-442.

HAYKIN, S., *Communication Systems*, 2a. edición, John Wiley & Sons, Nueva York, 1983.

HOFMANN, F., C. HANSEN y W. SCHÄFER, "Digital Radio Mondiale (DRM) Digital Sound Broadcasting in the AM Bands", *IEEE Transactions on Broadcasting*, vol. 49, septiembre de 2003, pp. 319-328.

HOLMES, J. K., *Coherent Spread Spectrum Systems*, Wiley-Interscience, Nueva York, 1982.

HOPKINS, R., "Digital Terrestrial HDTV for North America: The Grand Alliance HDTV System", *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, vol. 40, núm. 3, agosto de 1994, pp. 185-198.

HSING, T. R., C. CHEN y J. A. BELLISIO, "Video Communications and Services in the Copper Loop", *IEEE Communications Magazine*, vol. 31, enero de 1993, pp. 62-68.

HSU, H. P., "Chapter 2 – Sampling", *The Mobile Communications Handbook*, 2a. edición (J. D. Gibson, editor), CRC Press, Boca Raton, FL, 1999, pp. 2.1-2.10.

HUANG, D. T. y C. F. VALENTI, "Digital Subscriber Lines: Network Considerations for ISDN Basic Access Standard", *Proceedings of the IEEE*, vol. 79, febrero de 1991, pp. 125-144.

IPATOV, V., *Spread Spectrum and CDMA: Principles and Applications*, John Wiley & Sons, Nueva York, 2005.

IRMER, T., "An Overview of Digital Hierarchies in the World Today", *Conferencia Internacional del IEEE sobre Comunicaciones*, San Francisco, junio de 1975, pp. 16-1 a 16-4.

IRWIN, J. D., *Basic Engineering Circuit Analysis*, Macmillan Publishing Company, Nueva York, 5a. edición, 1995.

JACOBS, I., "Design Considerations for Long-Haul Lightwave Systems", *IEEE Journal on Selected Areas of Communications*, vol. 4, diciembre de 1986, pp. 1389-1395.

JAMES, R. T. y P. E. MUENCH, "A.T.&T. Facilities and Services", *Proceedings of the IEEE*, vol. 60, noviembre de 1972, pp. 1342-1349.

JAYANT, N. S., "Digital Encoding of Speech Waveforms", *Proceedings of the IEEE*, mayo de 1974, pp. 611-632.

JAYANT, N. S., "Coding Speech at Low Bit Rates", *IEEE Spectrum*, vol. 23, agosto de 1986, pp. 58-63.

JAYANT, N. S. y P. NOLL, *Digital Coding of Waveforms*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

JENKINS, M. G. y D. G. WATTS, *Spectral Analysis and Its Applications*, Holden-Day, San Francisco, CA, 1968.

JERRI, A. J., "The Shannon Sampling Theorem – Its Various Extensions and Applications: A Tutorial Review", *Proceedings of the IEEE*, vol. 65, núm. 11, noviembre de 1977, pp. 1565-1596.

JORDAN, E. C. y K. G. BALMAIN, *Electromagnetic Waves and Radiating Systems*, 2a. edición, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1968.

JURGEN, R. K., "High-Definition Television Update", *IEEE Spectrum*, vol. 25, abril de 1988, pp. 56-62.

JURGEN, R. K., "The Challenges of Digital HDTV", *IEEE Spectrum*, vol. 28, abril de 1991, pp. 28-30 y 71-73.

KAPLAN, E., *Understanding GPS: Principles and Applications*, Artech House, Norwood, MA, 2005.

KAUFMAN, M. y A. H. SEIDMAN, *Handbook of Electronics Calculations*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1979.

KAY, S. M., *Modern Spectral Estimation – Theory and Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1986.

KAY, S. M. y S. L. MARPLE, "Spectrum-Analysis – A Modern Perspective", *Proceedings of the IEEE*, vol. 69, noviembre de 1981, pp. 1380-1419.

KAZAKOS, D. y P. PAPANTONI-KAZAKOS, *Detection and Estimation*, Computer Science Press, Nueva York, 1990.

KLAPPER, J. y J. T. FRANKLE, *Phase-Locked and Frequency-Feedback Systems*, Academic Press, Nueva York, 1972.

KRAUS, J. D., *Radio Astronomy*, 2a. edición, Cygnus-Quasar Books, Powell, OH, 1986.

KRAUSS, H. L., C. W. BOSTIAN y F. H. RAAB, *Solid State Radio Engineering*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1980.

KRETZMER, E. R., "Generalization of a Technique for Binary Data Communications", *IEEE Transactions on Communication Technology*, vol. COM-14, febrero de 1966, pp. 67-68.

LAM, S. S., "Satellite Packet Communications, Multiple Access Protocols and Performance", *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-27, octubre de 1979, pp. 1456-1466.

LANCASTER, D., "Hardware Hacker – Caller Number Delivery", *Radio-Electronics*, vol. 62, agosto de 1991, pp. 69-72.

LATHI, B. P., *Modern Digital and Analog Communication Systems*, 3a. edición, Oxford University Press, Inc., Londres, 1998.

LEE, W. C. Y., "Elements of Cellular Mobile Radio Systems", *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. VT-35, mayo de 1986, pp. 48-56.

LEE, W. C. Y., *Mobile Cellular Telecommunications Systems*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1989.

LEIB, H. y S. PASUPATHY, "Error-Control Properties of Minimum Shift Keying", *IEEE Communications Magazine*, vol. 31, enero de 1993, pp. 52-61.

LENDER, A., "The Duobinary Technique for High Speed Data Transmissions", *IEEE Transactions on Communication Electronics*, vol. 82, mayo de 1963, pp. 214-218.

LENDER, A., "Correlative Level Coding for Binary-Data Transmission", *IEEE Spectrum*, vol. 3, febrero de 1966, pp. 104-115.

LI, V. O. K. y X. QUI, "Personal Communication System (PCS) ", *Proceedings of the IEEE*, vol. 83, núm. 9, septiembre de 1995, pp. 1210-1243.

LIN, D. W., C. CHEN y T. R. HSING, "Video on Phone Lines: Technology and Applications", *Proceedings of the IEEE*, vol. 83, núm. 2, febrero de 1995, pp. 175-192.

LIN, S. y D. J. COSTELLO, JR., *Error Control Coding*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.

LINDSEY, W. C. y C. M. CHIE, "A Survey of Digitial Phase-Locked Loops", *Proceedings of the IEEE*, vol. 69, abril de 1981, pp. 410-431.

LINDSEY, W. C. y M. K. SIMON, *Telecommunication System Engineering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.

LUCKY, R., "Through a Glass Darkly – Viewing Communication in 2012 from 1961", *Proceedings of the IEEE*, vol. 87, julio de 1999, pp. 1296-1300.

LUCKY, R. W. y H. R. RUDIN, "Generalized Automatic Equalization for Communication Channels", *Conferencia Internacional de Comunicación del IEEE*, vol. 22, 1966.

LUCKY, R. W., J. SALZ y E. J. WELDON, *Principles of Data Communication*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1968.

MANASSEWITSCH, V., *Frequency Synthesizers*, 3a. edición, Wiley-Interscience, Nueva York, 1987.

MARAL, G., *VSAT Networks*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1995.

MARKLE, R. E., "Single Sideband Triples Microwave Radio Route Capacity", *Bell Systems Laboratories Record*, vol. 56, núm. 4, abril de 1978, pp. 105-110.

MARKLE, R. E., "Prologue, The AR6A Single-Sideband Microwave Radio System", *Bell System Technical Journal*, vol. 62, diciembre de 1983, pp. 3249-3253. (Toda la edición de diciembre de 1983 trata sobre el sistema AR6A.)

MARPLE, S. L., *Digital Spectral Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1986.

MCELIECE, R. J., The Theory of Information and Coding (*Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, vol. 3), Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1977.

MCGILL, D. T, F. D. NATALI y G. P. EDWARDS, "Spread-spectrum Technology for Commerical Applications", *Proceedings of the IEEE*, vol. 82, núm. 4, abril de 1994, pp. 572-584.

MELSA, J. L. y D. L. COHN, *Decision and Estimation Theory*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1978.

MENNIE, D., "AM Stereo: Five Competing Options", *IEEE Spectrum*, vol. 15, junio de 1978, pp. 24-31.

MIYAOKA, S., "Digital Audio Is Compact and Rugged", *IEEE Spectrum*, vol. 21, marzo de 1984, pp. 35-39.

MOTOROLA, "MC145500 Series PCM Codec-Filter Mono-Circuit", *Motorola Semiconductor Technical Data*, disponible en *www.motorola.com*, 1995.

MOTOROLA, *Telecommunications Device Data*, Motorola Semiconductor Products, Austin, TX, 1985.

MUMFORD, W. W. y E. H. SCHEIBE, *Noise Performance Factors in Communication Systems*, Horizon House-Microwave, Dedham, MA, 1968.

MUROTO, K., "GMSK Modulation for Digital Mobile Radio Telephony", *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-29, julio de 1981, pp. 1044-1050.

MURPHY, E., "Whatever Happened to AM Stereo?", *IEEE Spectrum*, vol. 25, marzo de 1988, p. 17.

NILSSON, J. W., *Electric Circuits*, 3a. edición, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1990.

NORTH, D. O., "An Analysis of the Factors which Determine Signal/Noise Discrimination in Pulsed-Carrier Systems", *RCA Technical Report*, PTR-6-C, junio de 1943; reimpreso en *Proceedings of the IEEE*, vol. 51, julio de 1963, pp. 1016-1027.

NYQUIST, H., "Certain Topics in Telegraph Transmission Theory", *Transactions of the AIEE*, vol. 47, febrero de 1928, pp. 617-644.

OKUMURA, Y. y M. SHINJI (editores invitados), Special Issue on Mobile Radio Communications, *IEEE Communications Magazine*, vol. 24, febrero de 1986.

OLMSTED, J. M. H., *Advanced Calculus*, Appleton-Century-Crofts, Nueva York, 1961.

O'NEAL, J. B., "Delta Modulation and Quantizing Noise, Analytical and Computer Simulation Results for Gaussian and Television Input Signals", *Bell System Technical Journal*, vol. 45, enero de 1966(a), pp. 117-141.

O'NEAL, J. B., "Predictive Quantization (DPCM) for the Transmission of Television Signals", *Bell System Technical Journal*, vol. 45, mayo-junio de 1966(b), pp. 689-721.

OPPENHEIM, A. V. y R. W. SCHAFER, *Digital Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975.

OPPENHEIM, A. V. y R. W. SCHAFER, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

PADGETT, J. E., C. G. GUNTHER y T. HATTORI, "Overview of Wireless Personal Communications", *IEEE Communications Magazine*, vol. 33, núm. 1, enero de 1995, pp. 28-41.

PANCHA, P. y M. EL ZARKI, "MPEG Coding of Variable Bit Rate Video Transmission", *IEEE Communications Magazine*, vol. 32, núm. 5, mayo de 1994, pp. 54-66.

PANDHI, S. N., "The Universal Data Connection", *IEEE Spectrum*, vol. 24, julio de 1987, pp. 31-37.

PANTER, P. F., *Modulation, Noise and Spectral Analysis*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1965.

PAPOULIS, A., *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 2a. edición, 1984, y 3a. edición, 1991.

PARK, J. H., JR., "On Binary DPSK Detection", *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-26, abril de 1978, pp. 484-486.

PASUPATHY, S., "Correlative Coding", *IEEE Communications Society Magazine*, vol. 15, julio de 1977, pp. 4-11.

PEEBLES, P. Z., *Communications System Principles*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1976.

PEEBLES, P. Z., *Digital Communication Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

PEEBLES, P. Z., *Probability, Random Variables and Random Signal Principles*, 3a. edición, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1993.

PEEK, J. B. H., "Communications Aspects of the Compact Disk Digital Audio System", *IEEE Communications Magazine*, vol. 23, febrero de 1985, pp. 7-15.

PERSONICK, S. D., "Digital Transmission Building Blocks", *IEEE Communications Magazine*, vol. 18, enero de 1980, pp. 27-36.

PETAJAN, E., "The HDTV Grand Alliance System", *Proceedings of the IEEE*, vol. 83, núm. 7, julio de 1995, pp. 1094-1105.

PETERSON, R. L., R. E. ZIEMER y D. E. BORTH, *Introduction to Spread-Spectrum Communications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.

PETERSON, W. W. y E. J. WELDON, *Error-Correcting Codes*, MIT Press, Cambridge, MA, 1972.

PETTIT, R. J., *ECM and ECCM Techniques for Digital Communication Systems*, Lifetime Learning Publications (una división de Wadsworth, Inc.), Belmont, CA, 1982.

PRATT, T., C. W. BOSTIAN y J. E. ALLNUTT, *Satellite Communications*, John Wiley & Sons, 2a. edición, Hoboken, NJ, 2003.

PRITCHARD, W. L. y C. A. KASE, "Getting Set for Direct-Broadcast Satellites", *IEEE Spectrum*, vol. 18, agosto de 1981, pp. 22-28.

PROAKIS, J. G., *Digital Communications*, 3a. edición, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1995.

QURESHI, S., "Adaptive Equalization", *IEEE Communications Magazine*, vol. 20, marzo de 1982, pp. 9-16.

RAMO, S., J. R. WHINNERY y T. VANDUZER, *Fields and Waves In Communication Electronics*, 3a. edición, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1994.

RANA, A. H., J. MCCOSKEY y W. CHECK, "VSAT Technology, Trends and Applications", *Proceedings of the IEEE*, vol. 78, julio de 1990, pp. 1087-1095.

RAPPAPORT, T. S., "Characteristics of UHF Multipath Radio Channels in Factory Buildings", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 37, agosto de 1989, pp. 1058-1069.

RAPPAPORT, T. S., *Wireless Communications, Principles and Practice*, 2a. edición, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 2002.

REEVE, W. H., *Subscriber Loop Signaling and Transmission Handbook*, IEEE Press, Nueva York, 1995.

RHEE, M. Y., *CDMA Cellular Mobile Communications and Network Security*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 1998.

RHEE, S. B. y W. C. Y. LEE (editores), "Special Issue on Digital Cellular Technologies" *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 40, mayo de 1991.

RICE, S. O., "Mathematical Analysis of Random Noise", *Bell System Technical Journal*, vol. 23, julio de 1944, pp. 282-333 y vol. 24, enero de 1945, pp. 36-156; reimpreso en *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, N. Wax (editor), Dover Publications, Nueva York, 1954.

RICE, S. O., "Statistical Properties of a Sine-Wave Plus Random Noise", *Bell System Technical Journal*, vol. 27, enero de 1948, pp. 109-157.

ROOT, W. L., "Remarks, Most Historical, on Signal Detection and Signal Parameter Estimation", *Proceedings of the IEEE*, vol. 75, noviembre de 1987, pp. 1446-1457.

ROWE, H. E., *Signals and Noise in Communication Systems*, D. Van Nostrand Company, Princeton, NJ, 1965.

RYAN, J. S. (editor), "Special Issue on Telecommunications Standards", *IEEE Communications Magazine*, vol. 23, enero de 1985.

SABIN, W. E. y E. O. SCHOENIKE, *Single-Sideband Systems and Circuits*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1987.

SALTZBERG, B. R., T. R. HSING, J. M. CIOFFI y D. W. LIN (editores), "Special Issue on High-Speed Digital Subscriber Lines", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 9, agosto de 1991.

SCHARF, L. L., *Statistical Signal Processing: Detection, Estimation, and Time Series Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1991.

SCHAUMANN, R., M. S. GHAUSI y K. R. LAKER, *Design of Analog Filters*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.

SCHILLING, D. L., R. L. PICKHOLTZ y L. B. MILSTEIN, "Spread Spectrum Goes Commercial", *IEEE Spectrum*, vol. 27, agosto de 1990, pp. 40-45.

SCHILLING, D. L., L. B. MILSTEIN, R. L. PICKHOLTZ, M. KULLBACK y F. MILLER, "Spread Spectrum for Commercial Communications", *IEEE Communications Magazine*, vol. 29, abril de 1991, pp. 66-67.

SCHWARTZ, B. K., "The Analog Display Services Interface", *IEEE Communications Magazine*, vol. 31, abril de 1993, pp. 70-75.

SCHWARTZ, M., W. R. BENNETT y S. STEIN, *Communication Systems and Techniques*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1966.

SHANMUGAN, K. S., *Digital and Analog Communication Systems*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1979.

SHANMUGAN, K. S. y A. M. BREIPOHL, *Random Signals: Detection, Estimation and Data Analysis*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1988.

SHANNON, C. E., "A Mathematical Theory and Communication", *Bell System Technical Journal*, vol. 27, julio de 1948, pp. 379-423 y octubre de 1948, pp. 623-656.

SHANNON, C. E., "Communication in the Presence of Noise", *Proceedings of the IRE*, vol. 37, enero de 1949, pp. 10-21. (Reimpreso en *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, núm. 2, febrero de 1998, pp. 447-457.)

SIMON, M. K., "Comments on 'On Binary DPSK Detection'", *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-26, octubre de 1978, pp. 1477-1478.

SINNEMA, W. y R. MCPHERSON, *Electronic Communications*, Prentice Hall Canada, Inc., Scarborough, Ontario, Canadá, 1991.

SIPERKO, C. M., "LaserNet – A Fiber Optic Intrastate Network (Planning and Engineering Considerations)", *IEEE Communications Magazine*, vol. 23, mayo de 1985, pp. 31-45.

SKLAR, B., *Digital Communications*, 2a. edición, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 2001.

SKLAR, B., "Rayleigh Fading Channels in Mobile Digital Communications Systems – Part 1: Characterization", *IEEE Communications Magazine*, vol. 35, septiembre de 1997, pp. 136-146.

SKLAR, B., "A Primer on Turbo Code Concepts", *IEEE Communications Magazine*, vol. 35, diciembre de 1997, pp. 94-101.

SLEPIAN, D., "On Bandwidth", *Proceedings of the IEEE*, vol. 64, núm. 3, marzo de 1976, pp. 292-300.

SMITH, B., "Instantaneous Companding of Quantized Signals", *Bell System Technical Journal*, vol. 36, mayo de 1957, pp. 653-709.

SMITH, J. R., *Modern Communication Circuits*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 2a. edición, 1998.

SOLOMON, L., "The Upcoming New World of TV Reception", *Popular Electronics*, vol. 15, núm. 5, mayo de 1979, pp. 49-62.

SPANIAS, A. S., "Speech Coding: A Tutorial Review", *Proceedings of the IEEE*, vol. 82, núm. 10, octubre de 1994, pp. 1541-1582.

SPILKER, J. J., *Digital Communications by Satellite*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1977.

STALLINGS, W., *Data and Computer Communications*, 5a. edición, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

STALLINGS, W., *ISDN and Broadband ISDN*, Macmillan Publishing Company, Nueva York, 1992.

STARK, H., F. B. TUTEUR y J. B. ANDERSON, *Modern Electrical Communications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

STIFFLER, J. J., *Theory of Synchronous Communication*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.

STUMPERS, F. L., "Theory of Frequency – Modulation Noise", *Proceedings of the IRE*, vol. 36, septiembre de 1948, pp. 1081-1092.

SUNDE, E. D., *Communications Engineering Technology*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1969.

SWEENEY, P., *Error Control Coding*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.

TAUB, H. y D. L. SCHILLING, *Principles of Communication Systems*, 2a. edición, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1986.

THOMAS, J. B., *An Introduction to Statistical Communication Theory*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1969.

THOMSON CONSUMER ELECTRONICS, INC., *RCA Self-Installer Manual (for DSS Receiver System)*, Thomson Consumer Electronics, Inc., Indianápolis, IN, 1994.

TORRIERI, D. J., *Principles of Spread-Spectrum Communication Systems*, Springer, Nueva York, 2004.

TURIN, G., "An Introduction to Digital Matched Filters", *Proceedings of the IEEE*, vol. 64, núm. 7, julio de 1976, pp. 1092-1112.

UNGERBOECK, G., "Channel Coding with Multilevel/Phase Signals", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-28, enero de 1982, pp. 55-67.

UNGERBOECK, G., "Trellis-Coded Modulation with Redundant Signal Sets", partes 1 y 2, *IEEE Communiactions Magazine*, vol. 25, núm. 2, febrero de 1987, pp. 5-21.

VAN DER ZIEL, A., *Noise in Solid State Devices and Circuits*, Wiley-Interscience, Nueva York, 1986.

VITERBI, A. J., "When Not to Spread Spectrum – A Sequel", *IEEE Communications Magazine*, vol. 23, abril de 1985, pp. 12-17.

VITERBI, A. J. y J. K. OMURA, *Principles of Digital Communication and Coding*, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1979.

WALDEN, R. H., "Performance Trends for Analog-to-Digital Converters", *IEEE Communications Magazine*, vol. 37, febrero de 1999, pp. 96-101.

WEAVER, D. K., "A Third Method of Generating and Detection of Single Sideband Signals", *Proceedings of the IRE*, vol. 44, diciembre de 1956, pp. 1703-1705.

WEI, L., "Rotationally Invariant Convolutional Channel Coding with Expanded Signal Space – Part II: Nonlinear Codes", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. SAC-2, núm. 2, septiembre de 1984, pp. 672-686.

WHALEN, A. D., *Detection of Signals in Noise*, Academic Press, Nueva York, 1971.

WHITAKER, J. C. (editor), *The Electronics Handbook*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.

WHITTAKER, E. T., "On Functions which Are Represented by the Expansions of the Interpolation Theory", *Proceedings of the Royal Society*, Edimburgo, vol. 35, 1915, pp. 181-194.

WIENER, N., *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications*, MIT Press, Cambridge, MA, 1949.

WILSON, S. G., *Digital Modulation and Coding*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.

WOZENCRAFT, J. M. e I. M. JACOBS, *Principles of Communication Engineering*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1965.

WU, W. W., E. F. MILLER, W. L.. PRITCHARD y R. L. PICKHOLTZ, "Mobile Satellite Communication", *Proceedings of the IEEE*, vol. 82, núm. 9, septiembre de 1994, pp. 1431-1448.

WYLIE, C. R., JR., *Advanced Engineering Analysis*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1960.

WYNER, A. D. y S. SHAMAI (SHITZ), "Introduction to 'Communication in the Presence of Noise' by C. E. Shannon", *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, núm. 2, febrero de 1998, pp. 442-446.

XIONG, F., "Modern Techniques in Satellite Communications", *IEEE Communications Magazine*, vol. 32, núm. 8, agosto de 1994, pp. 84-98.

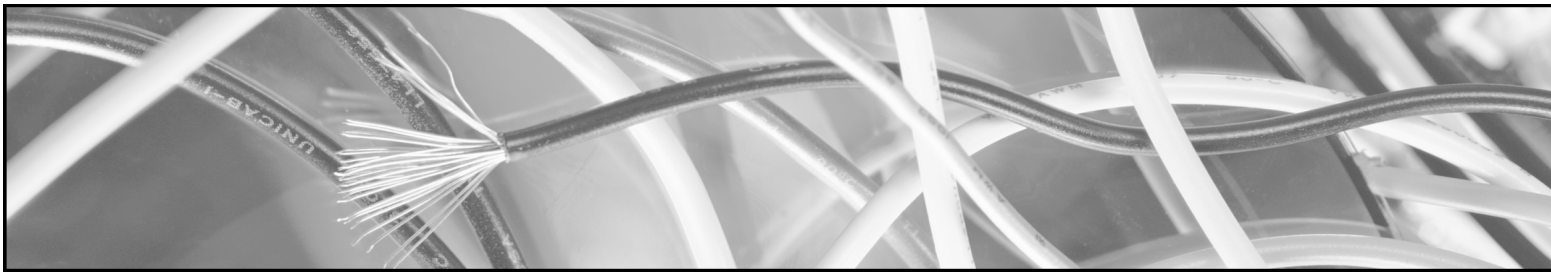
YOUNG, P. H., *Electronic Communication Techniques*, Merrill Publishing Co., Columbus, OH, 1990.

ZIEMER, R. E. y R. L. PETERSON, *Digital Communications and Spread Spectrum Systems*, Macmillan Publishing Company, Nueva York, 1985.

ZIEMER, R. E. y W. H. TRANTER, *Principles of Communications*, 4a. edición, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1995.

ZIEMER, R. E., W. H. TRANTER y D. R. FANNIN, *Signals and Systems*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 4a. edición, 1998.

ZOU, W. Y., "Comparison of Proposed HDTV Terrestrial Broadcasting Systems", *IEEE Transactions on Broadcasting*, vol. 37, diciembre de 1991, pp. 145-147.



RESPUESTAS A PROBLEMAS SELECTOS

Capítulo 1

1–5 1.97 bits

1–9 $H = 3.084$ bits

1–11 $H = 3.32$ bits, $T = 1.66$ s

Capítulo 2

2–9 36 dB

2–10 **(a)** 4.08×10^{-14} W **(b)** -103.9 dBm **(c)** 1.75 μV

2–16 $S(f) = -\dfrac{A}{\omega^2} + Ae^{-j\omega T_0}\left(\dfrac{1}{\omega^2} + j\dfrac{T_0}{\omega}\right)$, donde $\omega = 2\pi f$

Note que $S(0) = A\,T_0^2/2$.

2–40 **(a)** $(\operatorname{sen} 4t)/(4t)$ **(b)** 7

2–45 **(a)** $-0.4545A$ **(b)** $0.9129A$

2–47 **(a)** $(A_1 + A_2)/\sqrt{2}$ **(b)** $(\sqrt{A_1^2 + A_2^2})/\sqrt{2}$ **(c)** $|A_2 - A_1|/\sqrt{2}$
(d) $(\sqrt{A_1^2 + A_2^2})/\sqrt{2}$ **(e)** $(\sqrt{A_1^2 + A_2^2})/\sqrt{2}$

2–56
$$c_n = \begin{cases} \dfrac{AT^2}{2T_0}, & n = 0 \\ \dfrac{A\{e^{-j2\pi nT/T_0}[1 + j2\pi n(T/T_0)] - 1\square}{(2\pi n)^2/T_0}, & n \neq 0 \end{cases}$$

2–62
$$c_n = \begin{cases} 0, & n = \text{par} \\ \dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n = \text{impar} \end{cases}$$
(b) $\frac{1}{3}$ W

2–82 **(a)** 6.28 ms **(b)** 160

Capítulo 3

3–3 **(a)** $W_s(f) = d \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} \pi nd}{\pi nd}$
$$\begin{cases} 1, & |f - nf_s| \leq 2500 \\ \frac{-1}{1500}(|f - nf_s| - 4000), & 2500 \leq |f - nf_s| \leq 4000 \\ 0, & f \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde $d = 0.5$ y $f_s = 10{,}000$

(b) $W_s(f) = 0.5\left(\dfrac{\operatorname{sen} \pi\tau f}{\pi\tau f}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty}$
$$\begin{cases} 1, & |f - kf_s| \leq 2500 \\ \frac{-1}{1500}(|f - kf_s| - 4000), & 2500 \leq |f - kf_s| \leq 4000 \\ 0, & f \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde $\tau = 50 \times 10^{-6}$ y $f_s = 10{,}000$

3–6 $W_s(f) = -j\left(\dfrac{1 - \cos(\pi f/f_s)}{\pi f/f_s}\right)$
$$\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \begin{cases} 1, & |f - kf_s| \leq 2500 \\ \frac{-1}{1500}(|f - kf_s| - 4000), & 2500 \leq |f - kf_s| \leq 4000 \\ 0, & f \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

3–8 **(a)** 200 muestras/s **(b)** 9 bits/palabra **(c)** 1.8 kb/s **(d)** 900 Hz

3–14 **(a)** 5 bits **(b)** 27 kHz

3–24 **(a)** $\mathcal{P}(f) = \dfrac{A^2T_b}{4}\left[\dfrac{\text{sen}\,(\frac{1}{2}\pi f\,T_b)}{\frac{1}{2}\pi f\,T_b}\right]^2$

(b) $\mathcal{P}(f) = \dfrac{A^2T_b}{4}\left[\dfrac{\text{sen}\,(\frac{1}{4}\pi f\,T_b)}{\frac{1}{4}\pi f\,T_b}\right]^2 [\text{sen}\,(\frac{1}{4}\pi f\,T_b)]^2$

3–34 **(a)** 32.4 kb/s **(b)** 10.8 ksímbolos/s **(c)** 5.4 kHz

3–35 **(a)** 3.2 ksímbolos/s **(b)** 0.5

3–45 **(a)** 5.33 kb/s **(b)** 667 Hz

3–46 **(a)** 10.7 kb/s **(b)** 1.33 kHz

3–53 **(a)** 0.00534 **(b)** 0.427

3–64 **(a)** 40 Hz **(b)** 1280 Hz

Capítulo 4

4–9 **(a)** $g(t) = 500 + 200\ \text{sen}\ \omega_a t$, AM, $m(t) = 0.4\ \text{sen}\ \omega_a t$

(b) $x(t) = 500 + 200\ \text{sen}\ \omega_a t$, $y(t) = 0$

(c) $R(t) = 500 + 200\ \text{sen}\ \omega_a t$, $\theta(t) = 0$

(d) 2.7 kW

4–20 48.3□

4–23 $K\sqrt{m^2(t) + [\hat{m}(t)]^2}$, sí

4–28 **(a)** $(j2\pi f)/[j2\pi f + K_dK_vF_1(f)]$ **(b)** $(j2\pi f)(f_1 + jf)/[j2\pi f(f_1 + jf) + \boldsymbol{K}_d\,\boldsymbol{K}_v\,f_1]$

4–35 **(a)** 107.6 MHz **(b)** RF: por lo menos 96.81–96.99 MHz□IF: 10.61–10.79 MHz

(c) 118.3 MHz

Capítulo 5

5–1 **(a)** 6.99 dBk **(b)** 707 V **(d)** 7025 W **(e)** 18,050 W

5–6 $S(f) = \dfrac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\delta(f - f_c - nf_m) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^*\delta(f + f_c + nf_m)\right]$

donde $c_n = \dfrac{A_c}{2\pi}\left[2\theta_1\left(\dfrac{\text{sen}\,n\theta_1}{n\theta_1}\right) + 2A_m\,\dfrac{\cos n\theta_1\ \text{sen}\,\theta_1 - n\ \text{sen}\,n\theta_1\ \cos\theta_1}{1 - n^2}\right]$,

$A_m = 1.2$, y $\theta_1 = 146.4°$

5–7 **(a)** $s(t) = (\cos\omega_1 t + 2\cos 2\omega_1 t)\cos\omega_c t$, donde $\omega_1 = 1000\pi$

(b) $S(f) = \frac{1}{4}[\delta(f - f_c + f_1) + \delta(f + f_c - f_1) + \delta(f - f_c - f_1)$
$+ \delta(f + f_c + f_1)] + \frac{1}{2}[\delta(f - f_c + 2f_1) + \delta(f + f_c - 2f_1)$
$+ \delta(f - f_c - 2f_1) + \delta(f + f_c + 2f_1)]$

(c) 1.25 W **(d)** 4.5 W

5–14 **(b)** $s(t) = \Pi(t)\cos\omega_c t - \dfrac{1}{\pi}\ln\left(\dfrac{|t + \frac{1}{2}|}{|t - \frac{1}{2}|}\right)\text{sen}\,\omega_c t$

(c) máx$[s(t)] = \infty$

5–24 **(a)** $f_{\text{BPF}} = 12.96$ MHz, $B_{\text{BPF}} = 48.75$ kHz **(b)** 7.96 o 17.96 MHz

(c) 9.38 kHz

5–26 **(a)** $m(t) = 0.2\cos(2000\pi t)$, $M_p = 0.2$ V, $f_m = 1$ kHz
(b) $m(t) = -0.13\,\text{sen}\,(2000\pi t)$, $M_p = 0.13$ V, $f_m = 1$ kHz
(c) $P_{\text{AV}} = 2500$ W, $P_{\text{PEP}} = 2500$ W

5–31 $S(f) = \frac{1}{2}[G(f-f_c) + G^*(-f-f_c)]$, donde
$G(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(0.7854)\,\delta(f-nf_m)$, $f_c = 146.52$ MHz,
y $f_m = 1$ kHz. $B = 3.57$ kHz

5–35 $S(f) = \frac{1}{2}[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\delta(f-f_c-nf_m) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^*\delta(f+f_c+nf_m)]$, donde

$$c_n = 5(e^{j\beta}-1)\left(\frac{\text{sen}\,(n\pi/2)}{n\pi/2}\right),\ f_m = 1\text{ kHz},\ \beta = 0.7854,\ \text{y}\ f_c = 60\text{ MHz}$$

5–39 **(a)** 5.5 Hz

(b)
$$S(f) = \frac{A_c}{2}\left\{\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c) + \frac{D_f}{2\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\,=\,0}}^{\infty}\left(\frac{c_n}{nf_m}\right)\right.$$
$$\left.\times\ [\delta(f-f_c-nf_m) - \delta(f+f_c-nf_m)]\right\},$$

donde $c_n = 5e^{-jn\pi/2}\left(\frac{\text{sen}\,(n\pi/2)}{n\pi/2}\right)(n = 0)$,
$D_f = 6.98$ rad/V-s, $f_m = 100$ Hz, y $f_c = 30$ MHz

5–42
$$\begin{aligned}\mathcal{P}(f) \approx\ & 0.893[2\delta(f-f_c+5f_0) + \delta(f-f_c+3f_0)\\ &+ \delta(f-f_c-f_0) + 2\delta(f-f_c+3f_0) + \delta(f-f_c-5f_0)\\ &+ 2\delta(f+f_c-5f_0) + \delta(f+f_c-3f_0) + \delta(f+f_c+f_0)\\ &+ 2\delta(f+f_c+3f_0) + \delta(f+f_c+5f_0)]\end{aligned}$$

donde $f_0 \triangleq \dfrac{D_f}{2\pi} = 15.9$ kHz y $f_c = 2$ GHz

5–45 **(a)** 20 kHz

(b) $S(f) = \frac{1}{2}[M_1(f-f_c) + M_1(f-f_c)] + \dfrac{j}{2}[M_2(f+f_c) - M_2(f-f_c)]$

5–46 **(a)** $S(f) = \frac{1}{2}[X(f-f_c) + X^*(-f-f_c)]$,

donde $X(f) = \dfrac{A_c}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\dfrac{\text{sen}\,(n\pi/2)}{n\pi/2}\right)\delta(f-\frac{1}{2}nR)$, $\qquad R = 24$ kb/s

(b) 48 kHz

5–53 **(a)** 96 kHz **(b)** 101 kHz

5–67 **(a)** −45°, +45°, +135°, −135°, −45°, −45°, −45° **(b)** 1.13 Mb/s

Capítulo 6

6–2 **(a)** $\bar{x} = (2\sqrt{2}\,A/\pi)\cos(\omega_0 t + \pi/4)$ **(b)** $x(t)$ no es estacionaria

6–4 $2/\sqrt{\pi} = 1.128$

6–8 **(a)** 15 W **(b)** 11 W **(c)** 19 W

6–10 **(a)** No **(b)** Sí **(c)** Sí **(d)** No

6–17 **(a)** $\sqrt{B}$ **(b)** $R_x(\tau) = B[(\text{sen } \pi B\tau)/(\pi B\tau)]^2$

6–22 **(a)** $N_0K^2/(8\pi^2f^2)$ **(b)** ∞

6–25 $1/(2\pi f_0)$

6–30 **(a)** $H(f) = 10\left|\left[\left(1 + j\dfrac{f}{f_0}\right)^2\right]\right.$

(b) 0.690 f_0, donde $f_0 = 1/(2\pi RC)$

6–35 **(a)** No es WSS **(b)** $\mathcal{P}_x(f) = \dfrac{A_0^2}{4}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$ **(c)** Sí

6–42 $x(t) = m_1(t) + m_2(t)$, $y(t) = \hat{m}_1(t) - \hat{m}_2(t)$

$$\mathcal{P}_{m_1}(f) = A\Pi\left(\frac{f}{2(f_3 - f_c)}\right), \mathcal{P}_{m_2}(f) = A\Lambda\left(\frac{f}{f_c - f_1}\right)$$

6–44 $\mathcal{P}_v(f) = \frac{1}{4}[\mathcal{P}_x(f - f_c) + \mathcal{P}_x(-f - f_c)]$,

donde $\mathcal{P}_x(f) = T_b\left(\dfrac{1 - \cos \pi f T_b}{\pi f T_b}\right)^2$

6–50 **(a)** $y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & 0 < t < T \\ \frac{1}{2}, & t = T \\ 0, & t \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$ **(b)** El mismo pulso de la parte (a)

Capítulo 7

7–1 $P_e = \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}A/\sigma_0}$

7–11 $P_e = Q\left(\sqrt{0.25(E_b/N_0)}\right)$

7–14 **(a)** $H(f) = Te^{-j\pi fT}\left(\dfrac{\text{sen } \pi fT}{\pi fT}\right)$ **(b)** $B_{ec} = 1/(2T)$

7–16 $P_e = P(1)Q\left(\sqrt{\dfrac{2(-V_T + A)^2T}{N_0}}\right) + P(0)Q\left(\sqrt{\dfrac{2(V_T + A)^2T}{N_0}}\right)$

7–21 **(a)** 5×10^{-7} **(b)** 4.42×10^{-2}

7–22 **(a)** 2400 b/s **(b)** $(P_e)_{\text{general}} = 1.11 \times 10^{-14}$

7–27 3.2×10^{-7}

7–31 **(a)** 4800 b/s **(b)** 19,943 b/s

7–32 **(a)** 9.09×10^{-4} **(b)** 29.1 dB

7–35 Inferior por 11.3 dB

7–42 −100.9 dBm

7–47 **(a)** 651□ **(b)** Los componentes de baja frecuencia predominan

7–49 $(S/N)_{\text{salida}} = (5 \times 10^{-5})(P_s/N_0)$ para los cinco canales

Capítulo 8

8–9 **(a)** 25.6 dB **(b)** 36.3 W **(c)** −54.9 dBm

8–13 $G_a = \dfrac{h_{fe}^2 R_s}{h_{oe}(R_s + h_{ie})^2}$

8–17 **(a)** 129 K **(b)** −76.6 dBm

8–19 3.2×10^{-7}

8–22 **(a)** 19.8 dB **(b)** 7.52 dB **(c)** 4.67 dB

8–34 12.84 m de diámetro

8–41 20.6 kW

Apéndice B

B–1 0.3486

B–2 **(a)** 5/36 **(b)** 15/36

B–4 **(a)** 1/2 **(b)** 1/3

B–8 0.4375

B–11 **(a)** b **(b)** $1/b$ **(c)** $1/b^2$

B–21 51.0

B–26 **(a)** 1.337×10^{-11} **(b)** 0.9520

B–30 $f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi y}}\,[e^{-(\sqrt{y}+m)^2/(2\sigma^2)} + e^{-(\sqrt{y}-m)^2/(2\sigma^2)}], & y \geq 0, \\ 0, & y < 0 \end{cases}$

B–35 $B\sigma/\sqrt{2\pi}$

B–37 **(a)** 1/6 **(b)** Sí **(c)** 1/12

(d) $f(x_2|x_1) = \begin{cases} \frac{1}{12}(1 + x_2), & 0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq 4 \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$

B–46 **(a)** $f_y(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|Ax|} f_x\left(\frac{y}{Ax}, x\right) dx$ **(b)** $f_y(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|Ax|} f_{x_1}\left(\frac{y}{Ax}\right) f_{x_2}(x)\, dx$

ÍNDICE

A

Absoluto, ancho de banda, 103
Acceso múltiple, 572-579
  con asignación fija (FAMA), 572-577
  con asignación por demanda (DAMA), 573-576
  por división de código (CDMA), 372, 378, 609-610
  por división de frecuencias (FDMA), 572
  por división de tiempo (TDMA), 572, 574-576
Activación de puerta, 129-133
Activo, filtro, 247-248
ADC
  de aproximación sucesiva, 138, 141
  paralelo, 138, 141
  por conteo, 138, 140
  rápido, 138, 141
  serial, 138-141
Aliasing, 92
  PAM, 133
  transformada de Fourier discreta, 96
ALOHA, transmisión de paquetes de datos por, 576
AM a PM, conversión de, 242
Amplificador, 250-251
  clases A, B, C, D, E, G, T y S, 255-256
  IF, 284
  no lineal, 251-256
  pasabanda, 253-256
Amplitud, espectro de, 45, 80
  Véase también Espectro
Amplitud, modulación de (AM), 303-310
  detector, *Véase* Envolvente, detector de, Producto, detector de
  difusión digital, 309-310
  eficiencia de modulación, 305

envolvente compleja, 235-236, 303
espectro, 239, 305
estándares de difusión, 308-310
generación de, 306-308
potencia, 239, 305
señal a ruido, 515-518
transmisión en estéreo, 309
Análisis del balance de enlace, 579-599
Analógico(a)
conmutación (telefónica), 559
forma de onda, 5
fuente, 5
lazo de abonado, 553
sistema, 5
telefonía celular, 603-612
Ancho de banda, 101-109
a tres decibeles, 103
absoluto, 103
codificación, 28-29
equivalente, 103, 427
espectro limitado, 105
FCC, 105
nulo a nulo, 105
potencia, 105
ruido, 103, 427
señal AM, 305
señal BPSK, 108
señal FM, 324
señal multinivel, 178
señal PCM polar, 142-143
señal PM, 324
señal SSB, 312-316
sistemas analógicos, 532
sistemas digitales, 505
valor RMS, 427
3-dB, 103
Ángulos de vista a satélite, 596
Antenas, 581
área efectiva, 581
ganancia, 580-582
Aperiódica, forma de onda, 36
Apertura
antena, 581
de pulso, 137
PAM, 137
Asignación de frecuencia, 10-12, 308, 338, 605-610, 627-630, 638-639
AT&T FT-2000, sistema de fibra óptica, 601-603
AT&T TDM, jerarquía, 206-211
Atenuador
temperatura efectiva de ruido de entrada, 586-587
figura de ruido, 586-587
Autocorrelación, función de, 403, 404
para proceso blanco, 418, 433
proceso aleatorio complejo, 406
proceso pasabanda, 434-447
promedio de tiempo, 63
propiedades, 401
salida de filtro, 422
teorema de Wiener-Khintchine, 63, 408

B

Baja frecuencia (LF), 11
Balance de enlace, 592-595
ambiente urbano inalámbrico, 595
DSS, 640-642
fibra óptica, 603
PCS inalámbrico, 643-645
portadora a ruido (C/N), 593
satélite, 595-600, 640-642
Banda base
definición, 231
forma de onda, 231
PSD de señal digital, 415-418
S/N del sistema, 514-515
Banda lateral independiente (ISB), *Véase* Banda lateral única
Banda lateral residual (VSB), 316-318, 617, 633, 635
Banda lateral única (SSB), 312-316
envolvente compleja, 235-236
espectro de, 313
inferior (LSSB), 312
método de Weaver, 386
potencia pico de envolvente, 314
potencia promedio, 313
procesos aleatorios, 440
receptor de acoplamiento, 387, 548
señal a ruido, 519
SSB-AM-SC, 235-236, 312-316, 440
SSB-EV, 235-236
SSB-FM, 235-236
SSB-PM, 235-236
SSB-SQ, 235-236
superior (USSB), 312

transmisor de acoplamiento, 314-315
transmisor de filtro, 314-315
Banda milimétrica, 12
Bandas de frecuencia, 10-12, 308, 338, 605-610, 627-630, 638-639
Bandas de microondas, 11-12
Barrido de trama, 612
Baud, 152, 176
Bayes, teorema de, 668
BCH, códigos, 21
Bell 103,
módem, 347-349
Bessel, función de
filtro de, 249-250
modificada, 473, 496
de primer tipo, 324-326
Binit, 17
Bits
datos, 156-158
de paridad, 21
de relleno, 204
información, 16
paridad, 20-21
Bloqueo de inyección, 278
Bobinas de carga, 212
Boltzmann, constante de, 583
Butterworth, filtro, 246-247
2B1Q, código de línea, 563-564

C

Cálculo, 654-658
de energía a partir de la forma de onda, 40
diferencial, 640-641
numérico de PSD, 419-420
Canal, 9
alámbrico, 9
binario simétrico, 543
cableado, 9
de señalización común, SPADE, 573
dentro de banda (IBOC), 309, 337
Canal inalámbrico, 9
alámbrico, 9
capacidad, 18, 26, 531-533
CATV, 627-630
codificación, 8
desvanecimiento, 9
difusión por FM, 338
I, 233, 235-236, 283, 286
inalámbrico, 9
multicamino, 9, 643-645
Q, 233, 235-236, 283, 286
radio bidireccional, 338
ruido, 288
señalización común, SPADE, 573
simétrico binario, 543
sin distorsión, 83
televisión, 627-630,
Canales de CATV, 627-630
Canales en desvanecimiento, 9
Capacidad de canal, 18, 26, 30, 531-533
Carson, regla de, 324, 349
Cavidad, filtro de, 248-249
CCIR, 10
estándar de TV, 626, 631
CCITT, 10
jerarquía de TDM, 210
Véase también Módems
CDMA, telefonía celular por medio de, 608-609
Centro de gravedad, 678
Centro móvil de conmutación (MSC), 603
Cerámico, filtro, 248-249
Cifrado, 25
Cinta perforada, 160
Circuito
de cuatro hilos, 556-559
de dos hilos, 552, 556
modulador de fase, 320
modulador de frecuencia, 320, 328-329
teléfono, 552-559
Clase
amplificador A, B, C, D, E, G, 255-256
estaciones de AM A, B, C, D, 309
estaciones de FM A, B, C, D, 337
Codificación, 19-29
ancho de banda, 28-29
árbol, 24
ARQ, 19
BCH, 21
bloques, 20-21
canal, 8
canal binario simétrico, 543
cíclica, 21
codificación, 22-23
concatenada, 28
convolucional, 20, 22-24, 28
corrección de errores, 21
de fuente, 8

de voz, 199
decisiones absolutas, 23, 28
decisiones ponderadas, 23, 28
decodificación secuencial, 23, 28
decodificación, 23-25
decodificación Viterbi, 23, 28
detección de errores, 21
diferencial, 169-170
distancia Hamming, 20
entrelazado, 25
FEC, 19, 22-29
fuente, 8
ganancia, 25, 26, 28
generación de código, 22
longitud máxima, 21, 373-376
por fase auxiliar, 160, 168
Reed-Solomon, 21, 28
rendimiento, 25-29
rendimiento óptimo, 26-27
sistemática, 21
tasa, 20
TCM, 28-29
umbral, 25
voz, 199
Codificador
ADC, 138-142
DAC, 142
de voz, 199
Código de bloque sistemático, 21
Código de línea, 160-163, 563-564
densidad espectral de potencia, 163-169
eficiencia espectral, 179, 361-362
portadora T1, 211-212
portadora T1G, 212
ventajas y desventajas, 162
2B1Q, 563-564
Códigos
concatenados, 28
convolucionales, 22-24, 28
de bloque, 20-21
de longitud máxima, 21, 373-376
Gray, 141
para corrección de errores, *Véase* Codificación
seudorruido, 373-375
Coeficientes
series cardinales, 87
series de Fourier, 68-78
series de Taylor, 65
series ortogonales, 67
Comisión Federal de Comunicaciones (FCC), 10
Véase también Estándares
Comité Nacional de Sistemas de Televisión (Estados Unidos, NTSC), 620
Compansor, 147-151
A-Law, 150
sistema T1, 212
u-Law, 147-150
Comparación
con un sistema ideal, 26, 531-533
rendimiento de código, 25-29
sistemas analógicos, 532
sistemas digitales, 505
Comparador de nivel, 213
Componente de fase en cuadratura, 235-236, 286
proceso aleatorio pasabanda, 434-447
Componente dentro de fase, 233, 235-236, 283, 286
televisión, 620
Compresor, 148
línea T1, 211-212
línea de abonado digital (DSL), 559-564
líneas DS, 208
SONET, 208, 211
Véase también Compansor; Soluciones con módems por computadora
Compuesto, evento, 666
Comunicación de datos
Véase Soluciones por computadora; Señalización digital; Probabilidad de error en el bit
Comunicación
analógica, 5
digital, 5
historia, 2-5
ideal, 18-19, 26, 531-533
sistema, 8
Comunicaciones de retroalimentación, 19
Comunicaciones inalámbricas, 603-612, 637-640
Conductor de timbre (telefonía), 553
Conjunto, 665
Conjunto de base, 65-68
completo, 67
ortonormal, 65
Conjunto de eventos, 398-399
Véase también Procesos aleatorios
Conjunto/conjunta
CDF y PDF, 692-695
media, 694
probabilidad, 667
proceso estacionario, 404

Conmutación digital (telefónica), 559
Conmutación por intercambio de intervalos de tiempo, 559
Conmutador, 200
Constelación de señal, 353, 355-357
  televisión, 623
Continua por la derecha, 672
Control automático de ganancia (AGC), 516
Control por programa almacenado, 559
Conversión de PM a AM, 242
Conversión, de AM a PM, 242
Convertidor analógico a digital (ADC)
  conteo o rampa, 138-141
  paralelo o rápido, 138, 141
  serial, 138, 141
  tipos de, 138
  Véase también Modulación por código de pulsos
Convertidor digital a analógico (DAC), 138-142
  señalización multinivel, 352, 354
Convertidor elevador, 257-263
Convertidor reductor, 257-263
  digital, 288
Convertidor, elevador y reductor, 257-263
Convolución
  definición, 50, 58
  sistema lineal, 80
Corrección directa de error (FEC), 19, 22-29
  Véase también Codificación
Correlación, coeficiente de, 694
Correlación cruzada, función de, 404-406
  propiedades de, 404
  salida de sistema lineal, 424
Correlación, funciones de, 403-406
  autocorrelación, 63, 403, 404
  correlación cruzada, 404, 406
  procesos complejos, 406
  propiedades, 403, 404
Correlación, procesamiento de, 454-455
Coseno realzado, filtro de, 183-188
Costas, lazo enganchado por fase de, 310-312
  demodulación de DSB-SC y BPSK, 310-312
  para sincronización de portadora, 344
Covarianza, 695
  normalizada, 695
Cristal, filtro de, 247-249
Cruce por cero
  ancho de banda de, 105
  detector de, 272-273
Cuantización
  A-Law, 150
  no uniforme, 147-151
  ruido, 138, 510
  u-Law, 148-149
  uniforme, 138, 511
Chebychev, filtro de, 249-250
Chip, 373

D

DC, valor de, 36, 420
Decibel, 40-42
  dBk, 42
  dBm, 42
  dBmV, 42
  dBrn, 42
  dBW, 42
  ganancia, 40
  nivel de potencia, 42
  señal a ruido, 42
Decisión
  absoluta, 23, 28
  ponderada, 23, 28
Deénfasis y preénfasis en FM, 333-334, 528-530
Definición
  banda base, 231
  cálculo, 654, 655
  conjunto, 665
  definición, 231, 233-234
  DM, 192-199
  DPCM, 188-192
  DSB-SC, 310
  eficiencia, 305
  Espectro, 234-237
  FM, 318-333
  frecuencia, 43, 321
  función delta de Dirac, 51, 659-661
  función escalón unitario, 52
  función Sa(x), 54, 661
  funciones trigonométricas, 653-654
  modulación, 231, 233-234
  PAM, 129-137
  pasabanda, 231
  PCM, 137-151
  PM, 318-333
  porcentaje de AM, 303
  proceso aleatorio, 398

pulso rectangular, 54
pulso triangular, 54
PWM y PPM, 213-218
SSB-SC, 312-316
variable aleatoria, 669
Véase también Señalización digital
VSB, 316-318
Delta adaptable, modulación, 197-199
Delta de Dirac, función, 51, 659-661
espectro, 62
izquierda, 660
lados balanceados, 660
propiedades, 660-661
respuesta de impulso, 79, 83
Delta enfocada a un solo lado, función, 660
Demodulación de frecuencia, *Véase* Detector
Demoduladores retroalimentados
PLL de Costas, 310-312
PLL, 273-279
receptor FMFB, 526-528
Densidad de potencia, 581
Densidad de probabilidad, función de (PDF), 670, 693
condicional, 693
conjunta, 693
distribución discreta, 674
marginal, 694
medición de, 675
N-dimensional, 693
para la suma de dos variables aleatorias, 697-698
para salida de detector de envolvente, 444-447
para salida de detector de fase, 446
para salidas de detectores en cuadratura, 446
propiedades de, 672, 693
tabla de, 666
teorema de límite central, 698
Véase también Distribución
Densidad espectral de energía (ESD), 48
Densidad espectral cruzada, 424
Densidad espectral de potencia (PSD), 63, 408
ASK, 339
BPSK, 343
cálculo numérico, 419-420
códigos de línea, 163-169
condición para espectros discretos, 417
determinista, 63
espectro cruzado, 424
espectro ensanchado, 375
formas de onda periódicas, 77
FSK, 350-351
medición de, 419-420
MPSK, 352-355
MSK, 366
OFDM, 371
OQPSK, 358
para proceso blanco, 418, 433
Pi/4 QPSK, 358
proceso pasabanda, 437-440
procesos aleatorios, 407-420
propiedades de, 411
QAM, 355-359
QPSK, 358
ruido de FM, 522, 524
ruido de PM, 521-522
ruido térmico, 582-583
salida de filtro, 422
señal bipolar RZ, 168
señal multinivel, 178, 360
señal NRZ de Manchester, 169
señal pasabanda, 234
señal polar NRZ, 165
señal unipolar NRZ, 164-166
señal unipolar RZ, 165-167
señales digitales de banda base, 415
teorema de Wiener-Khintchine, 408-411
Véase también Espectro
WBFM, 330
Derivada, 654
reglas, 654
tabla de, 654-655
Descarga
archivos M de MATLAB, 7
archivos MathCAD, 8
del manual de soluciones para el estudiante, xix
del manual de soluciones, xix
Desviación
de frecuencia, 321
estándar, 677
pico de frecuencia, 322
Detección bit por bit, 477-506
Detector
BPSK, 344
coherente, 268
Costas PLL, 310-312
cruce por cero, 272-273
de conmutación, FM en estéreo, 391
diodo PIN (óptico), 601
discriminador balanceado, 269, 271, 526
envolvente, 265-266, 444-446

fase, 267, 273-275
FM en cuadratura, 270-272
FM estéreo, conmutado, 391
FM, 268-273, 278-279
FM, extensión de umbral, 599-600
fotodiodo en avalancha, 601
FSK, 352
ideal de envolvente, 265-266, 444-446
incoherente, 268
IQ, 286
lazo enganchado por fase, 273-279
no coherente, 268
OOK, 339
pendiente de FM, 268-269
PLL, AM coherente, 279-280
PLL, FM o PM, 278-279
producto, 266-268
síncrono, 266-268
Véase también Receptores digitales; Demoduladores retroalimentados
Detector de FM balanceado, 268
discriminador, 269, 271, 526
Determinística, forma de onda, 6
Diafonía, 200
Diagrama en ojo, 170-171
Difusión
de video digital (DVB), 635
digital por AM, 309-310
satelital directa, 570-571
Digital
balance del enlace de sistema, 594, 640-645
comparación de sistemas, 505
forma de onda, 5
formatos de señal, 160-163
fuente, 5
repetidor, 171-173
sistema, 5
Véase también Soluciones por computadora; Receptores digitales; Señalización digital
ventajas de, 5-6
Dimensionalidad, teorema de, 93
pasabanda, 245
Dirichlet, condiciones de, 45
Discriminador de frecuencia, 269, 271, 526
Dispersión ionoesférica, propagación por, 16
Dispersión tropoesférica, 16
Dispositivos en cascada
figura de ruido, 590
temperatura de ruido, 591
Distancia en declive, satélite, 596
Distorsión
armónica, 252
audio, 86
datos, 86
de intermodulación, 254-255
de tercer orden, 252-255
harmónica total, 252
intermodulación, 252-255
lineal, 83-84
modulación cruzada, 254-255
no lineal, 251-256
video, 86
Distribución acumulativa, función de (CDF), 669, 692
distribución continua, 672
distribución discreta, 674
N-dimensional, 692
propiedades, 672, 693
tabla de, 666
Distribución
binomial, 679—682
continua, 672
de Poisson, 682
de probabilidad, función de, *Véase* Distribución acumulativa, función de
de puntos, 672
discreta, 672
gaussiana, bivariable, 695
gaussiana, *N*-dimensional, 429-433
laplaciana, 543
mezcladas, 674
mixta, 674
N-dimensional, 692
Rayleigh, 444-447, 495-496
Rician, 473, 496
senoidal, 687
unidimensional, 682-687
uniforme, 682
DM por pendiente continuamente variable (CVRD), 197-199
Doble banda lateral con portadora suprimida (DSB-SC), 310
demodulación de, 310-312
envolvente compleja, 235-236
señal a ruido, 518

E

Eb, 485, 486, 488, 490, 491, 494, 497
Eb/No, 594

evaluación del balance de enlace, 594
Ecualizador adaptable, filtro, 181
Ed/No, 482
Efecto de cerca de piquetes, DFT, 96
Efecto silenciador, sistemas de FM, 521
Eficiencia
de potencia, 306-307
eficiencia de conversión, 306
modulación, 305
Eficiencia espectral, 179, 361
señales digitales pasabanda, 361-362
señal multinivel, 179, 361-362
TCM, 28-29
EIA, 694
Emisor de luz, diodo (LED), fibra óptica, 600
Entrelazado, código, 25
Entrelazado, televisión, 613, 631, 632, 633
Entropía, 17
Envolvente
compleja, 232, 235-236
real, 265-266, 444-446
Véase también Envolvente compleja
Envolvente compleja, 230-237
AM, 235-236, 303
DSB-SC, 235-236
FM, 235-236, 318
modulación, 233-237
PM, 235-236, 318
potencia, evaluación de, 237
presentación en vectorescopio, 623
QM, 235-236
ruido, 434-447
salida de convertidor elevador, 259
salida de convertidor reductor, 259
señal con ruido, 514
señal recibida con ruido, 245-246
SSB-AM-SC, 235-236, 312
SSB-EV, 235-236
SSB-PM, 235-236
SSB-SQ, 235-236
Envolvente, detector de, 265-266, 444-446
entrada gaussiana, 444-447
PDF para salida, 444-447
Equi-probable, 479
erf(x), función, *Véase* Q(z), función
erfc(x), función, *Véase* Q(z), función
Ergódico, proceso aleatorio, 401
Error
cuantización de, 138
de fase, PLL, 276
de símbolo, 506-507
función, *Véase* Q(z), función
probabilidad de, *Véase* Probabilidad de error en el bit; Probabilidad de error
velocidad de, *Véase* Probabilidad de error en el bit; Probabilidad de error
Escalón unitario, función
definición, 51
espectro, 62
Espacio
de muestreo, 665-666
(señalización binaria), 160, 348
Espectro(s)
amplitud, 45, 80
analizadores, 419-420
de doble banda, 43
de fase, 45, 80
de línea (funciones delta), 73-78
de magnitud, 45, 80
de señales periódicas, 73-78
de un solo lado, 72
definición, 43
densidad espectral de potencia, 63, 408
doblado, 92
doble lado, 43
electromagnético, 10-12
energía, 48
escalón unitario, 62
fase, 45
forma de onda periódica, 73-78
forma en cuadratura, 44
función delta de Dirac, 62
limitado, ancho de banda de, 105
línea, 73-78
magnitud, 45
MATLAB, 94-99
NBFM, 329
PAM, 130, 135
pulso de Sa(x), 55, 56
pulso rectangular, 54, 55
pulso triangular, 57
señal AM, 239, 305
señal DSB-SC, 313-314
señal FM, 323-328
señal pasabanda, 234-237
señal PM, 323-328
señal SSB, 314
señal VSB, 317
señales digitales pasabanda, 360
televisión, 617, 627-630, 635

TV digital, 635
un solo lado, 72
variable de frecuencia, 43, 321
Véase también Densidad espectral de potencia
Espectro ensanchado (SS), 372-379
bandas de frecuencia, 379
de secuencia directa, 373-379
efecto de interferencia, 378
híbrido, 373
por salto de frecuencia, 379
respuesta a ruido, 378
salto de frecuencia, 379
secuencia directa, 373-376
secuencia PN, 373-376
señal de ensanchado, 372
superposición, 379
Véase también Espectro ensanchado
Estacionalidad de orden *N*, 399
Estacionario, 399-401
conjunto, 404
en sentido estricto, 399
orden *N*, 399
sentido amplio, 403
sentido estricto, 399
Estacionario en sentido amplio, 403
propiedades de, 403
Estadísticas
bivariantes, 694
de fuente, 479
N-dimensionales, 692-694
Unidimensionales, 669-679
Estado de las redes celulares de 2G, 611
Estándares
asignaciones de frecuencia, 11-12
asignaciones de frecuencia de canal de cable, 627-630
asignaciones de frecuencia de televisión, 627-630
bandas de frecuencia de espectro ensanchado, 379
bandas de frecuencia de Wi-Fi, 638
bandas de frecuencia de Wi-Max, 639
CATV, 627-630
de Wi-Fi (802.11), 638
de Wi-Max (802.16), 639
difusión por AM, 308
difusión por FM, 337-339
DSL, 559-564
frecuencias intermedias, 286
ISDN, 562-564
módems para datos por cable, 636-637
radiodifusión vía satélite, 577-579
redes de datos inalámbricas, 637-640
sistemas de cable HRC, 631
sistemas de cable IRC, 631
SONET, 208, 211
teléfono, 206-212, 559-567
teléfono celular, 605, 607, 608
televisión, 615, 631, 633
TV digital, 633
Véase también Módems
Estimación
asintóticamente completa, 420
consistente, 420
de promedio móvil (MA), 420
de PSD, 419-420
inconsistente, 420
sesgada, 420
Etapa de duplicación, 261
Etapa triplicadora, 265
Euler, teorema de, 653
Evento
compuesto, 666
independiente, 668
nulo, 667
simple, 666
seguro, 667
Expansor, 150
Véase también Compansor
Extensión de umbral para FM, 599-600

F

Factor de carga, compresión-expansión, 150
Fase
aleatoria de inicialización, 436
de inicialización, 436
desviación pico, 322
espectro, 45, 80
respuesta de frecuencia, 45, 80
Fase, detector de, 267
característica de diente de sierra, 274-275
característica de triángulo, 274-275
característica senoidal, 267, 274-275
Fasor, 42
FCC, ancho de banda de, 105
Fibra óptica de un solo modo, 601
Fibra óptica multimodal, 601
Figura de ruido, 586
atenuador, 588-589
de ruido puntual, 585
dispositivos en cascada, 590

línea de transmisión, 589
nivel, 585
promedio, 588-589
Filtro
acoplado, 454-455
activo, 247-248
Bessel, 249-250
Butterworth, 249-250
cavidad, 248-249
cerámico, 248-249
Chebyshev, 249-250
correlación, 454-455
coseno elevado, 183-188
cristal, 247-249
de seguimiento, PLL, 273
ecualizador, 137, 181
integra y desecha, 455
interferencia intersimbólica, 180-188
LC, 247-249
línea de transmisión, 248-249
lineal, 79-86
mecánico, 247-249
no lineal, 251-256
Nyquist, 183-188
onda acústica de superficie, 248-249
pasabaja de RC, 81-83, 424
pasabaja equivalente, 240-242, 297
pasabanda, 240-244
pasivo, 247-249
PLL de rastreo, 273
preblanqueado, 482-483
predicción lineal, 188
predicción para DPCM, 188-189
Véase también Filtro lineal
Filtro acoplado, 447-458
caso de ruido blanco, 449-454
caso de ruido coloreado, 482-483
función de transferencia, 448
integra y desecha, 452-453
procesamiento de correlación, 454-455
transversal, 455-458
Filtro ecualizador, 181
adaptable, 181
PAM, 137
FM de Armstrong, método de, 328
FM digital, difusión de, 337-339
FM en cuadratura, detector de, 270-272
Forma(s) de onda
aleatoria, 6, 398-399
analógica, 5
banda base, 231
codificadores de voz, 199
de secuencia M, 373-376
determinística, 6
digital, 5
dimensiones, 93, 152
energía, 34, 40
físicamente realizable, 34
limitada en banda, 86
monitor de televisión, 612
pasabanda, 230-233, 235-236
periódica, 36
potencia, 34, 40
ruido, 33
secuencia m, 373-376
señal, 33
ventaneada, 95
Formas indeterminadas, 655
Formatos de señal digital, 160-163
Fotodiodo de avalancha (APD), 601
Fourier, series de, 68-78
compleja, 68-70
en cuadratura, 70-71
MATLAB, 100-104
polar, 71-73
por medio de DFT, 100-104
propiedades, 69-70
Fourier, transformada de,
definición, 43
discreta, 94-104
DTV de coseno discreto, 634
MATLAB, 94-99
propiedades, 46-47
técnicas de evaluación, 44
teoremas, 50
Frecuencia, 43, 321
asignación, 10-12, *Véase también* Estándares
definición, 43
espectro, 43
extremadamente alta (EHF), 11
IF, 284
instantánea, 268, 319
intermedia (IF), 284
múltiple de tono dual (DTMF), 555
portadora, 231, 232, 234
relativa (probabilidad), 666
Frecuencia, modulación de (FM), 318-333
ancho de banda, 324, 349
audio de TV, 615, 619, 631, 633
banda ancha, 329-333
banda estrecha, 328-329

canales de FCC, 338
circuito, 320, 328-329
detector, 268-273, 278-279, 526
detector en cuadratura, 270-272
difusión digital, 337-339
en estéreo, 336, 619
envolvente compleja, 235-236, 318
estándares, 337-339
extensión de umbral, 599-600
funciones de Bessel, 324-326
generación directa, 329
generación indirecta, 328
índice, 322, 347
multiplicador de frecuencia, 263-265
preénfasis y deénfasis, 333, 528-530
propiedades, 333-334
receptor con retroalimentación, 526-528
regla de Carson, 324, 349
representación, 235-236, 318-333
señal a ruido, 528-530
transmisor, 382, 388
Véase también Detector; Señalización digital
Friis, teorema de
ruido, 590
señal, 581
FSK de fase continua, 346
FSK por fase discontinua, 346
FT-2000, sistema de fibra óptica, 601-603
FTP, archivos por, 7
Fuente, 5
Fuga, transformada de Fourier directa, 96
Función(es)
analítica, 87
autocorrelación, 63, 403, 404
Bessel, 324-326, 473
CDF, 669, 692
de base, 65-68
de Q(z) delimitada, 662, 686
limitada por banda, 86
ortogonales normalizadas, 66
ortonormales, 65
Función delta
Dirac, 51, 659-661
Kronecker, 66
espectros, 73-78

G

Galaxy, satélite, 595-600
Ganancia,
antena, 580-581
codificación, 25, 26, 28
dB, 40
de potencia disponible, 585, 590
de procesamiento, espectro ensanchado, 378
potencia, 81, 421
Gaussiano/gaussiana, 683
área bajo PDF, 662-663, 684-687
CDF, 684
media, 684
PDF bivariante, 695
PDF *N*-dimensional, 429-433
PDF unidimensional, 683
proceso aleatorio, 429-433
propiedades, 428-429
variable aleatoria, 682-687, 695
varianza, 684
G.DMT, línea de abonado digital, 560-561
Generador de forma de onda arbitraria, 281
Generador de función, 281
G.Lite, línea de abonado digital, 560-561
Gráfico, función Q(z), 684
Gray, código de, 141
GSM, telefonía celular por, 608-609
Guía de información sobre MATLAB, 706-709

H

Hamming, ponderación, 20
Hartley, 17
Hilbert, transformada de, 313
tabla de, 659
utilizada en SSB, 235-236, 312-316, 440
Historia de la comunicación, 2-5
HRC, sistemas de cable, 631

I

I, canal, 233, 235-236, 283, 286
iDEN, estándar de telefonía celular, 608, 609
Identidades trigonométricas, 653-654
Identificador de llamada, 555
Impedancia intrínseca de espacio libre, 581
Impulso
función, 51, 659-661
muestreo, 90-93
respuesta, 79, 83
Independencia estadística, 668, 693
Independientes

eventos, 668
variables aleatorias, 693
Índice
digital (PSK y FSK), 343
modulación de fase, 322
modulación de frecuencia, 322, 347
modulación digital, 343
porcentaje de AM, 303
Información, 16-18
absorción, 5, 8
analógica, 5
bits, 16
capacidad, 18, 531-533
digital, 5, 16
entropía, 17
fuente, 5, 8
promedio, 17
velocidad, 18
Integra y desecha, filtro de, 452-453
Integral(es), 641
cálculo, 655-658
definitivas, 656-658
evaluación por partes, 656
indefinidas, 656-657
tabla de, 656-658
técnicas de evaluación, 656
Intensidad de campo, 581
correlación cruzada, 404, 406
delta de Dirac, 51, 659-661
delta de Kronecker, 66
escalón unitario, 52
ortogonal, 65
PDF, 670, 693
pulso rectangular, 54
pulso triangular, 54
Q(z), 662-663, 684-687
respuesta de frecuencia, 80
respuesta de impulso, 79, 83
Sa(x), 54, 661
salida de sistema lineal, 80
sinc, 54
transferencia, 80
transferencia de potencia, 81
Interfaz
Véase Líneas de abonado digital (DSL); ISDN; Estándares
Interferencia, 288
intersimbólica (ISI), 180-188
Intermodulación
distorsión, 252-255
interferencia, 288
Internet, archivos por ftp, 7
Intersección de conjuntos, 666
IQ, detector de, 286
IRC, sistemas por cable de, 631
IS-136, estándar de telefonía celular, 608, 609
IS-54, estándar de telefonía celular, 608, 609
IS-95, estándar de telefonía celular, 608, 609
ISDN, 562-564
banda ancha, 562
banda estrecha, 562-564
código de línea 2B1Q, 563-564
de velocidad básica, 562
de velocidad primaria, 559
interfaz S, 562-563
interfaz T, 562-563
interfaz U, 562-563
NT1, NT2, 562-563

J

Jacobiano, 697
Jerarquía de TDM Estadounidense, 206-207

K

Kronecker, función delta de, 66

L

L'Hospital, regla de, 655
Láser, diodo, fibra óptica, 600
Lazo, *véase* Lazo enganchado en fase
Lazo cuadrático, 311
Lazo de abonado (telefónico)
analógico, 552-555
digital, 562-564
Lazo enganchado en fase (PLL), 273-280
analógico, 274
como un filtro rastreador, 273
costas, 310-312
digital, 274
para demodulación de FM o PM, 278-279
para detección coherente de AM, 279-280
para sincronización de portadora, 337, 507
para sintetizador de frecuencia, 279-280
Lazo local (telefónico), 552-559
LC, filtro de, 247-249
Leibniz, regla de, 655
Limitador, 256-257
absoluto, 256-257
Límite central, teorema de, 698

Línea de transmisión
figura de ruido, 589
filtro, 248-249
temperatura efectiva de ruido de entrada, 589
Línea digital asíncrona, 202
Línea digital síncrona, 202
Lineal
amplificador, 250-251
distorsión, 83
modulación, 235-236
operador, 36
sistema, 79
Lineal, filtro, 79-86
Véase también Filtro
Líneas DS-1, DS-2, DS-3, etcétera, 206-209
Líneas de abonado digital (DSL), 559-564
G.DMT y G.Lite, 560-561
ISDN, 562-564
Lista de símbolos, xxi-xxv
Longitud límite, código convolucional de, 22

M

Manchester, señalización, 160-161, 168
Marca (señalización binaria), 160, 348
Marcación por pulso, 555-556
Marcación, por pulso y por tono, 551-552
MathCAD, 7-8
archivos por ftp, 7-8
descarga de archivos MathCAD, 8
DFT, 94, 99, 104
MATLAB, 7
Apéndice C, 706-709
archivos por ftp, 7
balance de enlace inalámbrico, 643-645
BER, 645
CNR, 644
descarga de archivos M de MATLAB, 7
DFT, 94, 98-99, 102-104
ejemplo de FFT, 98, 102
guía informativa, 706-709
programación, 706-709
respuesta de filtro, 535-539
señalización binaria, 156
señalización multinivel, 159
Matriz de covarianza, 430
MC144572 ISDN U, transceptor, 563
MC145474 ISDN S/T, interfaz, 563
MC14554 codec telefónico, 563
Mecánico, filtro, 247-249
Media frecuencia (MF), 11
Media potencia, ancho de banda de, 103
Media, valor de, 677, 694
Véase también DC, valor de
Mediana (estadísticas), 678
Medición de PSD, 419-420
Medida de información, 16
Método directo para FM, 329
Método indirecto para FM, 328
Mezclador, 257-263
asimétrico, 262
audio, 259
balanceado simple, 262
de banda lateral única, 258
desbalanceado, 262
doblemente balanceado, 262
Moda (estadísticas)
Modelo de sistema de comunicación, 8
Módems
Bell, 103, 202, 255, 347-349
datos por cable, 636-637
V.32 bis, 357
V.90, 56 kb/s, 151
velocidad máxima de datos de línea telefónica, 30
Modificada de Bessel, función, 473, 496
Modo de transferencia síncrona (STM), 213
Véase también Multiplexión por división de tiempo (TDM)
Modulación, 9
AM, 235-236, 303
envolvente compleja, 233-236
Modulación angular, 318-333
Véase también Frecuencia, modulación de; Fase, modulación de
Modulación de alto nivel, 306
Modulación de AM de porcentaje, 303
Modulación de amplitud en cuadratura (QAM), 355-358
error de símbolo, 507
espectro, 359-361
Modulación de amplitud negativa, 303
Modulación de ángulo de banda estrecha, 328-329
Modulación de encendido-apagado, 340-342
ancho de banda, 340
detección coherente, 488-494
detección incoherente, 494-499
detector, 341
fibra óptica, 601
probabilidad de error en el bit, 489, 490, 497
PSD, 340
sistema de fibra óptica FT-2000, 601-603
Modulación de fase (PM), 318-333

circuito, 320
envolvente compleja, 235-236, 318
índice, 322
señal a ruido, 519-523
Véase también Modulación por corrimiento de fase
Modulación de frecuencia de banda ancha (WBFM), 329-333
Modulación de frecuencia moderada (TFM), 367
Modulación delta, 192-199
adaptable, 197-199
Véase también DM de pendiente continuamente variable (CVSD)
Modulación digital, *Véase* Señalización digital
Modulación en cuadratura
envolvente compleja, 235-236
QAM, 355-358, 503
televisión a color, 620-624
Modulación óptima, 531
Modulación por amplitud de pulso (PAM), 129-137
muestreo instantáneo, 133-137
muestreo natural, 129-133
plana, 133-137
Modulación por ancho de pulso (PWM), 213-215
para AM de alta potencia, 306-307
Modulación por codificación Trellis (TCM), 28-29
Modulación por código de pulsos (PCM), 137-151
ancho de banda, 142-143
diagrama en ojo de, 170-171
diferencial, 188-192
probabilidad de error en el bit, 477-506
PSD de, 163-169
sistema T1 de PCM, 211-212
SNR, 143-151, 508-513
V.90, módem, 151
Véase también Multiplexión por división de tiempo
Modulación por corrimiento de amplitud (ASK)
Véase Modulación de encendido-apagado
Modulación por corrimiento de amplitud en cuadratura, *Véase* Modulación en cuadratura (QAM)
Modulación por corrimiento de fase, *Véase* Modulación por corrimiento de fase binaria; Modulación por corrimiento de fase diferencial; Modulación por corrimiento de fase M-aria; Modulación por corrimiento de fase en cuadratura
Modulación por corrimiento de fase binaria (BPSK), 106-109, 339, 343-344
ancho de banda, 108
con codificación, 26, 28
detección de filtros acoplados, 454-455
espectro, 344
probabilidad de error en el bit, 490, 491
Véase también Modulación por corrimiento de fase diferencial
Modulación por corrimiento de fase diferencial (DPSK), 345, 500-502
probabilidad de error en el bit, 500
Modulación por corrimiento de fase en cuadratura (QPSK), 352-353
asimétrica, 358
con codificación, 28
espectro, 359-361
probabilidad de error en el bit, 502
Modulación por corrimiento de fase en cuadratura desplazada (OQPSK), 356
Modulación por corrimiento de fase *M*-aria (MPSK), 352-353
error de símbolo, 506
Modulación por corrimiento de frecuencia (FSK), 339, 338-345
detección incoherente, 498-499
detector, 352
espectro, 350-351
módem Bell 103, 347-349
probabilidad de error en el bit, 492, 494, 499
señalización ortogonal, 494
Modulación por corrimiento mínimo (MSK), 362-367
FFSK, 365
GMSK, 366, 608
probabilidad de error en el bit, 502
Tipo I, 365
Tipo II, 365
Modulación por duración de pulso (PDM), *Véase* Modulación por ancho de pulso (PWM)
Modulación por inversión de fase (PRK), *Véase* Modulación por corrimiento de fase binaria
Modulación por posición de pulso (PPM), 213-215
Modulación por tiempo de pulso, 213-215
Modulación rápida por corrimiento de frecuencia (FFSK), 365
Modulador balanceado, 262
Modulador de conmutación, 261
Módulo de asignación numérica (NAM), 606
Momentos
bidimensionales, 694
desviación estándar, 677
media, 677
r-ésimo momento, 677
unidimensionales, 677

varianza, 677
Motion pictures experts group (MPEG), 634
Móvil avanzado, sistema telefónico (AMPS), 603-607
MPEG, video, 634
MSK con filtro gaussiano, 366, 608
MTS, sonido en estéreo, 619
Multiplexión
división de código, 372, 378, 609-610
división de tiempo, 199-212, 566-567
inteligente por división de tiempo, 204
por división de frecuencia (FDM), 333-337
por división de frecuencia ortogonal (OFDM), 367-372
por división de longitud de onda densa (DWDM), 565, 566
Multiplexión por división de tiempo (TDM), 199-212, 566-567
bit de entrelazado, 204
bits de relleno, 204
caracter de entrelazado, 204
jerarquía CCITT, 210
jerarquía de América del Norte, 206-212
por división de tiempo estadístico, 204
sistemas pasabanda, 565-567
SONET, 208, 211
Multiplicador
de cuatro cuadrantes, 260, 262
de dos cuadrantes, 260, 262
de frecuencia, 263-265
de un cuadrante, 260, 262
detector de producto, 266-268, 439
mezclador, 257-263
Multivariante
transformación funcional, 696-698
estadísticas, 692-694
Mutuamente exclusivo, 667
Muy alta frecuencia (VHF), 11
Muy baja frecuencia (VLF), 11

N

Nats, 17
N-dimensional
Estadísticas, 692-694
PDF gaussiana, 430
Nivel de segmentación, 213
No lineal
amplificador, 251-256
canal, 288
distorsión, 251-256
Nulo a nulo, ancho de banda de, 105
Número de equivalencia de timbre (REN), 555
Número de servicio electrónico (ESN), 606
Números complejos, 653-654
Nyquist
filtro de, 183-188
frecuencia, 89
primer método de (cero ISI), 182-183
segundo método, 188

O

OFDM, 367-372, 638-639
Oficina central (telefónica), 552-559
Onda acústica de superficie, filtro de (SAW), 248-249
OnStar, 611
Operador
ángulo, 42, 71
conjugado, 46
convolución, 58
lineal, 36, 79
parte imaginaria, 71
parte real, 71
promedio conjunto, 676
promedio de tiempo, 35
Transformada de Fourier, 43
Transformada de Hilbert, 313, 659
valor absoluto, 45
Órbita geosíncrona (GEO), 568
Órbita síncrona, 568
Ortogonal
FSK, 362, 494
funciones, 65
procesos aleatorios, 405
series, 67
variables aleatorias, 695
Oscilador
síntesis digital directa (DDS), 281
sincronización, 278
controlado por voltaje, 273

P

Paley-Wiener, criterio, 79
PAM con muestreo instantáneo, 133-137
PAM de muestreo natural, 129-133
PAM plana, 133-137

Parseval, teorema de, 48
Pasabanda,
canal, 9, 231-233
definición, 231
espectro, 234-237
filtro, 240-244
forma de onda, 232
limitador, 256-257
potencia de señal, 237
proceso aleatorio, 434-447
representación, 230-233
teorema de dimensionalidad, 245
teorema de muestreo, 244-245
transmisión sin distorsión, 242-244
Pascal, triángulo de, 681
PCS, teléfonos celulares, 610
PDF marginal, 694
Pendiente, detector de, 268, 270
Pérdida
espacio libre, 582, 593
múltiples trayectorias, 595, 642-645
Pérdida en trayectoria
ambiente urbano, 595
espacio libre, 582, 593
múltiples trayectorias, 595, 642-645
Periodograma, 419
Pi/4 QPSK, 358-359, 608
PIN, diodo, 601
Planck, constante de, 583
Portadora
circuitos, 231, 281-289
frecuencia, 231, 232, 234
profesional de televisión, 619
retraso, 244
sincronización, 267, 507
suprimida, 310
Potencia
ancho de banda de, 105
de ruido disponible, 583
instantánea, 37
normalizada, 39-40
pico de envolvente, 238
proceso aleatorio, 421
promedio, 37, 64, 421
radiada efectiva (ERP), 616-617
radiada isotrópica efectiva (EIRP), 579
recibida, 581
ruido térmico, 582-583
señal AM, 239, 305
señal pasabanda, 237
valor en decibeles, 42
Potencia normalizada, 39, 64, 421
señal pasabanda, 237
Potencia pico de envolvente (PEP), 238
señal AM, 305-306
señal SSB, 313
Potencia promedio, 37, 64, 421
señal SSB, 313
señal AM, 305-306
señal pasabanda, 237
Preblanqueado, filtro de, 482-483
Predicción, filtro DPCM de, 188
Preénfasis y deénfasis en FM, 333-334, 528-530
Probabilidad, 666
a priori, 479
baja de intercepción (LPI), 372
condicional, 668
conjunta, 667
de sincronización de trama falsa, 202
de transición, 543
frecuencia relativa, 666
simple, 666
Véase también Distribución
Probabilidad de error
límite de Shannon, 27
Véase también Probabilidad de error del bit
Probabilidad de error en el bit, 10, 25, 476-507
BPSK, 490, 491
BPSK con codificación, 26, 28
cálculo de, 477-506
codificación óptima, 26-27
comparación de sistemas, 504-506, 537-541
con codificación, 26, 28
detección de filtro acoplado, 481-482
DPSK, 500
FSK, detección coherente, 491-494
FSK, detección incoherente, 499
límite de Shannon, 27
MSK, 502
OOK, detección coherente, 489, 490
OOK, detección incoherente, 497
para ruido auditivo gaussiano, 479-481
QPSK, 502
relacionada al error de símbolo, 507
repetidores, 173
señal bipolar, 486-488
señal polar, 486
señal unipolar, 482-483
señalización multinivel, 506-507
Proceso blanco limitado en banda, 433
Proceso de ruido blanco, 418, 433
Proceso de ruido de banda estrecha, 434-447

propiedades de, 437-440
Proceso(s) aleatorio(s)
a través de sistemas lineales, 422-426
banda lateral única, 440
blancos, 418, 433
complejo, 406
continuo, 399
definición, 399
densidad espectral de potencia, 407-420
discreto, 399
ergódicos, 401-402
estacionariedad, 399
estacionariedad en sentido amplio, 403
estacionariedad en sentido estricto, 399
funciones de correlación, 403-405
gaussianos, 429-433
no correlados, 405
ortogonales, 405
pasabanda, 434-447
potencia promedio, 421
valor de DC, 421
valor RMS, 421
Producto, detector de, 266-268, 439
procesos aleatorios, 439
Programación de archivos M de Matlab, 706-709
Promedio(s)
conjunto, 401, 676
estadísticos, *Véase* Promedio conjunto
figura de ruido, 586
información, 17
móvil autorregresivo (ARMA), 420
potencia, 37, 64, 237, 421
temperatura efectiva de ruido de entrada, 586-587
tiempo, 35
valor de DC, 36
Promedio conjunto, 401, 676, 693
autocorrelación, 403
desviación estándar, 677
media, 677, 694
N-dimensional, 693
r-ésimo momento, 677
unidimensional, 401, 676
varianza, 677
Propagación
de línea de vista (LOS), 15-16
de onda celestial, 14
de onda electromagnética, 12-16
de onda terrestre, 13-14
por dispersión, 16
por múltiples trayectorias, 9, 643-645
radiofrecuencia, 12-16
Propiedad de separación, 51
Propiedades
CDF, 672, 693
códigos de bloque, 21, 28
densidad espectral de potencia, 411
formas de onda, 34
función de autocorrelación, 403
función de correlación cruzada, 404
función delta de Dirac, 646-647
función Q(z), 662
PDF, 672, 693
proceso aleatorio gaussiano, 429-433
procesos aleatorios de pasabanda, 437-440
serie de Fourier, 69-70
Transformada de Fourier, 46-47
Protocolo
Véase Soluciones por computadora
Prueba de dos tonos, 252-255
Prueba estadística, 478
Pulso rectangular
definición, 54
espectro, 54-55
Pulso triangular
definición, 54
espectro, 58
Punto de acceso, 637
Punto de intercepción, 253-254

Q

Q(z), función, 684
aproximación para, 662
CDF gaussiana, 684
gráfico de, 686,
límite superior, 662, 686
propiedades de, 662
tabla, 663
Q, canal, 233, 235-236, 283, 286
Q, factor de calidad, 246-247
QPSK desbalanceada, 358

R

Radar, bandas de, 11
Radiación isotrópica, 580
Radio bidireccional de FM, 338
Radio bidireccional, *Véase* Sistemas de telefonía celular
Radio móvil

teléfono celular, 603-612
FM, 338
Radio por software, 288-289
Radiofrecuencia
filtros, 246-249
propagación, 12-16
Rampa, convertidor analógico a digital de (ADC), 138, 140
Rango de enganche, PLL, 274, 277
Rango de retención, PLL, 274
Rayleigh, PDF, 444-447, 495-496
Rayleigh, teorema de energía de, 48
RC pasabaja, filtro de, 81-83, 424
ancho de banda equivalente, 429
autocorrelación y PSD, 425
SNR de salida, 426
Receptor, 8, 283-288
de conversión directa, 287-288
de conversión dual, 284
espectro ensanchado, 374, 378
fibra óptica, 602
FMFB, 526-528
general, 283-287
interferencia, 288
satélite, 595-600, 640-642
sincronización de señalización digital, 507-508
sobrecarga, 595-600, 640-642
software-radio, 288-289
SSB, detección de producto, 315
SSB, método de separación de fases, 387, 548
superheterodino, 283-287
televisión a color, 624
televisión en blanco y negro, 618
TRF, 283
Véase también Receptores digitales; Probabilidad de error en el bit; Probabilidad de error; Relación señal a ruido
Receptores digitales, *Véase* Probabilidad de error en el bit
Receptores óptimos digitales, *Véase también* Receptores digitales
Rectificador lineal de media onda, 690
Red digital de servicios integrados (ISDN), 562-564
Red híbrida (telefónica), 558, 559
Red lineal, 79-86
Redes de datos inalámbricas, 637-640
Redes de telefonía públicas conmutadas (PSTN), 565-567
Reductor digital, 288
Reed-Solomon, códigos de, 21, 28
Referencias, 710-722
Relación de tamaño de pantalla, 615, 631, 633
Relación de portadora a ruido (C/N), 593
Relación señal a ruido (SNR)
AM, detección de envolvente de, 517
AM, detección de producto de, 516
balance de enlace, 593
comparación de sistemas, 531-533
decibeles, 41
DM, 196
DPCM, 189
DSB-SC, 518
evaluación de, 514-533
filtro de RC, 426
FM, con deénfasis, 528-530, 542
FM, sin deénfasis, 523-526
PCM, 143-151, 508-513
PN, 522-523
portadora a ruido (C/N), 593
recibido a través de espacio libre, 593
sistema de banda base, 514-515
SSB, 519
Relaciones de entrada a salida, sistemas lineales, 422-426
Relleno con ceros, 97
Rendimiento
codificación, 25-29
medidas de, 476
óptimo de código, 25-29
sistema ideal, 26-27, 531
sistemas analógicos, 531-533
sistemas digitales, 505
Repetidor, 171-173
BER, 173
Repetidor regenerativo, *Véase* Repetidor
Requisición de repetición automática (ARQ), 19
R-ésimo momento, 677
Resistencia a radiación, 588
Resolución
de línea, televisión, 614-616, 631, 632-633
de pulso para no ISI, 180-188
horizontal, televisión, 615-616, 631, 633
vertical, televisión, 614-615, 631, 633
Respuesta
amplitud, 80
causal, 79, 83
de amplitud, sistema lineal, 80
de frecuencia, sistema lineal, 80
de imagen, 285-286
de magnitud, sistema lineal, 80

fase, 80
impulso, 79, 83
Respuestas a problemas selectos, 723-728
Retraso
de envolvente, 242, 244
de fase, 244
de grupo, 242, 244
portadora, 244
tiempo, 84, 242
Riciana, PDF, 473, 496
Riemann-Lebesque, lemma, 494
RMS, de ancho de banda, valor, 427
RMS, valor, 39, 421
Ruido
ancho de banda, 103, 427
ancho de banda equivalente, 103, 427
blanco, 418, 433
blanco gaussiano, 433
coloreado, filtro acoplado para, 482-483
cuantización, 138
de sobrecarga de pendiente, DM, 194-196
definición, 33
diagrama en ojo, 170-171
fuentes, 581-584
granular, DM, 194-196
interferencia, 288
pasabanda, 434-447
PCM, 143-151
potencia disponible, 583
representación de componente en cuadratura, 232, 434-447
representación de fase de envolvente, 232, 434-447
sobrecarga de pendiente, 194-196
temperatura de fuente, 584
temperatura efectiva de ruido de entrada, 586-587
térmico, 582-583
Véase también Distribución; Probabilidad de error en el bit; Procesos aleatorios; Relación de señal a ruido
RZ, señal, 160

S

S, interfaz de ISDN, 562-563
Sa(x), función, 54, 56
espectro de, 55, 56
tabla de, 661
Satélite
ángulos de vista, 596
balance de enlace, 595-600, 640-642
comunicaciones, 565-579, 595-600
difusión directa, 570-571
Galaxy, 595-600
Hughes HS601, 570
radiodifusión, 577-579
sistema digital vía satélite, 570-571
TDMA conmutado vía satélite (SS-TDMA), 572
transmisión de datos, 572-579
transmisión de paquetes, 576
transmisión de televisión, 570-571, 595-600
transmisión telefónica, 567, 572-577
VSAT, 576-577
Schwarz, desigualdad de, 448, 460-462
demostración de, 460-462
Secuencia de aprendizaje, 181
Secuencias de registros de corrimiento, 373-376
Segunda generación, teléfono celular de (2G), 607-612
Segundo programa de audio (SAP) de televisión, 619
Senoidal, notación de fasor, 42
Señal
aleatoria, 6, 398-399
antipodal, 477
asíncrona, 202
banda base, 128-129
celular y PCS, 603-612
con regreso a cero (RZ), 160
con ruido, envolvente compleja de, 514
de Crominancia, televisión, 621
de energía, 35, 40
de luminancia, televisión, 621
de potencia, 34, 40
definición, 33
determinista, 6
energía, 34, 40
espacio, 153-155
espectro ensanchado, 372-379
fasor, 42
fibra óptica, 599-603
formatos digitales, 160-163
imagen, 285-286
inicio-fin, 202
interportadora, 611
multinivel, 177
NRZ, 160-161
pasabanda, 230-233, 235-236
periódica, 36

piloto, 334-337, 619
potencia, 34, 40
potencia recibida de espacio libre, 581
procesamiento, 8
recibida con ruido, 245-246
satélite, 561-574, 590-594
seudoternaria, 160, 167-168
sin regreso a cero, 160-161
síncrona, 202
telefónica, 552-557
televisión, 612-636
TV digital, 632-636
Véase también Señalización digital; Modulación; Constelación de señal; Estándares
vector, 153
VF, 208, 553-559
Señal unipolar, 160-161, 164
espectro, 164-165
probabilidad de error en el bit, 482-483
Señalización binaria, 156-158, 160-163, 339-352
formatos de codificación de línea, 160-163
Véase también Señalización digital
Señalización bipolar, 160-161, 167
espectro, 168
probabilidad de error en el bit, 486-488
Señalización digital, 152-160
binaria, 156-158
bipolar, 160-161, 167
BPSK, 339-340, 343-344
condición para espectros discretos, 417
desbalanceado, 358
DPCM, 188-192
DPSK, 500-502
error de símbolo multinivel, 506-507
estándares de telefonía, 206-212, 559-567
estimación de ancho de banda, 155
FSK, 339, 345-352
GMSK, 366, 608
líneas de abonado digital (DSL), 559-564
líneas de datos DS-1, DS-2, etcétera, 206-209
Manchester, 160-161, 168
MPSK, 352-353
MSK, 362-367
multinivel, banda base, 158-160, 176-178
multinivel, pasabanda, 352-359
NRZ, 160-161
OFDM, 367-372
OOK, 339, 340-342
OQPSK, 358
$\pi/4$ QPSK, 358-359, 608
polar, 160-161, 165
PSD de señal en banda base, 416
QAM, 355-358
QPSK, 352-353
representación vectorial, 153-155
RZ, 160
SONET, 208, 211
telefonía celular, 607-611
unipolar, 160-161, 164
Véase también Modulación por código de pulsos
2B1Q, 563-564
8VSB, 634-635
Señalización inicio-fin, 202
Señalización multinivel, 158-160
banda base, 158-160, 176-178
pasabanda, 352-353
portadora T1G, 212
tasa de error en el bit, 506-507
Señalización polar, 160-161, 165
espectro, 165
probabilidad de error en el bit, 486
Serie(s)
cardinales, 87
ortogonales, 67
tabla de, 658-659
Taylor, 65
Serie de Fourier, 68-78
complejas, 68-70
en cuadratura, 70-71
polar, 71-73
Seudoruido, código (PN), 373-376
Shannon, capacidad de canal de, 18, 26, 531-533
Sin correlación
procesos aleatorios, 405
variables aleatorias, 694
Sinc, función, 54
Sincronización
de bits, 173-176, 507
de bits de ley del cuadrado, 174
de trama falsa, 202
oscilador, 278
portadora, 444
receptores digitales, 507-508
televisión, 614, 615, 624, 633
trama o palabra, 200-202, 507
Sincronización de bits, 173-176, 507
compuerta anticipada-tardía, 176
ley del cuadrado, 174
Sincronizador anticipado-tardío de bit, 176
Síntesis digital directa (DDS), 281

Sintetizador de frecuencia, 279-280, 294
Sintetizador *N*-fraccional de frecuencias, 280
Sirius, radio vía satélite, 577-579
Sistema de comunicación, soluciones por computadora, 7
Sistema digital vía satélite (DSS), 570-571
Sistema de conmutación electrónico (ESS), 559
Sistema ideal de comunicación, 18-19, 26, 531-533
Sistema T1 de PCM, 211-212
Sistema T1G de PCM, 212
Sistemas
  analógicos, 5
  balance de enlace, 593
  cable TV, 627-631
  comunicación, 1, 8-10
  de cable estándares, 631
  digitales, 5
  espectro ensanchado, 372-379
  fibra óptica, 599-603
  funciones de transferencia, 80
  ideal, 18, 25-27, 531-533
  invariable en el tiempo, 79
  lineal, 79-86
  procesos aleatorios, 422-426
  redes de datos inalámbricas, 637-640
  rendimiento, *Véase* Densidad espectral de potencia; Probabilidad de error en el bit; Espectro
  satelitales, 565-579, 594-600
  telefonía, 552-567, 603-612
  telefonía celular, 603-612
  temperatura de ruido, 593
  Véase también Sistemas lineales
Sistemas de comunicación personal (PCS)
  inalámbricos, 643-645
  teléfonos celulares, 610
Sistemas de fibra óptica, 599-603
  FT-2000, 601-603
  SONET, 208, 211
Sistemas de telecomunicaciones, 552-567
Sistemas de telefonía celular, 603-612
  AMPS FDMA, 603-607
  analógicos, 603-607
  CDMA, 608-609
  digitales, 607-610
  estado de, 611
  estándares, 605, 607, 608
  ETACS, 605
  GSM, 608-609
  iDEN, 608-609
  inalámbricos, *Véase* Sistemas de telefonía celular
  invariables en el tiempo, 79
  IS-136 TDMA, 608-609
  IS-54 TDMA, 608-609
  IS-95 CDMA, 608-609
  JTACS, 605
  NADC, 608-609
  NAMPS, 607
  NTACS, 607
  PCS, 610
  pérdida por trayectoria, 595
  primera generación (1G), 603-607
  segunda generación (2G), 607-611
  TDMA, 608-609
  tercera generación (3G), 611-612
  1900 MHz, 610
  800 MHz, 605, 607, 608
Sistemas lineales
  autocorrelación de salida, 422
  con entradas senoidales, 80
  conversión de AM a PM, 242
  conversión de PM a AM, 242
  correlación cruzada de salidas, 424
  espectro de salida, 80
  función de transferencia, 80
  función de transferencia de potencia, 81, 423
  integral de convolución, 80
  invariable con el tiempo, 79
  procesos aleatorios, 422-426
  PSD combinadas de salidas, 424
  PSD de salida, 422
  respuesta de amplitud, 80
  respuesta de fase, 80
  respuesta de impulso, 79, 83
  salida, 80
  transmisión sin distorsión, 83-84, 242-244
SLC-96, terminal remota, 557-558
Sobrecarga, receptor de, 288
Soluciones por computadora, 7
  archivos por ftp, 7
  MathCAD, 7
  MATLAB, 7
SONET, 208, 211
Sonido en estéreo
  difusión por AM, 309
  difusión por FM, 334-337
  televisión, MTS, 619
Sonido multicanal de televisión (MTS), 619
SPADE, sistema, 568-571
Superalta frecuencia (SHF), 11

T

T, interfaz de ISDN, 562-563
Tabla
  asignaciones de frecuencia de canales de cable, 627-630
  asignaciones de frecuencias de televisión, 627-630
  capacidades de PSTN, 565-567
  CDF, 666
  códigos de bloque, 21, 28
  comparación de señales digitales, 505
  comparación de sistemas analógicos, 532
  derivadas, 640-641
  estándares de módem para datos por cable, 637
  estándares de telefonía, 555
  estándares de Wi-Fi, 638
  estándares de Wi-Max, 639
  expansiones de series, 644-645
  ganancias de antena, 581
  integrales, 656-658
  PDFs, 666
  Sa(x), 661
  sistema de fibra óptica FT-2000, 602, 603
  tabulación de Q(z), 663
  teléfonos celulares y PCS, 605, 607, 608
  teoremas de Fourier, 50, guardas finales
  transformada de Fourier, 62, guardas finales
  transformadas de Hilbert, 659
  trigonometría, 653-654
  TV digital, 633
  Véase también Estándares
Tablas matemáticas, 653-663
Tamaño del escalón de la modulación delta, 194
Tasa de bit, 153, 176
Tasa de código, 20
Tasa de error en el bit (BER), 10
  Véase también Probabilidad de error en el bit
Taylor, series de, 65
TDM intercalado por bits, 204
TDM intercalado por carácter, 204
TDM, jerarquía, CCITT, 210
TDM, jerarquía, Estadounidense, 206-207
TDM, jerarquía, SONET, 208, 211
TDMA, telefonía celular por, 608-609
Telefonía
  a través de cable de fibra óptica, 599-603
  a través de satélite, 573-577
  capacidades de PSTN, 565-567
  celular de primera generación, 603-607
  celular de tercera generación, 611-612
  conmutación analógica, 559
  conmutación digital, 559
  conmutación TSI, 559
  estándares, 555
  estándares de línea de tipo DS, 206-208
  híbrida, 558, 559
  identificador de llamadas, 555
  ISDN, 558-600
  jerarquía de TDM, 206-212
  lazo de abonado analógico, 552-556
  línea de abonado analógico, 552-556
  línea de abonado digital (DSL), 559-564
  número de equivalencia de timbre (REN), 555
  oficina central, 552-559
  sistema T1 de PCM, 211-212
  sistemas, 552-567, 602-610
  SLC-96, 557-558
  SONET, 208, 211
  telefonía celular, 603-612
  terminal remota, 556-559
  tip and ring, 553
  velocidad de datos de línea, 30
Televisión, 612-636
  a color, 619-624
  a través de satélite, 570-571, 595-600
  alta definición (HDTV), 632-636
  analógica, 612-624
  asignaciones de frecuencia, 627-630
  blanco y negro, 612-619
  canales, 627-630
  color, 619-624
  de alta definición (HDTV), 632-636
  definición estándar (SDTV), 635
  digital, 632-636
  en blanco y negro, 612-619
  estándares, 615, 625-631, 633
  forma de onda de pulsos de sincronización, 625
  resolución de línea, 614-616, 631, 633
  señal de crominancia, 621
  señal de luminancia, 621
  sonido MTS en estéreo, 619
  terminal de satélite TVRO, 595-600, 640-642
  vectorscopio, 623
  video digital conmutado, 562
Televisión por cable
  asignación de frecuencias, 627-630
  módems de datos, 636-637
  sistemas estándar, 631
  sistemas HRC, 631
  sistemas IRC, 631

Temperatura
ruido, 586-587
ruido celeste, 598-599
Temperatura de ruido, 584
celeste, 598-599
de entrada, dispositivos en cascada, 591
Sistema, 593
Temperatura efectiva de ruido de entrada, 586-587
atenuador, 588-589
dispositivos lineales en cascada, 591
línea de transmisión, 589
promedio, 587
puntual, 586
Temporización, patrón de ojo, 170-171
Teorema
Bayes, 668
capacidad de canal de Shannon, 19
dimensionalidad, 93
dimensionalidad pasabanda, 245
energía de Rayleigh, 47
Euler, 653
límite central, 698
muestreo, 87, 292
muestreo pasabanda, 244-245
Parseval, 48
transformadas de Fourier, 50
Wiener-Khintchine, 63, 408
Teorema de muestreo, 87-90
impulso, 90-93
pasabanda, 244-245
plano, 133-137
tres métodos, 292
Teoría de distribuciones, 51
Terminación de red ISDN NT1 y NT2, 562-563
Terminal (telefónica) remota (RT), 556-559
Terminal TVRO, 595-600, 640-642
Terminales de apertura de escala muy pequeña (VSAT), 576-577
Tiempo promedio, operador de, 35
Tonos (telefonía), 555
Transferencia de potencia, función de, 81, 423
Transferencia, función de
filtro acoplado, 448
filtro de RC, 82
potencia, 81
sistema lineal, 80
voltaje, 80
Transformación
PDF *N*-dimensional, 696-698
PDF unidimensional, 688
Transformación de función
PDF *N*-dimensional, 696-698
unidimensional, 688
Transformada
de coseno discreta, 634
de Fourier, 43
de Hilbert, 313, 659
Transformada de Fourier (DFT), 94-101
ejemplos en MATLAB, 94, 98-99, 102-104
evaluación de PSD, 419-420
formas de onda periódicas, 100
MathCAD, 94
resultado general, 95
selección de parámetros, 97
Transmisión de datos
por paquetes, 213, 576
Véase Soluciones por computadora; Señalización digital; Módems
Transmisión sin distorsión, 83-84, 242-244
canal, 83
pasabanda, 242-244
Transmisión, espacio libre, 581
Transmisor, 8
por software, 288-289
Transmisores, 281-283
AM, 306-308
FM, 382, 388
SSB, 314-315
Véase también Señalización digital
VSB, 316
Transpondedor, 569
básico, 569
Transversal, filtro
acoplado, 454-455
para DPCM, 189
Traslación de frecuencia, 50, 257-263
Trigonometría
definiciones, 653
identidades, 653-654
TV digital (DTV), 632-636
espectro, 635
estándares, 633

U

U, interfaz de ISDN, 562-563
UART, 142
Ultraalta frecuencia (UHF), 11
Un solo canal por cada portadora (SCPC), 573

Uniforme
cuantizador, 138
distribución, 682
PDF, 682
Unión de conjuntos, 666
Unión Internacional de Telecomunicaciones (Naciones Unidas, ITU), 10
USART, 142

V

V.90, 151
Valor
DC, 36, 420
RMS, 39, 421
Valor esperado, 676, 693
N-dimensional, 693
Unidimensional, 676
Véase también Promedio conjunto
Variables aleatorias, 669
CDF de, 669, 692
continuas, 672
definición, 669
independientes, 693
N-dimensionales, 692-694
PDF de, 670-693
suma de, 697-698
teorema del límite central, 698
transformación de función, 688, 696-697
valor promedio de, 576, 593
Véase también Distribución
Variables aleatorias discretas, 672
CDF, 674
PDF, 674
promedio conjunto, 676
Varianza, 677
Vector
base, 67, 153
fasores, 42
representación de formas de onda, 153-155
Vectorescopio, 623
Velocidad
bauds, 152, 176
bit, 153, 176
código, 20
de campo, televisión, 615, 631, 633
de fuente, 20
de trama, televisión, 615, 631, 633
fuente, 18
información, 18
Venn, diagrama de, 665
VF (frecuencia de voz), 208, 553-559
Video digital conmutado, 562
Video sobre demanda (VOD), 562
Viterbi, decodificación, 23

W

Wiener-Khintchine, teorema de, 63, 408

X

XM, radio vía satélite, 577-579

ABREVIATURAS

AC	corriente alterna
ADC	conversión analógico a digital
ADM	modulación delta adaptable
AM	modulación de amplitud
ANSI	Instituto Nacional Estadounidense de Estándares
APLL	lazo analógico enganchado por fase
ATM	modo de transferencia asíncrona
ATSC	Comité de Sistemas Avanzados de Televisión
AT□T	Compañía Estadounidense de Telefonía y Telegrafía
AWGN	ruido blanco aditivo gaussiano
BER	tasa de error en el bit
BPSK	modulación por corrimiento de fase binaria
CATV	televisión con antena colectiva
CCIR	Comité Consultivo Internacional de Radiocomunicaciones
CCITT	Comité Consultivo Internacional de Telefonía y Telegrafía
CDMA	acceso múltiple por división de código
CFT	transformada de Fourier continua
CMOS	semiconductor complementario de óxido metálico
CO	oficina central de telefonía
CRT	tubo de rayos catódicos
dB	decibel
DC	corriente directa
DFT	transformada de Fourier discreta
DM	modulación delta
DPCM	modulación diferencial por codificación de pulsos
DRM	radio digital Mondiale
DSB-SC	doble banda lateral con portadora suprimida
DSL	línea de abonado digital
DTV	televisión digital
EIRP	potencia radiada isotrópica efectiva
EIA	Asociación de Industrias Electrónicas
ERP	potencia radiada efectiva
FCC	Comisión Federal de Comunicaciones (Estados Unidos)
FDM	multiplexión por división de frecuencias
FEC	corrección directa de error
FET	transistor de efecto de campo
FFT	transformada rápida de Fourier
FM	modulación de frecuencia
FSK	modulación por corrimiento de frecuencia
GEO	satélite geoestacionario
GSM	grupo especial móvil (teléfono celular)
HDTV	televisión de alta definición
HF	alta frecuencia
HRC	portadora relacionada armónicamente
IBOC	canal dentro de banda
IEEE	Instituto de Ingenieros en Electricidad y Electrónica
IF	frecuencia intermedia
IMD	distorsión de intermodulación
IRC	portadora relacionada incrementalmente
ISDN	red digital de servicios integrados
ISI	interferencia intersimbólica
ISO	Organización Internacional de Normalización
ITU	Unión Internacional de Telecomunicaciones
LAN	red de área local
LED	diodo emisor de luz
LO	oscilador local
LOS	línea de vista
LPF	filtro pasabajas
LSSB	banda lateral única inferior
MAP	máximo *a posteriori* (criterios)
MIMO	múltiples entradas, múltiples salidas

MPSK	modulación por corrimiento de fase M-ario
MQAM	modulación en amplitud en cuadratura *M*-aria
MSK	modulación por corrimiento mínimo
NBFM	modulación de frecuencia en banda estrecha
NLOS	sin línea de vista
NRZ	sin retorno a cero
NTSC	Comité Nacional de Sistemas de Televisión (Estados Unidos)
OFDM	multiplexión por división de frecuencias ortogonal
OOK	modulación de encendido-apagado
OQPSK	modulación por corrimiento de fase en cuadratura con desplazamiento
PAM	modulación por amplitud de pulsos
PCM	modulación por codificación de pulsos
PCS	sistema de comunicación personal
PD	detección de fase
PDF	función de densidad de probabilidad
PEP	potencia pico de envolvente
PLL	lazo enganchado por fase
PM	modulación de fase
PPM	modulación por posición de pulso
PSD	densidad espectral de potencia
PSK	modulación por corrimiento de fase
PTM	modulación por tiempo de pulsos
PWM	modulación por ancho de pulso
QAM	modulación de amplitud en cuadratura
QPSK	modulación por corrimiento de fase en cuadratura
RMS	valor cuadrático medio
RF	radio frecuencia
RT	terminal telefónica remota
RZ	retorno a cero
SAW	onda acústica de superficie
SDARS	servicio de radio de audio digital vía satélite
SDTV	estándar de televisión digital
S/N o SNR	relación señal a ruido
SS	espectro ensanchado
SSB	banda lateral única
TCP/IP	protocolo de control de transmisión/protocolo de Internet
TDM	multiplexión por división de tiempo
TDMA	acceso múltiple por división de tiempo
TELCO	compañía telefónica
THD	distorsión harmónica total
TTL	lógica de transistor a transistor
TV	televisión
TVRO	televisión de recepción únicamente
TWT	tubo de ondas progresivas
UHF	ultraalta frecuencia
USSB	banda lateral única superior
VCO	oscilador controlado por voltaje
VF	frecuencia de voz
VHF	muy alta frecuencia
VSB	banda lateral residual
WBFM	modulación de frecuencia en banda ancha
WLAN	red de área local inalámbrica

TABLA 2–1 ALGUNOS TEOREMAS DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER[a]

Operación	Función	Transformada de Fourier
Linealidad	$a_1 w_1(t) + a_2 w_2(t)$	$a_1 W_1(f) + a_2 W_2(f)$
Retraso de tiempo	$w(t - T_d)$	$W(f)\ e^{-j\omega T_d}$
Cambio de escala	$w(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} W\left(\frac{f}{a}\right)$
Conjugación	$w^*(t)$	$W^*(-f)$
Dualidad	$W(t)$	$w(-f)$
Conversión de frecuencia de señal real [$w(t)$ es real]	$w(t)\cos(\omega_c t + \theta)$	$\frac{1}{2}[e^{j\theta} W(f - f_c) + e^{-j\theta} W(f + f_c)]$
Conversión de frecuencia de señal compleja	$w(t)\, e^{j\omega_c t}$	$W(f - f_c)$
Señal pasabanda	$\mathrm{Re}\{g(t)\, e^{j\omega_c t}\}$	$\frac{1}{2}[G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)]$
Diferenciación	$\frac{d^n w(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n W(f)$
Integración	$\int_{-\infty}^{t} w(\lambda)\, d\lambda$	$(j2\pi f)^{-1} W(f) + \frac{1}{2} W(0)\, \delta(f)$
Convolución	$w_1(t) * w_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\lambda) \cdot w_2(t - \lambda)\, d\lambda$	$W_1(f)\, W_2(f)$
Multiplicación[b]	$w_1(t)\, w_2(t)$	$W_1(f) * W_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(\lambda)\, W_2(f - \lambda)\, d\lambda$
Multiplicación por t^n	$t^n w(t)$	$(-j2\pi)^{-n}\, \frac{d^n W(f)}{df^n}$

[a] $\omega_c = 2\pi f_c$.

[b] $*$ el $*$ denota convolución, descrita detalladamente en la ecuación (2-62).

TABLA 2–2 ALGUNOS PARES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Función	Forma de onda en tiempo $w(t)$	Espectro $W(f)$
Rectangular	$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$T[\mathrm{Sa}(\pi f T)]$
Triangular	$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$	$T[\mathrm{Sa}(\pi f T)]^2$
Escalón unitario	$u(t) \triangleq \begin{cases} +1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
Signo	$\mathrm{sgn}(t) \triangleq \begin{cases} +1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{j\pi f}$
Constante	1	$\delta(f)$
Impulso en $t = t_0$	$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
Sinc	$\mathrm{Sa}(2\pi W t)$	$\frac{1}{2W}\,\Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$
Fasor	$e^{j(\omega_0 t + \varphi)}$	$e^{j\varphi}\,\delta(f - f_0)$
Senoide	$\cos(\omega_c t + \varphi)$	$\frac{1}{2}e^{j\varphi}\,\delta(f - f_c) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi}\,\delta(f + f_c)$
Gaussiano	$e^{-\pi(t/t_0)^2}$	$t_0 e^{-\pi(f t_0)^2}$
Exponencial, lateral	$\begin{cases} e^{-t/T}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{T}{1 + j2\pi f T}$
Exponencial, bilateral	$e^{-\lvert t \rvert / T}$	$\frac{2T}{1 + (2\pi f T)^2}$
Tren de impulsos	$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(t - kT)$	$f_0 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(f - nf_0)$, donde $f_0 = 1/T$

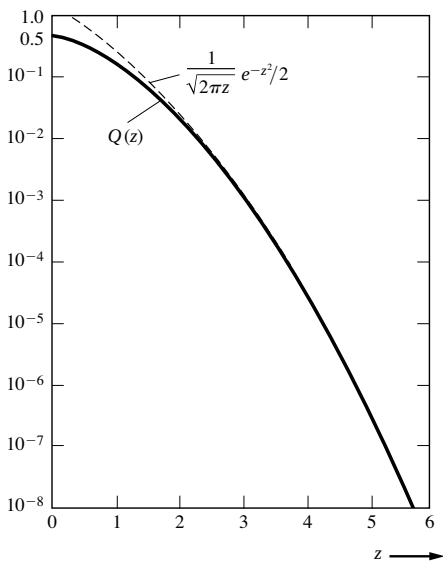


Figura B–7 La función $Q(z)$ y un sobrelímite, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,z}\,e^{-z^2/2}$.